УДК 534.1:539.3 DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2017.39.115767

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, В.В. БУРЛАКА, М.В. СЛІПЧЕНКО, О.М. МАЛЕЦЬ

ПРО КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З КУБІЧНО-НЕЛІНІЙНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Розглянуто вільні коливання системи з одним ступенем вільності за умови, що відновлююча сила пружини пропорційна кубу її деформації. Задіяно дві форми аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння. В першій формі розв'язок виражено через еліптичний косинус, а в другий – через періодичні Ateb-функції. Складено таблиці для обчислень значень цих функцій і побудовано в безрозмірних координатах графіки, які спрощують розрахунки переміщень осцилятора у часі. Виведено формули для обчислення періодів коливань при наданні осцилятору початкового відхилення від положення рівноваги або початкової швидкості (миттєвого імпульса) в цьому положенні. Наведено приклади розрахунків з використанням відомих таблиць неповного еліптичного інтеграла першого роду та з використанням складеної таблиці періодичних Ateb-функцій.

Ключові слова: кубічно-нелінійний осцилятор, вільні коливання, еліптичний косинус, Ateb-функції, їх апроксимація.

Рассмотрены свободные колебания системы с одной степенью свободы при условии, что восстанавливающая сила упругости пружины пропорциональна кубу ее деформации. Использовано две формы аналитического решения нелинейного дифференциального уравнения. В первой форме решение выражено через эллиптический косинус, а во второй – через ппериодические Ateb-функции. Составлены таблицы для вычислений значений этих функций и построены в безразмерных координатах графики, которые упрощают расчеты перемещений осциллятора во времени. Выведены формулы для вычисления периодов колебаний при сообщении осциллятору начального отклонения от положения равновесия или начальной скорости (мгновенного импульса) в этом положении. Приведены примеры расчетов с использованием известных таблиц неполного эллиптического интеграла первого рода и с использованием составленной таблицы периодических Ateb-функций.

Ключевые слова: кубически-нелинейный осциллятор, свободные колебания, эллиптический косинус, Ateb-функции, их аппроксимация.

Free oscillations of a system with one degree of freedom are considered under the condition that the restoring force of spring elasticity is proportional to the cube of its deformation. Two forms of analytical solution of the nonlinear differential equation are used. In the first form, the solution is expressed in terms of an elliptic cosine, and in the second, through periodic Ateb-functions. The tables for calculating the values of these functions are constructed and plotted in dimensionless graphs coordinates, which simplify the calculations of the oscillator movements in time. Formulas are derived for calculating the oscillation periods when the oscillator sends the initial deviation from the equilibrium position or the initial velocity (instantaneous pulse) in this position. Examples of calculations using known tables of an incomplete elliptic integral of the first kind and using a compiled table of periodic Ateb functions are given.

Keywords: square-nonlinear oscillator, free vibrations, elliptic cosine, Ateb-function, approximation.

Вступ. Нелінійні коливання з великими амплітудами можуть спричинити руйнування елементів конструкцій або порушити їх працездатність. Тому дослідження нелінійних коливань механічних систем відноситься до актуальних задач. Їм присвячено публікації багатьох авторів. Серед них відзначимо монографічні видання останніх років українських вчених[1, 2], де є відповідні огляди літературних джерел. Про історію розвитку теорії нелінійних коливань йдеться в [3]. Тут проводимо порівняння класичного розв'язку задачі динаміки в еліптичних функціях Якобі з порівняно новими формами розв'язку в періодичних Ateb-функціях [2, 4].

Метою статті є спрощення розрахунку вільних коливань суттєво нелінійного осцилятора з використанням аналітичних розв'язків рівняння руху в спеціальних функціях та встановлення зв'язку між двома формами цих розв'язків.

Викладення основного матеріалу. Коливальні переміщення $x(t)$ у часі t матеріальної точки масою m описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^3 = 0, \tag{1}$$

де $c > 0$ – характеризує жорсткість пружини осцилятора.

