УДК 539.3

С.А. НАЗАРЕНКО

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВОРОТНО-СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ К ВАРЬИРОВАНИЮ ПАРАМЕТРОВ

Аналіз чутливості може застосовуватися в системах оптимального інтерактивного і автоматизованого проектування конструкцій, при ідентифікації або коригуванні математичних моделей, неруйнівному контролі і вібродіагностиці виробництва і експлуатації, стохастичному аналізі характеристик в полі випадкових відхилень геометричних параметрів і властивостей матеріалу. При оптимальному проектуванні циклічно-симетричної конструкції з урахуванням технологічної спадковості замість детермінованого критерію може розглядатися оцінка функціоналу за найгіршими або за середньостатистичними відхиленнями параметрів проектування в рамках допусків. Розглянута проблема оптимального призначення допусків при мінімальній вартості виготовлення при обмеженнях на найгірші (в рамках допусків) відхилення динамічних або міцносних функціоналів. Аналіз чутливості скінчено елементної моделі дозволяє врахувати кінематичні обмеження, складну просторову геометрію, розподіл навантажень і фізичних властивостей матеріалів. Аналіз чутливості циклічно-симетричної конструкції специфічний тим, що повний набір змінних параметрів визначається комплектом, що описує змінні проектування окремого сектора. Похідні функціоналів відшукуються для цілої циклічно-симетричної конструкції. Облік циклічної симетрії призводить до значного зменшення кількості арифметичних операцій і істотного зниження обсягів збереженої і оброблюваної інформації. Проаналізовано методики аналізу чутливості міцносних і динамічних характеристик. Наведено приклади розв'язання задач для підшипникового вузла кочення і гідромашини.

Ключові слова: аналіз чутливості, оптимізація, механіка, поворотно-симетричні конструкції, підшипники кочення, модель, сектор.

При оптимальном проектировании циклически-симметричной конструкции с учетом технологической наследственности вместо детерминированного критерия может рассматриваться оценка функционала по наихудшим или по среднестатистическим отклонениям варьируемых параметров в рамках допусков. Анализ чувствительности циклически-симметричной конструкции специфичен тем, что полный набор варьируемых параметров определяется комплектом, описывающим переменные проектирования отдельного сектора. Производные функционалов отыскиваются для целой циклически-симметричной конструкции. Учет циклической симметрии приводит к значительному уменьшению количества арифметических операций и существенному снижению объемов хранимой и обрабатываемой информации. Проанализированы методики анализа чувствительности прочностных и динамических характеристик. Приведены примеры решения задач для подшипникового узла качения и обратимой гидромашины.

Ключевые слова: анализ чувствительности, оптимизация, механика, поворотно-симметричные конструкции, подшипники качения.

Sensitivity analysis can be used in systems of optimal interactive and automated design, when identifying or updating mathematical models, debugging; non-destructive testing and vibration diagnostics of production and operation, stochastic analysis of characteristics in the field of random deviations of geometric parameters and material properties. In the optimal design of a cyclically symmetric design, taking into account the technological heredity, instead of a deterministic criterion, an evaluation of the functional by the worst or the average statistical deviations of the variable parameters within the limits of tolerances can be considered. The problem of the optimal designation of tolerances at a minimum manufacturing cost with constraints on the worst (within tolerances) deviations of dynamic or strength functionals is considered.

The sensitivity analysis of the finite element model allows taking into account the kinematic constraints, the complex geometry of the volumetric form, the distribution of loads and the physical properties of materials. The analysis of the sensitivity of a cyclically symmetrical design is specific in that a complete set of variable parameters is determined by a set describing the design variables of a particular sector. Derivatives of functionals are sought for an entire cyclically symmetric construction. Accounting for cyclic symmetry leads to a significant reduction in the number of arithmetic operations and a significant reduction in the amount of stored and processed information. The methods for analyzing the sensitivity of strength and dynamic characteristics are analyzed. Examples of solving problems for a bearing rolling unit and a reversible hydraulic machine are given.

