

**В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ****КОЛИВАННЯ КВАДРАТИЧНО-НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА, СПРИЧИНЕНІ ІМПУЛЬСНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ**

Розглянуто механічні коливання нелінійного осцилятора, у якого відновлююча сила пропорційна квадрату деформації пружини. Рух спричинений або миттєво прикладеною силою сталої величини або прямокутним силовим імпульсом скінченної тривалості. Побудовано два варіанти аналітичного розв'язку нелінійної задачі Коші для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. В першому переміщення осцилятора у часі виражено через еліптичний косинус Якобі, що дає можливість обчислювати їх за допомогою відомих таблиць. У другому для розрахунку переміщень, задіяно Атеб-синус. Запропоновано апроксимації, які з похибкою меншою одного відсотка, подають Атеб-синус в елементарних функціях. Показано, що коефіцієнт динамічності у розглянутого осцилятора менший двох. Він залежить від тривалості дії прямокутного силового імпульсу. Знайдено тривалість дії сили, коли досягається максимальний ефект розгойдування вільних коливань розвантаженого осцилятора. Вона залежить не тільки від параметрів осцилятора, а й від значення прикладеної сили, що не властиво лінійним системам. Наведено приклади розрахунків та відповідні графіки.

**Ключові слова:** нелінійний осцилятор, дія силового імпульсу, аналітичний розв'язок, еліптичний косинус, Атеб-синус.

Рассмотрены механические колебания нелинейного осциллятора, у которого восстанавливающая сила пропорциональна квадрату деформации пружины. Движение вызвано или мгновенно приложенной силой постоянной величины или прямоугольным силовым импульсом конечной протяженности. Построено два варианта аналитического решения нелинейной задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. В первом, перемещения осциллятора во времени выражены через эллиптический косинус Якоби. Во втором, для расчета перемещений, задействовано Атеб-синус. Предложены аппроксимации, которые, с погрешностью меньшей одного процента, представляют Атеб-синус в элементарных функциях. Показано, что коэффициент динамичности у рассматриваемого осциллятора меньше двух. Он зависит от длительности действия прямоугольного силового импульса. Найдена продолжительность действия силы, когда достигается максимальный эффект раскачки свободных колебаний разгруженного осциллятора. Она зависит не только от параметров осциллятора, но и от значения приложенной силы, что не свойственно линейным системам. Приведены примеры расчетов и соответствующие графики.

**Ключевые слова:** нелинейный осциллятор, действие силового импульса, аналитическое решение, эллиптический косинус, Атеб-синус.

The mechanical oscillations of a nonlinear oscillator, which has a rebounding force proportional to the square of the strain of the spring, have been considered. The movement is caused either by a instantly applied force of a constant value or by a rectangular force pulse of the finite extent. Two variants of the analytic solution of the nonlinear Cauchy problem for a nonhomogeneous differential equation of second order have been constructed. In the first one, the displacement of the oscillator in time is expressed in terms of the elliptic cosine of Jacobi. In the second, the Атеб-sinus is used to calculate displacements of the oscillator. Approximations, which, with an error of less than one percent, represent the Атеб-sinus in elementary functions have been proposed. It is shown that the coefficient of dynamism of the oscillator under consideration is less than two. It depends on the duration of the rectangular force impulse. The duration of the force when the maximum effect of the free oscillations of an unloaded oscillator is reached have been discovered. It depends not only on the parameters of the oscillator, but also on the value of the applied force, which is not typical of linear systems. Examples of calculations and corresponding graphs have been provided.

**Keywords:** nonlinear oscillator, force impulse action, analytical solution, elliptic cosine, Атеб-sinus.

**Вступ.** Дослідження нелінійних коливань механічних систем з великими амплітудами відносяться до актуальних науково-прикладних задач, бо такі коливання можуть бути причиною передчасного руйнування елементів конструкцій та виходу їх з ладу. Тому, незважаючи на порівняно давню історію досліджень у цій галузі механіки [1], вони продовжують активно проводитись і в останні роки. Підтвердженням тому є монографічні публікації [2-5] та численні статті в наукових виданнях. Серед них заслуговує уваги окремих огляд [6], в якому йдеться про нелінійні коливання систем змінної маси. Коливання таких систем, за наявності сухого тертя, розглядали також в [7, 8], де точні розв'язки окремих задач будували методом припасовування, а наближені – методом енергетичного балансу.