Розглянемо два варіанти початкових умов при $t = 0$:

$$\begin{aligned} &а)\ x(0) = -a,\ \dot{x}(0) = 0, \\ &б)\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = \upsilon_0. \end{aligned} \tag{2}$$

У першому рух осцилятора спричинений початковим відхиленням осцилятора вліво на a (проти вісі Ox) від положення рівноваги $x = 0$, а у другому початковою швидкістю υ_0 у цьому положенні.

Уведенням позначень $\dot{x} = \upsilon$, $\ddot{x} = \upsilon \dfrac{d\upsilon}{dx}$, рівнянню (1) надаємо форму:

$$\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} + \frac{c}{m} x^3 = 0. \tag{3}$$

Провівши інтегрування в (3), отримуємо вираз швидкості, при русі осцилятора зліва вправо, в напрямі вісі Ox:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \sqrt{c_1 - \frac{c}{2m} x^4}. \tag{4}$$

Тут c_1 – довільна стала.

1. Розглянемо спочатку коливання, спричинені початковим відхиленням осцилятора, коли при

$x=-a,\ \upsilon=0$. Для цих початкових умов $c_1=\dfrac{c}{2m}a^4$. Тоді з (4) випливає, що:

$$\sqrt{\frac{c}{2m}}dt=\frac{dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$$

Інтегруванням цього виразу отримуємо:

$$\omega t=\tau=\int_{-x/a}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}. \tag{5}$$

Тут $\omega=a\sqrt{\dfrac{c}{2m}}$

Інтеграл в правій частині (5) виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду $F(\varphi,k)$. Згідно з [5, с. 96]:

$$\sqrt{2}\tau=F(\varphi,k),$$

причому $(-x/a)=\cos\varphi$; $k=\sin 45°$.

В теорії еліптичних функцій Якобі прийнято, що [5, с. 103]:

$$\cos\varphi=\mathrm{cn}\left(\sqrt{2}\tau,k\right).$$

Тому:

$$x=x(t)=-a\cdot\mathrm{cn}\left(\sqrt{2}\tau,k\right), \tag{6}$$

де $\mathrm{cn}\left(\sqrt{2}\tau,k\right)$ – еліптичний косинус.

Вираз (6) дає можливість знайти період коливань осцилятора T, оскільки:

$$\frac{\omega T}{4}=I=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Згідно з [5, с. 53], значення I виражається через Гама-функцію $\Gamma(z)$ за формулою:

$$I=\sqrt[4]{4}\,\frac{\Gamma^2(5/4)}{\Gamma(3/2)}.$$

Враховуючи, що [5, с. 52]: $\Gamma(5/4)\approx 0{,}9064025$; $\Gamma(3/2)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$, одержуємо:

$$I\approx 1{,}311029;\ T=\frac{4I}{\omega}\approx 7{,}41630\frac{1}{a}\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Виведена формула T співпадає з надрукованою в роботі [6, с. 73]. Період коливань обернено пропорційний модулеві початкового відхилення осцилятора від положення $x=0$, тобто порушується ізохорність коливань.

Формула (6) має можливість при обчисленні $x(t)$ користуватись таблицями неповного еліптичного інтеграла, надрукованими в [5, с. 102] або [7, с. 429].

Розглянемо приклад. Нехай параметри системи такі, що в деякий момент часу $\tau=0{,}7$. Тоді $\sqrt{2}\tau\approx 0{,}990$. В таблиці в [5, с. 102] знаходимо, що при $k=1/\sqrt{2}$ цьому значенню τ відповідає $\varphi=53°$. Для нього $\cos\varphi\approx\mathrm{cn}\left(\sqrt{2}\tau;k\right)\approx 0{,}602$. Отже, згідно з (6) $x/a\approx -0{,}602$.

З метою спрощення розрахунку $x(t)$, для початкових умов а) в (2), на рис. 1 наведено графік в безрозмірних координатах τ, x/a. Його треба продовжити симетрично вправо відносно вертикалі $\tau=2{,}622$ до значення $\tau=5{,}244$, де (завершується перший цикл коливань).