Keywords: sensitivity analysis, optimization, mechanics, cyclically symmetric structure, finite element method, rolling bearing, stress, sector.

Введение. Анализ чувствительности многокомпонентных конструкций позволяет, с одной стороны, совершать оценочные оперативные расчеты большого количества вариантов при стохастическом анализе характеристик в поле случайных отклонений геометрических параметров и свойств материала, идентификации или корректировке их математических моделей, доводке; неразрушающем контроле и вибродиагностике производства и эксплуатации, с другой стороны, создать улучшенную вариацию в системах оптимального интерактивного и автоматизированного проектирования [1–4]. Специфика поворотно (циклически) симметричных конструкций (ЦСК) позволяет путем формирования специализированных теорий и численных методик перейти от общих методов анализа многокомпонентных систем к специальным, значительно меньшей размерности [5–8].

Основная часть. При оптимальном проектировании многокомпонентных ЦСК с учетом технологической наследственности вместо детерминированного критерия $\min J(\vec{u},\vec{y})$ может рассматриваться оценка функционала по наихудшему отклонению $\vec{u}$ в рамках допусков d_i: $\min\limits_{u_i}\max\limits_{|\Delta u_i|<d} J(\vec{u}+\Delta\vec{u},\vec{y}+\Delta\vec{y})$, заменяемая при использовании анализа чувствительности на основе гамильтониана H [3, 4]

$$\min_{u_i}(J(\vec{u},\vec{y})+\sum_i\left|H'_{u_i}\right|d_i),$$

или по среднестатистическому отклонению

$$\min_{u_i}(J(\vec{u},\vec{y})+3(\sum_{ij}H'_{u_i}H'_{u_j}r_{ij}\sigma_i\sigma_j)^{1/2}).$$

Штрихом обозначено явное дифференцирование по варьируемым переменным u_i. При наличии достаточного технико-экономического анализа цикла «формирования и сборки» MultiStage [8], может быть решена задача оптимального назначения допусков ЦСК с учетом технологической наследственности при минимальной стоимости изготовления при ограничениях на наихудшие (в рамках допусков) отклонения динамических или прочностных функционалов

$$J_j\pm\sum_i\left|H'_{j,u_i}\right|d_i\in[\bar{J}_j\pm\Delta J_j].$$

Анализ чувствительности многокомпонентных ЦСК специфичен тем, что полный набор варьируемых параметров определяется комплектом $\{u_i\}_{i=1}^r$, описывающим переменные проектирования отдельного сектора, а производные функционалов отыскиваются для целой поворотно-симметричной конструкции

$$\vec{\nabla}_u J=\left\{\left(\frac{\partial J}{\partial\vec{y}},\vec{y}'_{u_i}\right)+\frac{\partial J^{я}}{\partial u_i}=-\frac{\partial H^{я}}{\partial u_i}\right\},\quad i=\overline{1,r} \qquad (1)$$

Вначале рассмотрим соотношения анализа чувствительности ЦСК (1) для случая статического нагружения конечноэлементной (КЭ) модели, позволяющей учесть кинематические ограничения, сложную пространственную геометрию, распределение нагрузок и физических свойств материалов [3, 6]. Производную от гамильтониана $H=\left(K(\vec{u})\vec{y},\vec{\psi}\right)-J(\vec{u},\vec{y})$ берем только по явно входящему параметру проектирования.

Введение вектора сопряженных переменных $\vec{\psi}$ для задач статики многокомпонентных конструкций ЦСК при учете равенства $K^T=K$

$$K^T(\vec{u})\vec{\psi}=K(\vec{u})\vec{\psi}=\vec{g}=\vec{\nabla}_y J. \qquad (2)$$

позволяет найти скалярное произведение в выражении для производных гамильтониана H наиболее экономным образом:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial\vec{y}},\frac{\partial\vec{y}}{\partial u_i}\right)=-\vec{y}^TK_{u_i}\vec{\psi}+\vec{F}_{u_i}^T\vec{\psi}, \qquad (3)$$

где $K(\vec{u})$ – матрица жесткости ЦСК; $\vec{F}$ и $\vec{y}$ – векторы узловых нагрузок и перемещений.