**Метою даної роботи** є виведення та апробація

розрахункових формул для обчислення переміщень квадратично-нелінійного осцилятора при дії силового імпульсу.

Ставиться задача побудови аналітичних розв'язків задачі Коші в спеціальних функціях та використання їх для аналізу впливу різних чинників на особливості руху осцилятора.

Спочатку розглядаємо рух, спричинений миттєво прикладеною силою сталої величини, а потім узагальнюємо задачу на випадок дії прямокутного силового імпульсу скінченної тривалості.

**Основна частина роботи**

1. Коливання осцилятора, спричинені миттєво прикладеною силою. Переміщення осцилятора  $x(t)$  у часі  $t$  описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^2 \operatorname{sign}(x) = P \cdot H(t). \quad (1)$$

Тут  $m$  – маса осцилятора;  $c > 0$  – характеристика

жорсткості його пружини;  $P$  – миттєво прикладена сила;  $H(t)$  – функція Хевісайда; крапкою позначена похідна по  $t$ .

Початковими умовами до (1) приймаємо:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Уведенням позначень:  $\dot{x} = v$ ,  $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$ , рівнянню

(1) надаємо вигляд:

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{m} (P - cx^2). \quad (3)$$

приймаючи  $x \geq 0$ ;  $v \geq 0$ .

Проінтегрувавши (3), з урахуванням (2), отримуємо:

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(a^2 - y^2)}} = \sqrt{\frac{2c}{3m}} t. \quad (4)$$

Тут  $a = \sqrt{\frac{3P}{c}} = \sqrt{3} x_{CT}$ , де  $x_{CT} = \sqrt{\frac{P}{c}}$  – переміщення

осцилятора при статичному навантаженні його силою  $P$ . Таким чином, для осцилятора з вибраною характеристикою пружності коефіцієнт динамічності становить:

$$K_g = \frac{a}{x_{CT}} = \sqrt{3} < 2,$$

тобто він менший, ніж у лінійної системи.

Переходом до нової змінної інтегрування за формулами:  $y = au^2$ ;  $dy = 2au du$ , вираз (4) зводимо до співвідношення:

$$\int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \omega t, \quad (5)$$

в якому  $\omega = \sqrt{\frac{ac}{6m}} = \left(\frac{P \cdot c}{12m^2}\right)^{1/4}$ .

Користуючись (5), знайдемо час, коли досягається максимальне відхилення осцилятора від початкового положення  $x = 0$ . Поклавши в (5)  $x = a$ ,  $t = t_*$ , маємо:

$$\omega t_* = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I.$$

Значення  $I$  виражається через Гама-функцію  $\Gamma(z)$  [9, с. 295] по формулі:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}.$$

Враховуючи, що [10, с. 52]:  $\Gamma(1/4) \approx 3,62561$ ;

$$Sa(3, 1, 2 \cdot \omega t) = \begin{cases} \omega t; & 0 \leq \omega t < 0,2; \\ 0,2 + 1,0333(\omega t - 0,2) - 0,1444(\omega t - 0,2)^2; & \text{при } 0,2 \leq \omega t \leq 0,8; \\ 1 - \frac{2}{3} \sin^2 \left[ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (I - \omega t) \right] & 0,8 < \omega t \leq I. \end{cases} \quad (9)$$

створюють можливість наближено, з похибкою меншою 1 %, обчислювати  $x/a$  і при  $\omega t \in [I; 2I]$ , тобто повністю охопити перший цикл коливань, які відбуваються відносно положення  $x = x_{CT}$ .

З метою порівняння результатів, до яких призводять викладені форми розв'язку, розглянемо приклади

$\Gamma(3/4) \approx 1,22542$ , одержуємо:  $I \approx 1,31103$ . Таким чином,

$$t_* = \frac{1}{\omega} I \approx 2,4401 \left( \frac{m^2}{P \cdot c} \right)^{1/4}.$$

На відміну від лінійної системи, тут час  $t_*$  залежить не тільки від маси і жорсткості осцилятора, а також від величини прикладеної сили. Збільшення сили скорочує час досягнення максимального відхилення від положення  $x = 0$ . Із теорії еліптичних функцій Якобі відомо, що в інтегралі:

$$\int_z^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \zeta, \quad (6)$$

залежність  $z$  від  $\zeta$  подається виразом [9, с. 129]:

$$z = cn(\sqrt{2} \zeta, \sin 45^\circ), \quad (7)$$

де  $cn(\sqrt{2} \zeta, \sin 45^\circ)$  – еліптичний косинус.

