

**Д.В. ЛАВІНСЬКИЙ**

## МАГНІТОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ТІЛА ІЗ ПОРОЖНИНОЮ

Розглядається задача магнітопружного деформування тіла нескінченних розмірів із порожниною за рахунок магнітострикції, яке знаходиться у стаціонарному однорідному магнітному полі. Наведена математична постановка задачі. В якості чисельного методу обрано метод скінчених елементів. Одержані результати, щодо розподілу тензорних компонент, які описують процес деформування. Порівняння чисельних результатів в околі порожнини із результатами аналітичного розв'язку, дозволили зробити висновок про можливість застосування методу скінчених елементів для аналізу магнітопружного деформування тіл із неоднорідністю структури.

**Ключові слова:** електромагнітне поле, магнітопружне деформування, магнітострикція, метод скінчених елементів.

Рассматривается задача магнитоупругого деформирования тела бесконечных размеров с полостью за счет магнитоstriction, которое находится в стационарном однородном магнитном поле. Представлена математическая постановка задачи. В качестве численного метода выбран метод конечных элементов. Получены результаты, иллюстрирующие распределение тензорных компонент процесса деформирования. Сравнение численных результатов в окрестности полости с результатами аналитического решения, позволили сделать вывод о возможности использования метода конечных элементов для анализа магнитоупругого деформирования тел с неоднородностью структуры.

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, магнитоупругое деформирование, магнитоstriction, метод конечных элементов.

We consider the problem of magneto-elastic deformation of an infinite size body with the cavity due to magnetostriction. A ferromagnetic body is placed in a stationary homogeneous magnetic field. Mathematical formulation of the problem is presented. The finite element method was chosen as the numerical method for the analysis of the distribution of the vector component of the electromagnetic field and the tensor component of the deformation process. The results, which illustrate the distribution of the tensor component of the forming process, were obtained. Comparison of the numerical results in the vicinity of the cavity with the results of analytical solutions allowed us to conclude about the possibility of using the finite element method for the analysis of magneto-elastic deformation of bodies with heterogeneity of structure.

**Keywords:** electromagnetic field, magneto-elastic deformation, magnetostriction, finite element method.

**Вступ.** Електромагнітне поле (ЕМП) є невід'ємною умовою роботи для безлічі елементів конструкцій і машин. Високоінтенсивні ЕМП призводять до виникнення значних рівнів енергії в електропровідних тілах, що може призводити до їх руйнування. Даний факт робить необхідним створення методів визначення напружено-деформованого стану (НДС) електропровідних тіл для подальшої оцінки їх працездатності.

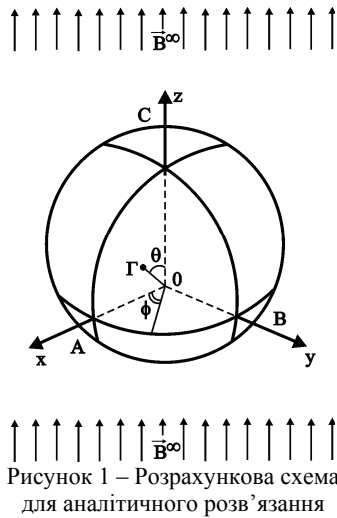
Проблеми врахування зв'язаних полів постають при розв'язанні задач у рамках: теорії п'єзоелектрики (п'єзомагнетизма і п'єзонепровідності) тіл завдяки широкому використанню електромеханічних перетворювачів енергії; теорії магнітопружності, яка досліджує механічну поведінку (зокрема, стійкість та міцність) електропровідного тіла в сильному магнітному полі; теорії поширення хвиль в деформованому тілі з урахуванням зв'язку між механічними і електромагнітними полями (для проблем геофізики і сейсмології).

Вплив ЕМП на електропровідне тіло може моделюватись за допомогою введення електромагнітних сил та моментів. Рівні сил, які викликаються «магнітною» складовою ЕМП є набагато вищими ніж ті, які викликаються «електричною» складовою. Тому, для задач, в яких головною метою є оцінювання конструктивної міцності основою може служити теорія магнітопружності. Також магнітопружне деформування може спостерігатись у випадку магнітострикції, коли феромагнітні тіла деформуються, знаходячись у магнітному полі.