Сопряженная задача (2) повторяет за исключением правой части структуру задачи статики $K\vec{y}=\vec{F}$. Для ее решения приложим разработанный ранее алгоритм [8], причем используются матрицы, матричные разложения и промежуточные результаты ранее решенной задачи анализа ЦСК. Тогда градиент функционала задачи статики многокомпонентной ЦСК

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}=\frac{\partial J^{яв}}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{N}\vec{y}_j^T\left(A_{1u_i}\vec{\psi}_j+A_{2u_i}\vec{\psi}_{j+1}+A_{3u_i}\vec{\psi}_{j-1}\right)+\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ju_i}^T\vec{\psi}_j,$$

где $\vec{\psi}_0=\vec{\psi}_N$; $\vec{\psi}_{N+1}=\vec{\psi}_1$; $i=\overline{1,r}$. Соотношения для матриц A_1, A_2, A_3 и вектора F_j приведены в работе [8].

Формулировка замыкает вместе с решением прямой и сопряженной задач проблему определения производных статических функционалов ЦСК. Учет поворотной симметрии приводит к значительному уменьшению количества арифметических операций и существенному снижению объемов хранимой и обрабатываемой информации. Корректировка численной модели конструкции может производиться независимо для каждого сектора, поэтому структуру данных необходимо организовывать иерархически. Полная или частичная статическая конденсация внутренней области сектора многокомпонентной ЦСК принципиально не модифицирует методику решения.

Для нерезонансных задач динамики ЦСК выражения для анализа чувствительности отличаются только физическим значением матрицы коэффициентов, которая в данном случае является матрицей динамической жесткости

$$K_d=K-\omega^2M,$$

где M – матрица масс, ω – частота вынуждающей силы.

Матричное уравнение колебаний ЦСК соответственно для синусной (s) и косинусной (c) составляющих нагрузки приобретает вид:

$$\left[K(\vec{u})-\omega^2M(\vec{u})\right]\vec{y}_{C,S}=\vec{F}_{C,S}(\vec{u}). \qquad (4)$$

Исходная и сопряженная задачи интегрального динамического функционала ЦСК в этом случае не содержат особенностей, так как матрица динамической жесткости - невырожденная:

$$J=\int_0^T f\left(\vec{u},\vec{y}_C\cos\omega t+\vec{y}_S\sin\omega t\right)dt=J\left(\vec{u},\vec{y}_C,\vec{y}_S\right);$$

$$\left[K-\omega^2M\right]\vec{\psi}_{C,S}=\vec{\nabla}_{C,S}J;$$

$$\vec{\nabla}_C J=\frac{\partial J}{\partial\vec{y}_C};\qquad \vec{\nabla}_S J=\frac{\partial J}{\partial\vec{y}_S}. \qquad (5)$$

Выражения для гамильтониана и коэффициентов чувствительности ЦСК с учетом квазициклической структуры потенциальных вариаций КЭ – матриц приобретают соответствующий вид:

$$H=\sum_{C,S}\vec{\psi}_{C,S}^T\left[K-\omega^2M\right]\vec{y}_{C,S}-\vec{\psi}_{C,S}^T\vec{F}_{C,S}-J;$$

$$\vec{\nabla}_u J=\left\{-\frac{\partial H}{\partial u_i},i=\overline{1,r}\right\}. \qquad (6)$$

Нахождение функциональных производных многокомпонентных ЦСК состоит из ряда вычислительных задач, объем и точность решения которых не зависит от количества секторов и определяется размерностью исключительно отдельного сектора.

Принципиальной особенностью динамики ЦСК является существование кратного резонанса, при котором определяются группы взаимосвязанных собственных форм, располагающих фиксированным числом волн деформаций [8]. Анализ чувствительности конструкций осложняется принципиальной недифференцируемостью (в смысле Фреше) кратной собственной частоты в произвольной окрестности точки полного пространства переменных проектирования, «подозреваемой на оптимальность», однако дифференцируемостью (в смысле Гато) по направлению.