Тому, враховуючи співвідношення:

$$\int_z^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} - \int_z^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = I - \int_z^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

і вирази (6), (7) та парність еліптичного косинуса, одержуємо наступну розрахункову формулу:

$$\frac{x}{a} = cn^2(\sqrt{2} |I - \omega t|, \sin 45^\circ). \quad (7)$$

Вона дає можливість обчислювати переміщення осцилятора на першому циклі коливань  $\omega t \in [0; 2I]$  за допомогою таблиць еліптичних функцій або таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду, яка є в [10, с. 102]. Графіки еліптичного косинуса приведені в [11, с. 382] і в [12, с. 761].

Замість (7), для дослідження руху осцилятора, можна використовувати і більш сучасну форму розв'язку розглянутої задачі Коші, де переміщення  $x(t)$  виражається через Атеб-синус  $Sa(3, 1, 2\omega t)$ . Згідно з [5, 13, 14], із (5) випливає, що:

$$\sqrt{\frac{x}{a}} = Sa(3, 1, 2\omega t).$$

Тому на проміжку  $0 \leq \omega t \leq I$  маємо:

$$\frac{x}{a} = Sa^2(3, 1, 2\omega t). \quad (8)$$

Залежність:

$$Sa(3, 1, 2\omega t) = Sa[3, 1, 2(I - \omega t)]$$

та апроксимація:

розрахунків.

**Приклад 1.** Знайдемо двома способами  $x/a$ , коли  $\omega t = 0,5$ ;  $\sqrt{2} |I - \omega t| \approx 1,1469$ . По таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду,  $F(\varphi, \sin 45^\circ)$ , надрукованій в [10], знаходимо, що

$F(\varphi, \sin 45^\circ) = 1,1469$  при  $\varphi \approx 60,2^\circ$ . Оскільки в даному випадку  $cn(\sqrt{2}|I - \omega t|, \sin 45^\circ) = \cos \varphi \approx \cos 60,2^\circ$ , то по формулі (7)  $x/a \approx \cos^2 60,2^\circ = 0,247$ . Якщо використовувати апроксимацію (9), то при  $\omega t = 0,5$   $Sa(3,1,2\omega t) \approx 0,497$  і по формулі (8)  $x/a \approx 0,247$ . Отже, результати розрахунків різними способами збігаються до трьох цифр після коми.

**Приклад 2.** Обчислимо  $x/a$ , коли  $\omega t = 2$ . Для нього  $\sqrt{2}|I - \omega t| \approx 0,9744$ . По таблиці в [10] знаходимо, що  $F(\varphi, \sin 45^\circ) = 0,9744$  при  $\varphi \approx 52,2^\circ$ . Тому, згідно з (7)  $x/a = \cos^2(52,2^\circ) \approx 0,376$ . У цьому випадку, при використанні (9), туди треба задати  $\omega t = 2I - 2 \approx 0,622$ , що дає  $Sa(3,1,2\omega t) \approx 0,610$ . Отже, згідно з (8),  $x/a \approx 0,61^2 \approx 0,373$ , що добре узгоджується з попереднім результатом, одержаним з використанням таблиць.

Графік залежності  $x(t)$  у безрозмірних змінних  $\omega t$ ,  $x/a$ , зображено на рис. 1. Він охоплює перший цикл коливань, що в разі потреби, не складно поширити і на більші значення  $\omega t$ .

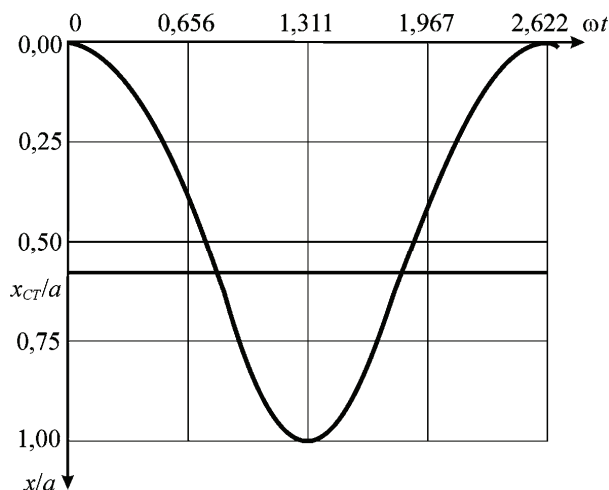


Рисунок 1 – Графік руху осцилятора при миттєвому навантаженні сталою силою

Із графіка видно, що час перебування осцилятора в області  $x \in [x_{CT}; a]$  менший, ніж у області  $x \in [0; x_{CT}]$ . Ця особливість коливань не властива лінійному осцилятору, де графік  $x(t)$  перетинає пряму  $x = x_{CT}$  через рівні проміжки часу.