Основи теорії магнітопружності з урахуванням ефектів зв'язаності ЕМП і механічних полів напружень і деформацій в рухомому електропровідному тілі (у загальному випадку тіло є поляризованим і таким, що намагнічується), були закладені в роботах Кнопфа і Чадвіка [1,2]. Вони розглядали поширення пружних хвиль з урахуванням магнітного поля Землі. Відзначимо, що існуючи аналітичні та напіваналітичні методи розв'язання задач деформування електропровідних тіл за наявності ЕМП добре розроблені лише для тіл канонічної форми. Вони можуть використовуватись при аналізі реальних конструкцій лише як оціночні. Також слід відзначити, що лише у малій кількості літературних джерел розглядаються питання створення методів аналізу або оцінювання конструктивної міцності тіл підданих впливу ЕМП. Таким чином, створення ефективних методів аналізу пружно-пластичного деформування електропровідних складених тіл з метою подальшого оцінювання їхньої конструктивної міцності є актуальною науково-практичною проблемою.

Окремий клас задач розглядає деформування неоднорідних тіл підданих дії ЕМП. Неоднорідність може бути обумовлена як наявністю вкраплень різних матеріалів так і порожнинами, які заповнені повітрям. У багатьох випадках порожнини у матеріалі мають місце при розгляді ізоляційних конструкцій, які є важливою складовою частиною різноманітних струмопровідних об'єктів. Вочевидь, неоднорідність структури тіла призводить до неоднорідності розподілу ком-

понент, що описують процес деформування, в свою чергу це викликає певні труднощі при розв'язанні. Таким чином, якщо для аналізу деформування застосовуються чисельні методи, вони повинні адекватно описувати різноманітні неоднорідності структури тіла.



**Постановка задачі.** Повна математична постановка задачі пружно-пластичного деформування тіл під дією ЕМП надана у роботах [3,4], там же розглядаються питання створення ефективного чисельного методу на основі МСЕ для аналізу подібного деформування.

У даній роботі розглянемо магнітопружне деформування нескінченного тіла із сферичною порожниною, яке знаходиться у стаціонарному однорідному магнітному полі (рис.1), тобто деформування уданому випадку є наслідком явища магнітострикції. Математичну постановку задачі та аналітичний розв'язок надано у роботі [5]. У цьому випадку векторні компоненти ЕМП та тензорні компоненти, що описують процес деформування піддані наступним співвідношенням:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}^e = 0; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^e = 0; \\ \vec{B} &= \mu_0(1 + \chi)\vec{H}; \quad \vec{B}^e = \mu_0\vec{H}^e; \\ (\sigma'_{ij} + \sigma^M_{ij})_i &= 0; \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \mu_0\chi H_i H_j; \\ \sigma^M_{ij} &= \mu_0(1 + \chi)H_i H_j - \frac{1}{2}\mu_0\delta_{ij}H_k H_k. \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\vec{H}, \vec{B}, \vec{H}^e, \vec{B}^e$  – вектори напруженості магнітного поля та магнітної індукції у матеріалі тіла та у вакуумі;  $\mu_0$  – магнітна проникність вакууму,  $\chi$  – параметр намагнічування;  $\sigma'_{ij}, \sigma^M_{ij}$  – компоненти тензорів напружень та натягнень Максвелла;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $i, j, k = 1...3$ . Ці співвідношення доповнюються граничними умовами:

$$\begin{aligned} B_r &= 0; \quad H_\theta = H_\phi = 0; \quad B|_{r \rightarrow \infty} = B^\infty; \\ \sigma'_{rr} + \sigma^M_{rr} &= 0; \quad \sigma'_{r\theta} + \sigma^M_{r\theta} = 0; \quad \sigma'_{r\phi} + \sigma^M_{r\phi} = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