Соответствующий математический аппарат рассмотрим для кратности 2 с потенциалом распространения на случаи более высокой кратности основополагающих результатов. Пусть $\vec{y}_1$ и $\vec{y}_2$ – два взаимно ортогональных, нормированных вектора, отвечающих кратному собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. При этом пространство решений исходной задачи $[K - \lambda M]\vec{y} = \vec{0}$ включает два произвольных параметра

$$\vec{y} = \gamma_1 \vec{y}_1 + \gamma_2 \vec{y}_2 = B\left(\vec{y}_1 \cos\varphi + \vec{y}_2 \sin\varphi\right), \qquad (6)$$

характеризующих норму собственного вектора B и его поворот φ в подпространстве собственных форм. Для определенности $\vec{y}_1$ и $\vec{y}_2$ помимо условий ортогональности и нормировки

$$\vec{y}_j^T M \vec{y}_i = \delta_{ij} \quad : \quad i, j = 1{,}2 \qquad (7)$$

надо зафиксировать «угловое» положение одной из мод $\vec{n}^T M \vec{y}_1 = 0$.

Анализ возмущенной $\left(\vec{u} + \delta\vec{u}\right)$ системы уравнений приводит к соотношению для «расщепления» кратного собственного значения

$$\delta\lambda_{1,2} = 0{,}5\,(\alpha_{11} + \alpha_{22} \pm \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + \alpha_{12}^2}\,),$$

где $\alpha_{ij} = \vec{y}_i(\delta K - \lambda\delta M)\vec{y}_j$, $\delta M_{r,s} = \delta\vec{u}^T \vec{\nabla}_u M_{r,s}$, $\delta K_{r,s} = \delta\vec{u}^T \vec{\nabla}_u K_{r,s}$.

Совместное решение исходной и сопряженных задач $[K - \lambda M]\vec{\psi}_{1,2} = \dfrac{\partial J}{\partial \vec{y}_{1,2}}$ приводит к условиям

$$\vec{y}_i^T \frac{\partial J}{\partial \vec{y}_j} = 0.$$

Полные соотношения для производной ∇J в подпространстве кратных мод формируются суммированием однотипных выражений

$$\vec{\nabla}_u J = -\frac{\partial H}{\partial \vec{u}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \vec{u}} \vec{\psi}^T M \vec{y}$$

и располагают фильтрующим свойством к общей части сопряженных решений:

$$\vec{\psi}_1 = \gamma_{11}\vec{y}_1 + \gamma_{12}\vec{y}_2 + \vec{\psi}_1^*,$$

$$\vec{\psi}_2 = \gamma_{21}\vec{y}_1 + \gamma_{22}\vec{y}_2 + \vec{\psi}_2^*$$

Отметим, что отклонения конструктивно-технологических параметров многокомпонентных поворотно-симметричных конструкций при производстве и эксплуатации носят случайный характер и сложны для обнаружения [1-3, 6-8]. Их можно условно расчленить на 2 разновидности:

1) конструкция, повернутая относительно оси вращения на произвольный угол, кратный $2\pi/N$ (порядок симметрии N – число секторов), сохранит инвариантность физических и геометрических параметров (т.е. свойства циклической симметрии) – регулярные погрешности;

2) нарушается свойство строгой циклической симметрии – нерегулярные погрешности.

При анализе чувствительности собственных частот и резонансных характеристик ЦСК, зависящих от собственных форм, имеется принципиальное отличие. В первом видоизменении соответствующие вариации M и K располагают квазициклической структурой, при этом сохраняются выражения для производных по Фреше, выполняется условие нерасщепления спектра

$$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \delta\lambda,$$

что накладывает на вариацию переменных проектирования дополнительные ограничения

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}; \qquad \alpha_{12} = 0.$$

Принципиальным следствием в подпространстве $\vec{u}$ кратного резонанса является сохранение однозначной линейной связи между $\delta\vec{y}$, $\delta\lambda$ и $\delta\vec{u}$.