2. Коливання осцилятора, спричинені силовим імпульсом обмеженої тривалості.

Припустимо, що тривалість дії сили сталої величини дорівнює  $t_1$ . Тоді рух осцилятора буде описуватись рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^2 \operatorname{sign}(x) = P[H(t) - H(t - t_1)].$$

Як і раніше, початковими умовами до нього приймаємо (2).

Якщо  $t_1 \in (0, 2t_*)$ , а  $t \in [0, t_1]$ , то  $x \geq 0$  і мають чинність одержані вище формули (7) і (8). Тому при

$t = t_1; x_1 = x(t_1)$  і:

$$\frac{x_1}{a} = cn^2(\sqrt{2}|I - \omega t_1|, \sin 45^\circ)$$

або

$$\frac{x_1}{a} = Sa^2(3,1,2\omega t_1). \quad (10)$$

В цей момент часу швидкість дорівнює:

$$v_1 = v_1(t_1) = \sqrt{\frac{2x_1}{m} \left( P - \frac{c x_1^2}{3} \right)} = \sqrt{\frac{2c}{3m}} \sqrt{x_1(a^2 - x_1^2)}.$$

Для дослідження руху осцилятор при  $t > t_1$ , коли вже не діє на нього сила  $P$ , треба розв'язати однорідне рівняння:

$$m\ddot{x} + cx^2 \operatorname{sign}(x) = 0, \quad (11)$$

при початкових умовах:

$$x(t_1) = x_1; \quad \dot{x}(t_1) = v_1. \quad (12)$$

Переходом від похідної по  $t$  до похідної по  $x$ , рівнянню (11) надаємо форму:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m} x^2, \quad (13)$$

оскільки  $x > 0$ , при  $t_1 \in (0, 2t_*)$ .

Пройнтегрувавши (13), з урахуванням (12), одержуємо:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2c}{3m}} \sqrt{x_1(a_*^3 - x^3)}, \quad (14)$$

де  $a_* = \lambda a$ ;  $\lambda = \sqrt[3]{x_1/a}$ .

Далі будемо розрізняти два випадки.

2.1. Для першого приймаємо  $t_1 \in (0, t_*)$  і  $v \geq 0$ .

Подальше інтегрування виразу (14), при  $v \geq 0$ , дає:

$$\int_{x_1}^x \frac{dy}{\sqrt{a_*^3 - y^3}} = \sqrt{\frac{2c}{3m}} (t - t_1). \quad (15)$$

Прийнявши в (15)  $y = a_* u$ ,  $dy = a_* du$ , йому надаємо форму:

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} = \omega_* (t - t_1). \quad (16)$$

Тут  $\omega_* = \sqrt{\frac{2a_* c}{3m}} = 2\sqrt{\lambda} \omega$ .

Вираз (16) створює можливість знайти час  $t_2$ , коли зупиниться осцилятор, відхилившись на  $a_*$  від положення  $x = 0$ . Задавши в (16)  $x = a_*$ ;  $t = t_2$ , отримуємо:

$$\omega_* (t_2 - t_1) = \int_{x_1/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} = I_*.$$

Звідки

$$\omega_* t_2 = I_* + \omega_* t_1 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{I_*}{2\sqrt{\lambda} \omega t_1} + 1. \quad (17)$$

Значення  $I_*$  можна знаходити за допомогою таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду, бо в [9, с. 126]:

$$I_* = \frac{1}{\sqrt{3}} F(\psi_*, k), \quad (18)$$

де

$$k = \sin 75^\circ; \psi_* = \arccos \frac{\sqrt{3}-1+x_1/a_*}{\sqrt{3}+1-x_1/a_*}. \quad (19)$$

Щоб вивести залежність  $x(t)$ , проведемо наступне перетворення в (16):

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = I_* - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \omega_*(t-t_1).$$

Тоді:

$$\int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = I_* - \omega_*(t-t_1) = \tau \quad (20)$$

і, згідно з [9, с. 126], при  $t \in [t_1; t_2]$ :

$$\frac{x}{a} = \lambda \left[ 1 - \sqrt{3} \frac{1 - \operatorname{cn}(\sqrt[4]{3}\tau, k)}{1 + \operatorname{cn}(\sqrt[4]{3}\tau, k)} \right]. \quad (21)$$

Отже, переміщення осцилятора на вказаному проміжку часу теж виражається через еліптичний косинус, який зручно обчислювати за допомогою таблиць.

