

УДК 539.3

С. ДАРИЯ ЗАДЕ

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОЙ ПЛАСТИНКЕ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С БЕСКОНЕЧНЫМ РЯДОМ ОДИНАКОВЫХ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

В статье применена теория анизотропной линейной упругости с использованием комплексной переменной. Использован аналитический метод для нахождения концентрации напряжения в ортотропных пластинках с отверстиями. Используются функции, удовлетворяющие граничному условию для анизотропной пластины с отверстиями. Рассматривается пластинка под действием одноосной нагрузки, границы отверстия свободны от нагрузок. Статья содержит результаты исследований концентрации напряжений вблизи отверстий. Напряжение около круглого отверстия было вычислено для ортотропной пластины, укрепленной волокном для четырех типов сложных материалов. Анализ концентрации напряжений в пластине рассматривается для гомогенного ортотропного материала. Даны результаты исследования напряжений на линии между центрами отверстий. Эта же проблема проанализирована с помощью МКЭ пакетом ANSYS. Сравниваются результаты аналитического и числового методов.

**Ключевые слова:** композитная пластинка, однонаправленные волокна, числовой метод, граничные условия, концентрация напряжений.

**Введение.** Композиты армированной структуры широко используются в различных областях современной техники и строительстве. В механике материалов элементы из композита значительно выигрывают по удельной прочности при сравнении с их гомогенными аналогами.

Свойства композиционных материалов удобно изучать с двух точек зрения: макромеханики и микро-механики. Макромеханика изучает поведение материала в предположении, что материал является однородным, и особенности составляющих материалов обнаруживаются только как средние очевидных макроскопических свойств.

В технике многие элементы конструкций имеют отверстия, и при анализе напряженно-деформированного состояния деталей с отверстиями под действием приложенных нагрузок необходимо учитывать концентрацию напряжений. Известно, что в зоне концентратора часто образуется сложное напряженное состояние тела. Зона возмущения поля напряжений обычно невелика, однако концентрация напряжений снижает прочность деталей, работающих при динамических нагрузках и высоких температурах. В этой связи, как показывает практика, детали из хрупких материалов могут разрушаться также в условиях статических нагрузок.

По описанному принципу эффективной гомогенизации в микромасштабе все материалы гетерогенные, однако многие их свойства можно определить в рамках континуальной модели с привлечением принципа эффективной гомогенизации.

Для исследования макро концентрации напряжений в пластинке с отверстиями композиционный материал целесообразно рассматривать как однородный гомогенный, эквивалентный ортотропному материалу.

В плоской задаче теории упругости анизотропного тела методом функций комплексных переменных получены решения для пластинок с отверстиями.

В данной работе для плоской задачи за основу взято решение, предложенное в трудах Лехницкого С.Г [1] и Савина Г. Н [2].

В этой статье макромеханика рассматривается с целью определения концентрации напряжений в ортотропной пластинке с бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий.

**Аналитический метод исследования.** Пусть имеется упругая плоскость с бесконечным рядом равных круговых отверстий, когда на бесконечности осуществлено растяжение усилиями  $p$  и  $q$  соответственно вдоль и перпендикулярно линиям центров отверстий. Начало координат поместим в центре одного из отверстий, которое назовем основным, а ось  $x$  совместим с линией центров отверстий (рис. 1).

Будем считать, что все отверстия нагружены одинаково, причем главный вектор внешних усилий, приложенных к каждому из отверстий, равен нулю.

В этом случае комплексного переменного функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  выглядят так:

$$\varphi_i(z_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_{ik}}{\zeta_i^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{L_{ik}}{\zeta_{ni}^k}; \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Переменные  $\zeta_i$  и  $\zeta_{ni}$  связаны с  $z_i$  неявными зависимостями вида [3]:

$$z_i = \frac{1+\beta_i}{2} \zeta_i + \frac{1-\beta_i}{2} \zeta_i^{-1}; \quad (2)$$

$$z_i + mL = \frac{1+\beta_i}{2} \zeta_{mi} + \frac{1-\beta_i}{2} \zeta_{mi}^{-1}. \quad (3)$$

где  $m$  – количество отверстий.