При второй разновидности происходит нарушение симметрии, расщепление кратного спектра, «привязка» в окружном направлении форм колебаний. Вариации собственных частот и мод колебаний характеризуются нелинейными соотношениями. При вынужденных колебаниях конструкций происходит повышение динамической нагруженности (перегрузка) [1, 8].

С целью демонстрации предлагаемых методов анализа чувствительности приведены примеры решения прикладных задач при нелинейной изменяемости характеристик материалов с учетом технологической наследственности. На рис. 1 и 2 в качестве формы иллюстрации результатов сделана тоновая заливка на поверхности конструкций. Синим цветом представлена зона близких к нулю коэффициентов чувствительности собственных частот на соответствующих формах колебаний, красным – экстремальных.

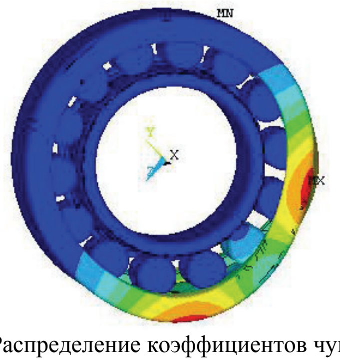

Рисунок 1 – Распределение коэффициентов чувствительности четвертой собственной частоты подшипника качения к изменению плотности материалов

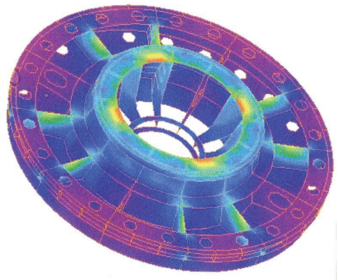

Рисунок 2 – Распределение коэффициентов чувствительности четвертой собственной частоты гидромашины к изменению приведенного модуля упругости

На рис. 1 приведен пример расчета модели подшипникового узла качения при условии постоянного контакта роликов и колец. Распределение коэффициентов чувствительности собственных частот проводилось с учетом сложной геометрии объемной модели и соответствующего закрепления внутреннего и наружного колец с приставными бортиками [8].

На рис. 2 приведен пример расчета модели обратимой гидромашины высоконапорной ГАЭС. Крышка гидротурбины является несущей пространственной ЦСК, состоящей из оболочек вращения, объединенных *N* ребрами [7]. Отверстия предназначены для уменьшения веса и размещения механизмов, а также для ремонта и демонтажа отдельных лопаток без полной разборки направляющего аппарата.

Выводы. В статье рассмотрены варианты оптимизации многокомпонентных поворотно-симметричных конструкций с учетом технологической наследственности по наихудшему или по среднестатистическому отклонениям в рамках допусков, назначения допусков при минимальной стоимости изготовления при ограничениях на наихудшие отклонения динамических или прочностных функционалов. Проанализированы методики анализа чувствительности прочностных и динамических характеристик ЦСК. Приведены примеры решения задач для подшипникового узла качения и обратимой гидромашины.

Список литературы:

1. *Андреев А.Г.* Основные направления исследований ученых НТУ «ХПИ» в области механики / *А.Г. Андреев, С.А. Назаренко* // Вестник НТУ «ХПИ». – 2015. – № 57 (1166). – Р. 3-7.

2. *Martins J.R.R.A.* Review and unification of methods for computing derivatives of multidisciplinary computational models / *J.R. R. A. Martins, J. T. Hwang* // AIAA journal. – 2013. – Vol. 51, №. 11. – P. 2582-2599.

3. *Назаренко С. А.* Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы / *С. А. Назаренко* // Вестник НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 119–122.

4. *Симсон Э. А.* Методика анализа чувствительности вибрационных параметров механических систем / *Э. А. Симсон, С. А. Назаренко, М. В. Трохман* // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2008. – № 2/4. – С. 44-47.