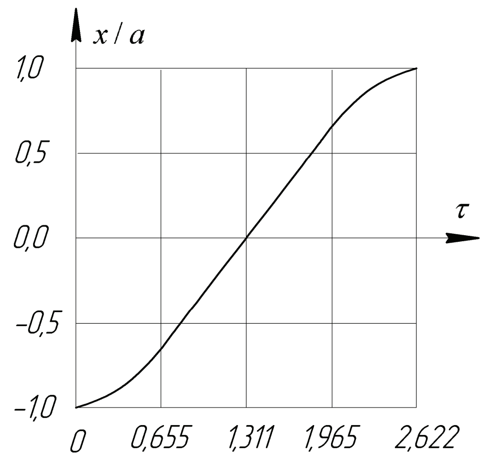

Рисунок 1 – До розрахунку коливань при $x(0)=-a,\ \dot{x}(0)=0$

2. У випадку початкових умов б) в (2), при русі осцилятора вправо на проміжку $x\in[0;a_*]$, стала інтегрування c_1 в (4) приймає значення $c_1=\upsilon_0^2$. Тоді, по аналогії з (5):

$$\omega_* t=\tau_*=\int_0^{x/a_*}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}. \tag{7}$$

Тут $\omega_*=\sqrt[4]{\dfrac{c}{2m}\upsilon_0^2}$; $a_*=\sqrt[4]{\dfrac{2m\upsilon_0^2}{c}}$.

Враховуючи, що:

$$\int_0^{x/a_*}\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}-\int_{x/a_*}^1\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}=I-\int_{x/a_*}^1\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}=\tau_*,$$

приходимо до розрахункової формули:

$$x=a_*\,cn\left(\sqrt{2}\left(I-\tau_*\right),k\right), \tag{8}$$

де, як і раніше, $k=\sin 45°$.

У відповідності з (7), для обчислення періода коливань T_*, маємо:

$$\frac{\omega_* T_*}{4}=I_*\Rightarrow T_*=\frac{4I_*}{\omega_*}\approx 6{,}23634=\sqrt[4]{\frac{m}{c\upsilon_0^2}}.$$

Період коливань залежить від наданої осцилятору початкової швидкості. Він обернено пропорційний квадратному кореневі з цієї швидкості.

Для розрахунку $x(t)$ за формулою (8) теж можна використовувати таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду.

Розглянемо приклад. Нехай параметри осцилятора такі, що в деякий момент часу $\tau_*=0{,}5$. Тоді $I-\tau_*\approx 0{,}811;\sqrt{2}\left(I-\tau_*\right)\approx 1{,}147$ і в таблиці [5, с. 102] для цього аргументу $\varphi=60°$, $\cos\varphi\approx\mathrm{cn}\left(1{,}147;\sin 45°\right)\approx 0{,}5$. Отже, згідно з (8) $x/a\approx 0{,}5$.

З метою спрощення розрахунків коливань осцилятора спричинених початковим імпульсом, на рис. 2 подано графік в безрозмірних координатах τ_*, x/a_*. Для поширення на один цикл коливань, цей графік слід продовжити вправо антисемитрично відносно вертикалі $\tau_* = 2{,}622$ до значення $\tau_* = 5{,}244$, де $x/a_* = 0$.

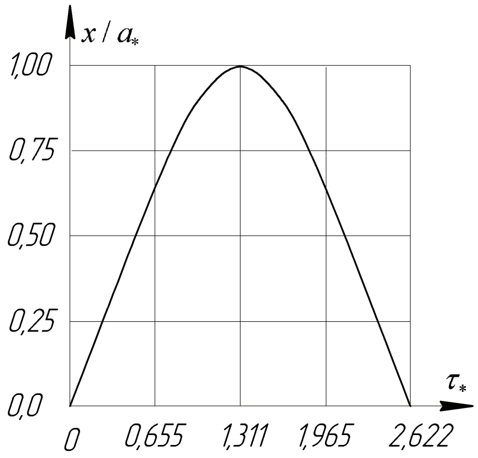

Рисунок 2 – До розрахунку коливань при $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=\upsilon_0$

Зазначимо, що, крім наданої тут графічної інформації, в наближених розрахунках руху осцилятора можна використовувати також графіки еліптичного косинуса $\mathrm{cn}\left(\eta, 1/\sqrt{2}\right)$, що є в [7, 8].