При конформном отображении внешности единичного круга на внешности кругов возникают зависимости (2) и (3), которые получаются в областях  $S_i$ . Первые и вторые суммы в выражении (1) представляют собой функции, голоморфные вне круглых отверстий, включая их границы. Вторые суммы можно разложить в сходящиеся ряды по малому параметру  $\varepsilon = L^{-1}$ . При этом выражение (1) примет вид

$$\varphi_i(z_i) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} L_{ik} [\zeta_i(z_i)]^{-k} - \lambda_2 \varepsilon^2 m_{i0} L_{i1} z_i - \lambda_4 \varepsilon^2 m_{i0} [L_{i1} z_i^3 + 3m_{i0} z_i (L_{i1} m_{i1} + L_{i1} m_{i0})], \quad (4)$$

здесь  $\lambda_r = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r}$  ( $r = 2,4$ ).

По граничным условиям

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds + c_1; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^s X_n ds + c_2. \quad (5)$$

где

$$m_{i0} = \frac{1+\beta_i}{2}; \quad m_{i1} = \frac{1-\beta_i}{2}, \quad (6)$$

Для ортотропной пластинки значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  получаются из решения уравнения

$$\mu^4 + \left( \frac{E_x}{G_{xy}} - 2\nu_{xy} \right) \mu^2 + \frac{E_x}{E_y} = 0. \quad (7)$$

При этом известно  $\mu_2 = \overline{\mu_1}$  и  $\mu_4 = \overline{\mu_3}$ .

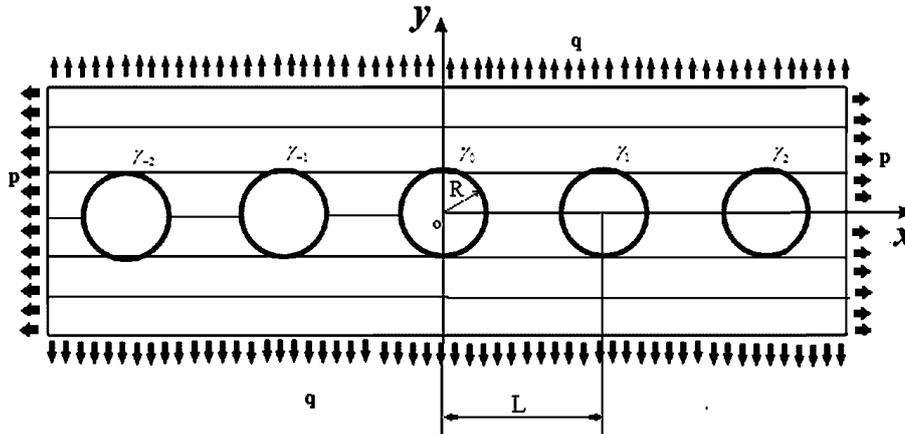


Рисунок 1 – Однонаправленная армированная пластинка с бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий

На контуре  $L$  определяются неизвестные коэффициенты  $L_{ik}$  методом рядов. У единичного круга ( $R = 1$ ) на контуре  $\zeta_i = \sigma = e^{i\theta}$ , а по формуле (2) переменная  $z_i$  выражается через  $\zeta_i$ . В качестве примера рассмотрен случай композитной пластинки бесконечной длины с бесконечным количеством упорядоченных круглых отверстий. Отверстия расположены посередине пластинки через  $L = 3$  один от другого. Коэффициент объемного содержания  $\zeta = 0,488$ . Нагрузка – растягивающее вдоль оси  $y$  усилие давлением  $q = 1$  Па (рис. 1). Вычисления выполнены с помощью разработанного программного набора средств в системе «Maple». Определяем 4 неизвестные коэффициенты функций (4) при решении систем линейных алгебраических уравнений с помощью компоненты обратной матрицы  $4 \times 4$ . Система линейных уравнений получается когда на границе основного круглого отверстия выполняются граничные условия. Применяем формулу С. Г. Лехницкого  $\sigma_y = \varphi'_1(z_1) + \varphi'_2(z_2)$  для напряженного состояния  $\sigma_y$  вдоль оси  $x$  для композиционных пластинок.