тут  $B^\infty$  – значення магнітної індукції на значному віддаленні від порожнини. Розв'язок поставленої задачі має вигляд:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r^3} \left( \begin{aligned} &-C(5 - \nu)(3\cos 2\theta + 1) + 2D_0 + \\ &+ \frac{3D(3\cos 2\theta + 1)}{r^2} \end{aligned} \right); \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2r^3} \left( \begin{aligned} &C(3(1 - 2\nu)\cos 2\theta + (3 - 2\nu)) - 2D_0 - \\ &- \frac{3D(7\cos 2\theta + 1)}{2r^2} \end{aligned} \right);$$

$$C = \frac{5\chi r_0^3 (B^\infty)^2}{3\mu_0(1 + \chi)^2(7 - 5\nu)} \left( 1 - \frac{5\chi + 6}{2(2\chi + 3)^2} \right);$$

де

$$D = -\frac{\chi r_0^3 (B^\infty)^2}{3\mu_0(1 + \chi)^2} \left( 1 + \frac{5\chi + 6}{4(2\chi + 3)^2} \right);$$

$$D_0 = \frac{2\chi r_0^5 (B^\infty)^2}{\mu_0(1 + \chi)^2(7 - 5\nu)} \left( 1 - \frac{5\chi + 6}{2(2\chi + 3)^2} \right);$$

Розглянемо чисельний розв'язок цієї задачі, для чого, по-перше, застосуємо векторний магнітний потенціал  $\vec{A}$ , та одержимо наступні співвідношення для компонент ЕМП:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0. \quad (4)$$

Розв'язок відшукуємо з умови:

$$\delta E = \delta U + \delta W = 0, \quad (5)$$

де  $U$  – енергія пружного деформування,  $W$  – енергія ЕМП. Вирази для енергій наведені, наприклад, у [3]. Зводимо задачу до вісесиметричної розрахункової схеми – рис. 2. На віддаленні від порожнини задаємо граничні умови для відповідних компонент векторного магнітного потенціалу та переміщень. В якості базового обираємо вісесиметричний чотирьохвузловий скінчений елемент (СЕ) із білінійною апроксимацією переміщень та компонент векторного магнітного потенціалу, подібні елементи зручно використовувати для розрахунку та аналізу зв'язаного деформування за умов дії ЕМП [6-8]

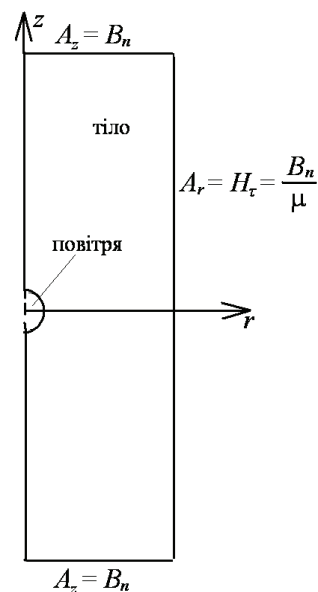


Рисунок 2 – Розрахункова схема для чисельного розв'язання

**Аналіз результатів.** Розрахунки проводились для наступних даних:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left( \frac{H}{A^2} \right); \nu = 0,294;$

$\chi = 121,9$ ;  $B^\infty = 1(\text{Тл})$ ;  $E = 2 \cdot 10^{11}(\text{Па})$ . З метою встановлення адекватних розмірів моделі, за яких вона могла б вважатись нескінченним тілом, варіювались розміри тіла відносно до радіуса порожнини  $r_0$ , початковий вертикальний розмір (уздовж координати  $z$ ) обирався рівним  $5 r_0$ , радіальний розмір –  $3 r_0$ . Було проведено серію розрахунків, у яких послідовно збільшувались розміри тіла на  $r_0$ . У випадку, коли вертикальний розмір досягнув величини  $15 r_0$ , а радіальний дорівнював  $9 r_0$ , максимальна відмінність результатів у порівнянні із попереднім розрахунком не перевищувала 3 %, що розглядалось як прийнятний результат. Порівнювались значення компонент векторного магнітного потенціалу (максимальна розбіжність спостерігалась в точках наближених до границі порожнини).