5. *Shi C.* Vibration mode structure and simplified modelling of cyclically symmetric or rotationally periodic systems / *C. Shi, R. G. Parker* // Proceedings of the Royal Society of London. – 2015. – V. 471, №. 2173. – P. 20140672.

6. *Симсон Э.А.* Математические модели элементов машин при воздействии физических полей и внешней среды / *Э.А. Симсон, С.А. Назаренко* // Механіка та машинобудування. – 2009. – № 1.– С. 69-77.

7. *Шупиков А.Н.* Расчет напряжений циклически-симметричных пространственных конструкций / *А.Н. Шупиков, С.Ю. Мисюра* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – № 63 (1036). – С. 139-147.

8. *Simson E.A.* Strength and dynamic analysis multicomponent cyclically symmetric structures (rolling bearings) / *E.A. Simson, S. A. Nazarenko* // Bulletin of NTU "KhPI". – 2016. – № 26 (1198). – P. 71-74. – doi: 10.20998/2078-9130.2016.26.79933.

Bibliography (transliterated):

1. Andreev A.G., Nazarenko S.A. Main achievements of scientists of NTU «KhPI» in the field of mechanics. Bulletin of NTU "KhPI". 2015. No 57 (1166). PP. 3-7.

2. Martins J.R.R.A., Hwang J.T. Review and unification of methods for computing derivatives of multidisciplinary computational models. AIAA journal. 2013. Vol. 51, No 11. PP. 2582-2599.

3. Nazarenko S.A. Analiz chuvstvitel'nosti konstrukcij pri vozdejstvii fizicheskih polej razlichnoj prirody. Bulletin of NTU "KhPI". 2006. No 32. PP. 119–122.

4. Simson E.A., Nazarenko S.A., Trohman M.V. Metodika analiza chuvstvitel'nosti vibracionnyh parametrov mehanicheskih sistem. Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij. 2008. No 2/4. PP. 44-47.

5. Shi C., Parker R.G. Vibration mode structure and simplified modelling of cyclically symmetric or rotationally periodic systems. Proceedings of the Royal Society of London. 2015. Vol. 471, No 2173. PP. 20140672.

6. Simson E.A., Nazarenko S.A. Matematicheskie modeli elementov mashin pri vozdejstvii fizicheskih polej i vneshnej sredy. Mekhanika ta mashynobuduvannya. 2009. No 1. PP. 69-77.

7. Shupikov A.N., Misyura C.Yu. Raschet napryazhenij ciklicheski-simmetrichnyh prostranstvennyh konstrukcij. Bulletin of NTU "KhPI". 2013. No 63 (1036). PP. 139-147.

8. Simson E.A., Nazarenko S.A. Strength and dynamic analysis multicomponent cyclically symmetric structures (rolling bearings). Bulletin of NTU "KhPI". 2016. No 26 (1198). PP. 71-74. doi: 10.20998/2078-9130.2016.26.79933.

Поступила (received) 05.09.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Аналіз чутливості характеристик поворотно-симетричних багатокомпонентних конструкцій до варіювання параметрів / С. О. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 54-57. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

Анализ чувствительности характеристик поворотно-симметричных многокомпонентных конструкций к варьированию параметров / С. А. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 54-57. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

Analysis of the sensitivity of the characteristics of rotationally symmetric multicomponent structures to the variation of parameters / S. A. Nazarenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 40 (1262). − P. 54-57. – Bibliogr.: 8. – ISSN 2078-9130.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Назаренко Сергій Олександрович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, кафедра «Механіка суцільних середовищ та опір матеріалів», НТУ «ХПІ», тел.: 700-29-72; e-mail: nazarenkoserzh7@gmail.com.

Назаренко Сергей Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, кафедра «Механика сплошных сред и сопротивления материалов», НТУ «ХПИ», тел.: 700-29-72; e-mail: nazarenkoserzh7@gmail.com.

Nazarenko Sergej – Candidate of Technical Sciences, Senior Staff Scientist, Department of Continuum Mechanics and Strength of Materials, NTU «KhPI», tel.: (057) 700-29-72; e-mail: nazarenkoserzh7@gmail.com.