Залежності (21) можна надати й більш сучасну форму, використовуючи періодичні Атеб-функції [5, 13, 14]. Із (20) випливає, що:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot \operatorname{Sa} \left[ 2, 1, \frac{3}{2} (J - \tau) \right]. \quad (22)$$

При цьому [9, с. 295]:

$$J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)} \approx 1,40218.$$

Значення Атеб-синуса в (22), з похибкою меншою 1 %, надає апроксимація:

$$\operatorname{Sa} \left( 3, 1, \frac{3}{2} \eta \right) = \begin{cases} \eta; \\ 0,2 + 1,0283(\eta - 0,2) - 0,1833(\eta - 0,2)^2; \\ 1 - \sin^2(\sqrt{3}/2)(J - \eta) \end{cases}$$

$$0 \leq \eta < 0,2;$$

при  $0,2 \leq \eta \leq 0,8;$

$$0,8 < \eta \leq J.$$

Якщо  $J \leq \eta \leq 2J$ , то

$$\operatorname{Sa} \left[ 2, 1, \frac{3}{2} (2J - \eta) \right] = \operatorname{Sa} \left[ 2, 1, \frac{3}{2} \eta \right].$$

Тому не виникає ускладнень при використанні формули (22).

Після відхилення на  $x = a_*$ , при  $t > t_*$ , осцилятор здійснює вільні коливання з амплітудою  $am(x) = a_*$  відносно положення  $x = 0$ . Їх окремо розглядали в [15], де виведено відповідні формули для розрахунку руху.

Аналіз викладеної теорії у розглянутому випадку показує, що амплітуда коливань  $a_*$  залежить від тривалості дії прикладеної сили  $P$ . Вона найбільша, коли  $t_1 = t_*$  і становить  $a_* = a = \sqrt{3P/c}$ . Отже імпульс з тривалістю дії  $t_1 = t_*$  є найбільш ефективним для розгойдування коливань. Нагадаємо, що час  $t_*$  залежить не тільки від маси й жорсткості осцилятора, а й від величини прикладеної сили, тоді як у лінійного осци-

лятора час  $t_*$  не залежить від  $P$ .

**Приклад 3.** Використовуючи виведені формули, обчислимо максимальне відхилення  $a_*$  осцилятора і час  $t_2$ , коли воно досягається, при дії імпульсу сили, у якого  $\omega t_1 = 0,3$ . Підставивши це значення  $\omega t_1$  в (10), знаходимо, що  $x_1/a \approx 0,09$ . Для нього  $\lambda = a_*/a \approx 0,448$ , що є відношенням фактичного максимального відхилення до максимально можливого. Тоді,  $x_1/a_* \approx 0,201$  і згідно з (19),  $\psi_* \approx \arccos 0,369 \approx 68,375^\circ$ . Користуючись таблицею неповного еліптичного інтеграла першого роду [10, с. 103], одержуємо  $F(\psi_*, k) \approx 1,581$  і по формулі (18) знаходимо  $I_* \approx 1,202$ . Отже,

$\omega t_2 = I_*/(2\sqrt{\lambda}) + \omega t_1 \approx 1,198$ . Відношення  $t_2/t_1$  дорівнює 3,993. Якщо  $\omega t_1 = 0,8$ , то аналогічні розрахунки дають:  $x_1/a \approx 0,590$ ;  $\lambda \approx 0,839$ ;  $x_1/a_* \approx 0,703$ ;  $\psi_* \approx 44,968^\circ$ ;  $I_* \approx 0,663$ ;  $\omega t_2 \approx 1,162$ ;  $t_2/t_1 \approx 1,453$ . Тут, у порівнянні з попереднім варіантом числових даних значно зросло відношення  $a_*/a$  і суттєво зменшилось відношення  $t_2/t_1$ .