Далі розглянемо більш сучасні розв'язки рівняння (1), які розвиває Львівська школа математики і механіки [2, 8-11].

Співвідношення (5), одержане для початкових умов а) в (2), є окремим випадком більш загального виразу:

$$\frac{\nu+1}{2}\int\limits_{0\le\zeta\le 1}^{1}\frac{du}{\left(1-u^{\nu+1}\right)^{n/(n+1)}}=q. \qquad (9)$$

Формули (5) і (9) співпадають коли: $\zeta = -x/a$; $\nu = 3$; $n = 1$; $q = 2\tau$.

Згідно з [2, 4], нижня границя інтегрування в (9) є так званим Ateb-косинусом, що позначають наступним чином:

$$\zeta = Sa\left(\nu, n, q\right).$$

Тому, стосовно нашої задачі, коли при $x = -a$, $\upsilon = 0$, маємо:

$$x = -a\,Ca\left(3, 1, 2\tau\right). \qquad (10)$$

Співвідношення (7), яке одержано при початкових умовах б) в (2), є окремим випадком більш загального виразу:

$$\frac{\nu+1}{2}\int\limits_{0}^{0\le\zeta\le 1}\frac{du}{\left(1-u^{\nu+1}\right)^{n/(n+1)}}=q. \qquad (11)$$

Він переходить в (7), коли $\zeta = -x/a_*$; $\nu = 3$; $n = 1$; $q = 2\tau_*$.

Згідно з [2, 4], верхня межа інтегрування в (11) називається Ateb-синусом, який позначають наступним чином:

$$\zeta = Sa\left(\nu, n, q\right). \qquad (12)$$

Тому із (7), (11), (12) випливає, що:

$$x = a_*\,Sa\left(3, 1, 2\tau_*\right). \qquad (13)$$

Щоб спростити розрахунки за формулами (10), (13), було складено таблиці, задіяних тут періодичних Ateb-функцій.

Таблиця 1 – Значення періодичних Ateb-функцій

η	$Sa(3,1,2\eta)$	$Ca(3,1,2\eta)$	η	$Sa(3,1,2\eta)$	$Ca(3,1,2\eta)$
0,00	0,000	1,000	0,70	0,684	0,603
0,05	0,050	0,997	0,75	0,727	0,556
0,10	0,100	0,990	0,80	0,769	0,507
0,15	0,150	0,978	0,85	0,808	0,459
0,20	0,200	0,961	0,90	0,844	0,410
0,25	0,250	0,939	0,95	0,878	0,360
0,30	0,300	0,914	1,00	0,908	0,311
0,35	0,350	0,884	1,05	0,934	0,261
0,40	0,399	0,852	1,10	0,957	0,211
0,45	0,448	0,816	1,15	0,974	0,161
0,50	0,497	0,777	1,20	0,988	0,111
0,55	0,545	0,736	1,25	0,996	0,061
0,60	0,592	0,693	1,311	1,000	0,000
0,65	0,639	0,648	-	-	-

Звернемось до розглянутих вище прикладів і проведемо заново розрахунки на підставі розв'язків (10) і (13) та складеної табл. 1.

У першому прикладі $\tau = \eta = 0{,}7$. У табл. 1 для цього τ маємо $Ca(3,1,2\eta) = 0{,}603$. Отже, згідно з (10), $x/a = -0{,}603$, що добре узгоджується з одержаними раніше результатом, де $x/a = -0{,}602$.

У другому прикладі $\tau_* = \eta = 0{,}5$. У таблиці цього τ_* знаходимо, що $Sa(3,1,2\tau_*) = 0{,}497$. Тому згідно з (13) $x/a = 0{,}497$, що мало відхиляється від значення $x/a \approx 0{,}5$, одержаного раніше іншим способом.