Після цього варіювались розміри СЕ шляхом збільшення їх кількості (відзначимо, що розбивка робилась нерівномірною – біля порожнини розглядалось згущення СЕ). Початкова розбивка містила 1700 СЕ, при другому розрахунку кількість СЕ було збільшено до 3600, при третьому – 5200. Максимальна відмінність результатів другого розрахунку порівняно із першим не перевищувала 8 % (максимальна розбіжність спостерігалась біля границі порожнини, на віддаленні від порожнини розбіжність ставала несуттєвою), максимальна відмінність третього розрахунку порівняно із другим не перевищувала 1,5 % (характер локації розбіжностей не відрізнявся від першого випадку). Для подальшого аналізу деформування розглядався другий варіант розбивки.

Далі розглянемо деякі результати, які ілюструють розподіл компонент тензору напружень біля порожнини. На рис. 3 наведено розподіл окружних напружень уздовж границі порожнини. Суцільна лінія – аналітичний розв'язок (відповідно до [5]), дотична лінія – розв'язок МСЕ. Наведені результати свідчать про добре узгодження результатів, одержаних двома різними способами (максимальна розбіжність не перевищує 10 %). Також відзначимо, що найбільші (за модулем) значення окружних напружень спостерігаються у верхній та нижній точках порожнини.

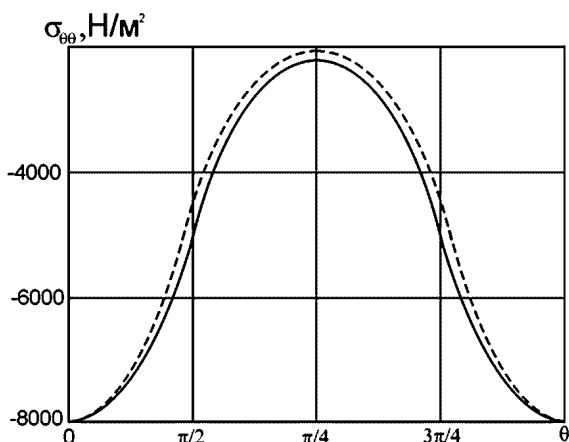


Рисунок 3 – Розподіл окружних напружень по границі порожнини

На рис.4 наведено розподіл радіальних напру-

жень уздовж радіальної координати, розпочинаючи із границі порожнини у глибину тіла (ці графіки побудовані для значення кута  $\theta = 0; \pi$ ). Максимальні значення радіальних напружень спостерігаються біля границі порожнини, тут же локалізується і максимальна розбіжність (не більша за 12 %) поміж аналітичним (суцільна лінія) та чисельним (дотична лінія) розв'язками, на віддаленні від порожнини значення радіальних напружень прагнуть до нуля.

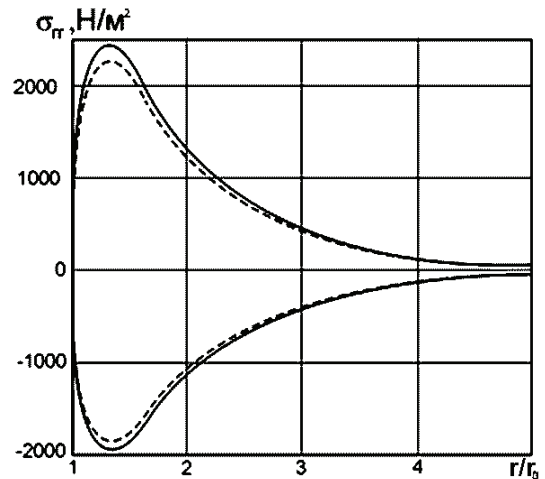


Рисунок 4 – Розподіл радіальних напружень у радіальному напрямі

Таким чином, можна відзначити, що у даному випадку найбільші величини компонент тензору напружень спостерігаються безпосередньо біля порожнини, на віддаленні від порожнини вони значно зменшуються та прагнуть до нуля.

**Висновки.** У роботі розглянуте магнітопружне деформування тіла із порожниною, яке знаходиться у стаціонарному однорідному магнітному полі. Із застосуванням МСЕ одержані результати розподілу компонент тензору напружень, які порівняно із існуючими аналітичними розв'язками. За результатами порівняння можна зробити висновок про можливість застосування запропонованого методу до аналізу деформування тіл із неоднорідностями структури під дією ЕМП.