2.2. Перейдемо до другого випадку, коли  $t_1 \in [t_*, 2t_*]$ ;  $x \geq 0$ , а  $v \leq 0$ . Взявши знак мінус перед радикалом в (14), після інтегрування цього виразу, отримуємо:

$$-\int_{x_1}^x \frac{dy}{\sqrt{a_*^3 - y^3}} = \sqrt{\frac{2c}{3m}} (t - t_1).$$

Заміною змінних:  $y = a_* u$ ,  $dy = a_* du$  йому надаємо вигляд:

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \omega_*(t - t_1), \quad (23)$$

де  $x \leq x_1$ .

Поклавши в (23)  $t = t_2$ ;  $x = 0$ , знаходимо час  $t_2$ , коли осцилятор повернеться у вихідне положення, яке він мав при  $t = 0$ . Для цього розв'язуємо рівняння:

$$\omega_*(t_2 - t_1) = \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = J - I_* \approx 1,40218 - I_*.$$

Тоді:

$$\omega t_2 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} (J - I_*) + \omega t_1. \quad (24)$$

Щоб одержати залежність  $x(t)$  на проміжку  $t \in [t_1; t_2]$ , виконаємо наступне перетворення в (23):

$$\omega_*(t_2 - t_1) = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} - I_*.$$

Звідки отримуємо:

$$\int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = I_* + 2\sqrt{\lambda} \omega (t - t_1) = \xi.$$

Тому, згідно з [9, с. 126]:

$$\frac{x}{a} = \lambda \left[ 1 - \sqrt{3} \frac{1 - \operatorname{cn}(\sqrt[4]{3}\xi, k)}{1 + \operatorname{cn}(\sqrt[4]{3}\xi, k)} \right]. \quad (25)$$

Якщо залежність  $x(t)$  (21) виражати через Атеб-

синус, то:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Sa \left[ 2, 1, \frac{3}{2} (J - \xi) \right]. \quad (26)$$

Отже, формули (25) або (26) дають можливість обчислювати переміщення розвантаженого осцилятора, коли  $0 \leq x \leq x_1$ .

**Приклад 4.** Обчислимо час повернення осцилятора в положення  $x = 0$ , коли  $\omega t_1 = 2$ . Для нього, по формулі (10), знаходимо  $x_1/a \approx 0,373$ ;  $a_*/a = \lambda = \sqrt[3]{x_1/a} \approx 0,720$ . Тоді,  $x_1/a_* \approx 0,518$ . Згідно з (19),  $\psi_* \approx \arccos 0,565 \approx 55,63^\circ$ . Інтерполяцією табличних даних в [10, с. 103] одержуємо  $F(\psi, k) \approx 1,151$  і по формулі (18) знаходимо  $I_* \approx 0,875$ . Подальший розрахунок по формулі (24) дає  $\omega t_2 \approx 2,311$ , тобто відношення  $t_2/t_1$  приблизно дорівнює 1,155. Максимальне відхилення осцилятора від положення  $x = 0$  становить  $a = \sqrt{3P/c}$ , при  $\omega t_* \approx 1,311$ . Як бачимо, осцилятор більше часу віддалявся від вихідного положення, ніж повертався до нього.

У вихідне положення  $x = 0$  осцилятор повертається зі швидкістю:

$$v_0 = -\sqrt{\frac{2c}{3m}} \sqrt{a_*^3} = -\sqrt{\frac{2c}{3m}} a \sqrt{x_1} = -\sqrt{\frac{2Px_1}{m}}$$

Якщо  $\omega t_1 = 2I$ , то згідно з (10)  $x_1 = 0$ . Тому, при цій тривалості імпульсу, осцилятор зробить лише один повний цикл коливань, бо повернеться в положення  $x = 0$  з нульовою швидкістю. Це означає, що далі він повністю припинить свій рух, спричинений силовим імпульсом.

Якщо  $|v_0| > 0$ , то осцилятор буде в стані вільних коливань. Формули для їх розрахунку виведено в [15] і тут їх виписувати не будемо. Лише зазначимо, що амплітуда  $a_0$  коливань, які проходять відносно положення  $x = 0$ , залежить від  $|v_0|$  і становить:

$$am(x) = a_0 = \sqrt[3]{\frac{3m v_0^2}{2c}} = a \sqrt{\frac{x_1}{a}} = \sqrt{a x_1}$$

Дослідження підтвердило, що тривалість імпульсу суттєво впливає на динаміку осцилятора. Залежність його коефіцієнта динамічності  $K_g = \max(x)/x_{CT}$  від  $t_1$  показана на рис. 2.