При наближених обчисленнях значень, задіяних тут періодичних Ateb-функцій, можна також використати апроксимацію:

$$Sa\left(3,1,2\eta\right)=\begin{cases}\eta & 0\le\eta<0{,}6\\ 0{,}088+0{,}84\eta & \text{при } 0{,}6\le\eta\le 0{,}9\\ 1-0{,}924\left(1{,}311-\eta\right)^2 & 0{,}9<\eta\le 1{,}311.\end{cases} \qquad (14)$$

При цьому слід прийняти до уваги, що:

$$Ca\left[3,1,2\left(I-\eta\right)\right]=Sa\left(3,1,2\eta\right).$$

Похибка апроксимації (14) менша 1,5 %. В цьому переконує табл. 2, якщо порівняти записані в ній значення $Sa(3,1,2\eta)$, з тими, що вказані в табл. 1.

Таблиця 2 – Апроксимовані значення

η	0,00	0,60	0,75	0,9	1,10	1,311
$Sa(3,1,2\eta)$	0,000	0,592	0,718	0,844	0,959	1,000

Висновки. При коливаннях, спричинених початковим відхиленням осцилятора від положення рівноваги, період коливань обернено пропорційний модулю цього відхилення. Якщо коливання спричинені початковим імпульсом в положенні рівноваги, то період коливань обернено пропорційний квадратному кореневі з початкової швидкості. В околі положення рівноваги $|x| < 0{,}5a$ рух осцилятора наближено можна вважати рівномірним, тобто таким, що відбувається зі сталою швидкістю. Періодичні Ateb-функції, які описують рух розглянутого осцилятора, виражаються через еліптичний косинус.

Список літератури:

1. *Аврамов К.В.* Нелинейная динамика упругих систем Т.1. Модели, методы, явления / *К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин.* – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.

2. *Пукач П.Я.* Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / *П.Я. Пукач.* – Львів: Львівська політехніка, 2014. – 288 с.

3. *Ларин А.А.* Очерки истории развития теории механических колебаний / *А.А. Ларин.* – Севастополь: Вебер, 2013. – 403 с.

4. *Грицик В.В.* Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функції / *В.В. Грицик, М.А. Назаркевич* // Доповіді Національної академії наук України. – 2007. – № 12. – С. 37-42.

5. *Янке Е.* Специальные функции / *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш.* – М.: Наука, 1977. – 344 с.

6. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара / *Я.Г. Пановко.* – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

7. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицам) / *А. Абрамовиц, И. Стиган.* – М.: Наука, 1979. – 832 с.

8. *Корн Г.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / *Г. Корн, Т. Корн.* – М.: Наука, 1974. – 832 с.

9. *Сеник П.М.* Про Ateb-функції / *П.М. Сенник* // Доповіді АН УРСР, сер. А. – 1968. – № 1. – С. 23-27.

10. *Возний А.М.* Застосування Ateb-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь / *А.М. Возний* // Доповіді АН УРСР, сер. А. – 1970. – № 9. – С. 971-974.

11. *Сокіл Б.І.* Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ / *Б.І. Сокіл* // Доповіді Національної академії наук України. – 1997. – № 1. – С. 55-58.

References (transliterated):

1. Avramov K.V., Mikhlin Yu.V. Nelineynaya dinamika uprugikh sistem T.1. Modeli, metody, yavleniya [Nonlinear dynamics of elastic systems. T.1. Models, methods, phenomena]. Moscow-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2010. 704 p.

2. Pukach P.Ya. Yakisni metody doslidzhennya neliniynykh kolyval'nykh system [Qualitative methods of nonlinear vibration systems]. L'viv: L'vivs'ka politekhnika, 2014. 288 p.

3. Larin A.A. Ocherki istorii razvitiya terii mekhanicheskikh kolebaniy [Essays on the history of the development of the theory of mechanical oscillations]. Sevastopol': Veber, 2013. 403 p.

4. Hrytsyk V.V., Nazarkevych M.A. Matematychni modeli alhorytmiv i realizatsiya Ateb-funktsiyi [Mathematic models of algorithms and realizations of Ateb-functions]. Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny. 2007. No 12. PP. 37-42.