#### Список літератури:

1. *Knopoff L.* The interactions between elastic waves motions and a magnetic field in electric conductor / *L. Knopoff* // *J. Geophys.* – 1955. – Res. 60. – P. 441–456.
2. *Chadwick P.* Elastic wave propagation in a magnetic field / *P. Chadwick* // *Actes IX Congr. Intern. Mech. Appl.* – Univ. Bruxelles, Bruxelles, 1957. – Vol. 7. – P. 143–158.
3. *Altenbach H.* Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields / *H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, D. Lavinsky* // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2015. – Vol. 27, iss. 12. – P. 1-13. – DOI: 10.1007/s00161-015-0484-8
4. *Лавінський Д. В.* Пружно-пластичне деформування систем тіл при дії електромагнітних полів / *Д. В. Лавінський, О. К. Морачковський* // *Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. ст. Фізико-математичні науки.* – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – № 2. – С. 125-135.

5. Дашко О.Г. Несвязанная задача магнитоупругости для ферромагнитного тела со сферической полостью / О.Г. Дашко // Прикладная механика. – 2007. – Том 43, № 10. – С. 42–48.

6. Belokon' A.V. Partitioned schemes of the finite-element method for dynamic problems of acoustoelectroelasticity / A.V. Belokon', V.A. Eremeyev, A.V. Nasedkin, A.N. Solov'yev // J. Appl. Math. Mech. – 2000. – № 64 (3). – P. 367–377.

7. Nasedkin A.V. Harmonic vibrations of nanosized piezoelectric bodies with surface effects / A.V. Nasedkin, V.A. Eremeyev // ZAMM. – 2014. – № 94 (10). – P. 878–892.

8. Cazzani, A. Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes / A. Cazzani, S.N. Atluri // Comput. Mech. – 1993. – № 11 (4). – P. 229–251.

#### Bibliography (transliterated):

1. Knopoff L. The interactions between elastic waves motions and a magnetic field in electric conductor, J. Geophys., Res. 60, 1955, pp. 441–456.

2. Chadwick P. Elastic wave propagation in a magnetic field, in: Actes IX Congr. Intern. Mech. Appl., 1957, Vol. 7, Univ. Bruxelles, Bruxelles, pp. 143–158.

3. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D.

Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2015. Vol. 27, iss. 12. pp. 1–13. DOI: 10.1007/s00161-015-0484–8

4. Lavinsky D.V., Morachkovsky O.K. Pruzhno-plastychno deformuvannya system til pry dii elektromagnitnykh poliv. Visnyk Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu: zb.nauk. st. phizyko-matematychni nauky. Zaporizhzhya: ZNU, 2015. No 2. pp. 125–135.

5. Dashko O.G. Nesvyazannaya zadacha magnitoupругosti dlya ferromagnitnogo tela so sfericheskoy polost'yu. Prikladnaya mekhanika. 2007. Vol. 43 (10). pp. 42–48.

6. Belokon' A.V., Eremeyev V.A., Nasedkin A.V., Solov'yev A.N. Partitioned schemes of the finite-element method for dynamic problems of acoustoelectroelasticity. J. Appl. Math. Mech. 2000. No 64 (3). pp. 367–377.

7. Nasedkin A.V., Eremeyev V.A. Harmonic vibrations of nanosized piezoelectric bodies with surface effects. ZAMM. 2014. No 94 (10). pp. 878–892.

8. Cazzani A., Atluri S.N. Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes. Comput. Mech. 1993. No 11 (4). pp. 229–251.

Поступила (received) 22.09.2016.

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Магнітопружне деформування тіла із порожниною / Д.В. Лавінський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 46 (1218). – С. 35–38. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

Магнитоупругое деформирование тела с полостью / Д.В. Лавинский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 46 (1218). – С. 35–38. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

Magnetoelastic deformation of a body with a cavity / D.V. Lavinsky // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 46 (1218). – P. 35–38. – Bibliogr.: 8. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Лавінський Денис Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, кафедра теоретичної механіки, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

Лавинский Денис Владимирович – кандидат технических наук, доцент, кафедра теоретической механики, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

Lavinsky Denis Vladimirovich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Theoretical Mechanics, NTU "KhPI", tel.: (057)- 70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net