Тут, при  $\omega t_1 \geq I$ ,  $K_g = \sqrt{3}$ , тобто коефіцієнт динамічності має таке значення як і при дії, миттєво прикладеної сталої сили.

Про вплив часу  $t_1$  на амплітуди вільних коливань розвантаженого осцилятора, що проходять при  $t > t_1$  відносно положення  $x = 0$ , надана інформація на рис. 3.

Із графіка видно, що коли  $\omega t_1 = 2I$ , то амплітуда вільних коливань дорівнює нулю, тобто при  $t > t_1 = 2I_*$  осцилятор буде знаходитись в стані спокою.

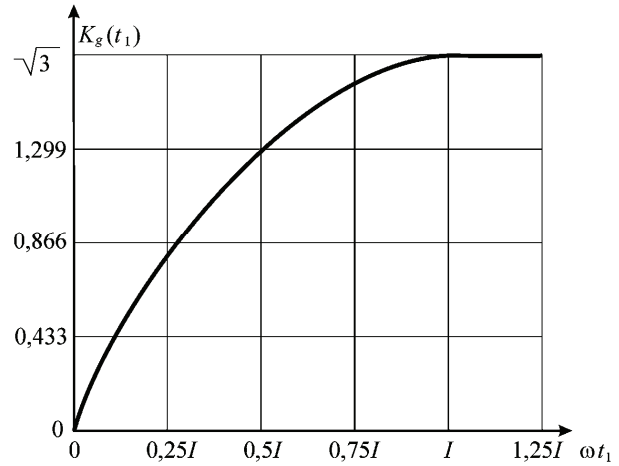


Рисунок 2 – Залежність коефіцієнта динамічності від тривалості імпульсу

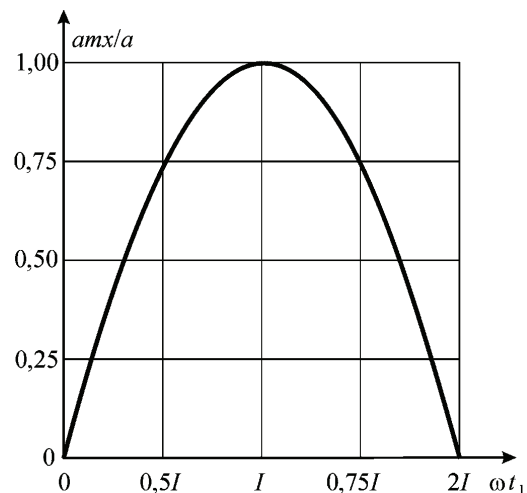


Рисунок 3 – Залежність амплітуд вільних коливань від тривалості імпульсу

**Висновки.**

1. Коефіцієнт динамічності квадратично-нелінійного осцилятора при дії миттєво прикладеної сталої сили (ступінчастого навантаження) дорівнює  $\sqrt{3}$ . Він менший, ніж у лінійного осцилятора.

2. Переміщення осцилятора суттєво залежать від тривалості силового імпульсу і виражаються через еліптичний косинус Якобі або через Атеб-синус. Це дає можливість проводити розрахунки за допомогою відомих таблиць або з використанням запропонованих апроксимацій.

3. Існує така тривалість дії силового імпульсу, при якій осцилятор робить лише один цикл коливань, а потім знаходиться в стані спокою.

**Список літератури:**

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А. А. Ларин. – Севастополь: Вебер, 2013. – 403 с.
2. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин // Том 1: Модели, методы, явления. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
3. Кузнецов А. П. Нелинейные колебания / А. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин. – М.: Физматлит, 2002. – 292 с.