5. Yanke E., Emde F., Lesh F. Spetsial'nye funktsii [Special functions]. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

6. Panovko Ya.G. Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara [Fundamentals of Applied theory of vibrations and shock]. Leningrad: Mashinostroenie, 1976. 320 p.

7. Abramovits A., Stigan I. Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsam) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow: Nauka, 1979. 832 p.

8. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov) [A handbook on mathematics (for scientists and engineers)]. Moscow: Nauka, 1974. 832 p.

9. Senyk P.M. Pro Ateb-funktsiyi [About Ateb-function]. Dopovidi AN URSR, ser. A. 1968. No 1. PP. 23-27.

10. Voznyy A.M. Zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv''yazku odnoho klasu istotno neliniynykh dyferentsial'nykh rivnyan'[Application Ateb-function solution for building a class of essentially nonlinear differential equations]. Dopovidi AN URSR, ser. A. 1970. No 9. PP. 971-974.

11. Sokil B.I. Pro zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovy rozv''yazkiv deyakykh rivnyan', yaki opysuyut' neliniyni kolyvannya odnovymirnykh seredovyshch [About Ateb-use features for building solutions of some equations describing nonlinear oscillations of one-dimensional environments]. Dopovidi Natsional'noyi akademiyi nauk Ukrayiny. 1997. No 1. PP. 55-58.

Надійшла (received) 23.05.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Про коливання осцилятора з кубічно-нелінійною жорсткістю / В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Сліпченко, О.М. Малець // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 57-61. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.

О колебаниях осциллятора с кубически-нелинейной жесткостью / В.П. Ольшанский, В.В. Бурлака, М.В. Слипченко, О.Н. Малец // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 57-61. – Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2078-9130.

On oscillations of an oscillator with cubic-nonlinear stiffness / V.P. Olshanskiy, V.V. Burlaka, M.V. Slipchenko, O.M. Malec // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 39 (1261). – С. 57-61. – Bibliogr.: 11. – ISSN 2078-9130.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, кафедра фізики, теоретичної механіки і деталей машин, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Ольшанский Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра физики, теоретической механики и деталей машин, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Olshanskiy Vasyl Pavlovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Department of Physics, Theoretical Mechanics and Parts of Machines, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

Бурлака Володимир Васильович – кандидат технічних наук, доцент, кафедра фізики, теоретичної механіки і деталей машин, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел.: (050) 526-51-69, e-mail: VVBurlaka@ukr.net.

Бурлака Владимир Васильевич – кандидат технических наук, доцент, кафедра физики, теоретической механики и деталей машин, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: VVBurlaka@ukr.net.

Burlaka Volodymyr Vasilovych – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor at the Department of Physics, Theoretical Mechanics and Parts of Machines, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, тел.: (066) 010-09-55, e-mail: VVBurlaka@ukr.net.

Сліпченко Максим Володимирович кандидат технічних наук, доцент, кафедра фізики, теоретичної механіки і деталей машин, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел.: (066) 712-09-89, e-mail: Slipchenko_M@ukr.net.

Слипченко Максим Владимирович – кандидат технических наук, доцент, кафедра физики, теоретической механики и деталей машин, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, тел.: (066) 712-09-89, e-mail: Slipchenko_M@ukr.net.

Slipchenko Maksym Volodymyrovych Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor at the Department of Physics, Theoretical Mechanics and Parts of Machines, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, тел.: (066) 712-09-89, e-mail: Slipchenko_M@ukr.net.

Малець Ольга Миколаївна – аспірант, кафедра фізики, теоретичної механіки і деталей машин, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел.: (099) 216-21-24, e-mail: Lelikmalec@ukr.net.

Малец Ольга Николаевна – аспирант, кафедра физики, теоретической механики и деталей машин, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко, тел.: (099) 216-21-24, e-mail: Lelikmalec@ukr.net.

Malec Olga Mykolayivna – Postgraduate student at the Department of Physics, Theoretical Mechanics and Parts of Machines, Petro Vasilenko Kharkiv National Technical University of Agriculture, тел.: (099) 216-21-24, e-mail: Lelikmalec@ukr.net.