4. Митропольський Ю. А. Избранные труды в 2-х томах / Ю. А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 2012. – 504 с.
5. Лукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П. Я. Лукач. – Львів: Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
6. Sveticanin L. A review on dynamics of mass variable system / L. Sveticanin // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6, № 1. – Pp. 56-74.
7. Ольшанський В. П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. – Х.: Міськдрук, 2014. – 264 с.
8. Ольшанський В. П. Динаміка дисипативних осциляторів / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тищенко. – Х.: Міськдрук, 2016. – 264 с.
9. Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев // Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
10. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
11. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
12. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
13. Грицик В. В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій / В. В. Грицик, М. А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – К.: 2007. – № 12. – С. 37-42.
14. Сокил Б. І. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ / Б. І. Сокил // Доповіді Національної академії наук України. – К.: 1997. – № 1. – С. 55-58.
15. Ольшанський В. П. Про коливання осцилятора з квадратично-нелінійною жорсткістю / В. П. Ольшанський, В. В. Бурлака, М. В. Спіпченко, О. М. Малець // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. – Х.: 2017. – № 8. – С. 177-185.

**References (transliterated):**

1. Larin A. A. Ocherki istorii razvitiya teorii mehanicheskikh kolebanij. Sevastopol: Veber, 2013. 403 p.
2. Avramov K. V., Mihlin Ju. V. Nelinejnaja dinamika uprugih sistem. Tom 1: Modeli, metody, javlenija. Moscow-Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2010. 704 p.
3. Kuznecov A. P., Ryskin N. M. Nelinejnye kolebanija. Moscow: Fizmatlit, 2002. 292 p.
4. Mitropol'skij Ju. A. Izbrannye trudy v 2-h tomah. Kyiv: Naukova dumka, 2012. 504 p.
5. Pukach P. Ja. Jakisni metodi doslidzhennja nelinejnih kolival'nih sistem. L'viv: L'viv's'ka politehnika, 2014. 288 p.
6. Sveticanin L. A review on dynamics of mass variable system. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2012. Vol. 6, No 1. Pp. 56-74.
7. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Metod VBK v raschetah nestacionarnykh kolebanij oscilljatora. Kharkiv: Mis'kdruk, 2014. 264 p.
8. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V., Tishenko L. M. Dinamika disipativnykh osciljatoriv. Kharkiv: Mis'kdruk, 2016. 264 p.
9. Prudnikov A. P., Brychkov A., Marichev O. I. Integraly i rjady. Jelementarnye funkci. Moscow: Nauka, 1981. 800 p.
10. Janke E., Jemde F., Ljosh F. Special'nye funkci. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.
11. Abramovits A., Stigan I. Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.
12. Korn G., Korn T. Handbook of Mathematics (for scientific workers and engineers). Moscow: Science, 1974. 832 p.
13. Gricik V. V., Nazarkevich M. A. Matematichni modeli algoritmv i realizacija Ateb-funkcij. Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraini. Kyiv: 2007. No 12. Pp. 37-42.
14. Sokil B. I. Pro zastosuvannja Ateb-funkcij dlja pobudovi rozvjazkiv dejakih rivnjan', jaki opisujut' nelinejni kolivannja odnovimirnykh seredovishh. Dopovidi Nacional'noi akademii nauk Ukraini. Kyiv: 1997. No 1. Pp. 55-58.
15. Olshanskiy V. P., Burlaka V. V., Spipchenko M. V., Malets O. M. About the collusion of the oscillator in a quadratically-nonlinear confinement. Technical services of the agro-industrial, forest and transport complex. Kharkiv: 2017. No 8. Pp. 177-185.

Надійшла (received) 21 .09.2017

*Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions*

- Коливання квадратично-нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2017. – № 39 (1261). – С. 62-67. – Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2078-9130.**
- Колебания квадратично-нелинейного осциллятора, вызванные импульсным нагружением / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2017. – № 39 (1261). – С. 62-67. – Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2078-9130.**
- Oscillations of a quadratic-nonlinear oscillator caused by a pulsed voltage / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – С. 62-67. – Bibliogr.: 15. – ISSN 2078-9130.**

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри фізики і теоретичної механіки, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри і фізики, теоретической механики, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Olshanskiy Vasyly Pavlovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Professor at the Department of Physics and Theoretical Mechanics, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, tel. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанський Станіслав Васильович** – кандидат фіз.-мат. наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П. Василенка, м. Харків, тел.: (057) 343-29-41, email: stasolsh77@gmail.com.

**Ольшанский Станислав Васильевич** – кандидат физ.-мат. наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко, г. Харьков, тел.: (057) 343-29-41, email: stasolsh77@gmail.com.

**Olshanskiy Stanislav Vasilevich** – Phd in physics and mathematics, Kharkiv Petro Vasilenko National Technical University of Agriculture, Kharkiv, tel.: (057) 343-29-41, email: stasolsh77@gmail.com.