Таблица 1 – Эффективные упругие постоянные композита

Номер материала	Модуль упругости, ГПа		Модуль сдвига, ГПа	Коэффициент Пуассона	Корни уравнения (7)	
	$E_x$	$E_y$			$\mu_1$	$\mu_3$
I	156,9	173,5	53,80	0,69	2,13i	0,367i
II	38,38	11,19	4,1	0,32	3,05i	0,607i
III	35,42	6,35	1,78	1,55	2,9i	0,81i
IV	116,4	9,22	2,54	1,68	5,54i	0,64i

Численные значения корней уравнения (7) для четырех ортотропных однонаправленных пластинок

при коэффициенте  $\zeta = 0,488$  в табл. 1. Для определения упругих свойств пластинок использованы результаты расчетов для композитной пластинки с одним отверстием из [4-6]. В случае одноосного растяжения четырех волокнистых пластинок тетрагональной структуры (табл. 1), численно получены результаты распределения нормального напряжения  $\sigma_y/q$  вдоль оси  $x$  (между отверстиями). Результаты в третьем приближении ( $k = 3$ ) при  $m = 5$  представлены на рис. 2.

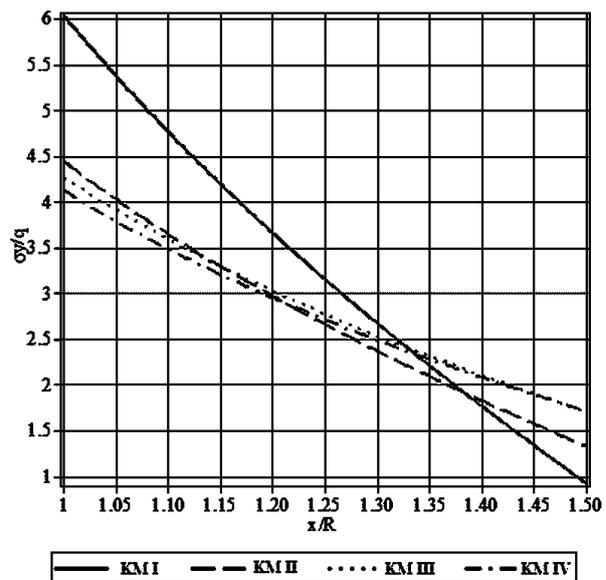


Рисунок 2 – Распределение нормального напряжения  $\sigma_y/q$  по сечению  $x = 0$  при:  $L = 3R$

Представлены результаты моделирования концентрации напряжений при одноосном растяжении четырех пластинок с рядом одинаковых круговых от-

верстий методом теоретического анализа ( $m = 5$ ) для различных расстояний между центрами отверстий  $L = 2,25R, L = 2,5R, L = 3R, L = 4R, L = 5R$  и  $L = 6R$  на рис. 3.

Количественный анализ графиков изменений концентрации напряжений под влиянием разных расстояний между отверстиями пластинок с одинаковыми круговыми отверстиями приведены на рис. 3.

Для проверки достоверности вычислений методом конечных элементов было использовано сравнение полученных результатов с аналитическим мето-

дом. Поставленная задача моделировалась с помощью метода конечных элементов в ПК ANSYS. Для решения проблемы была смоделирована двумерная ячейка из модели пластинки с рядом одинаковых круговых отверстий при  $L = 3R$ .

Конечный элемент Plane 182 использовался для определения распределения напряжений в пластинке из стеклопластика (Материал № II) с круговыми отверстиями [7,8]. В силу симметрии задачи вычисления проведены для четверти ячейки и имеют 6049 элементов (рис. 4).

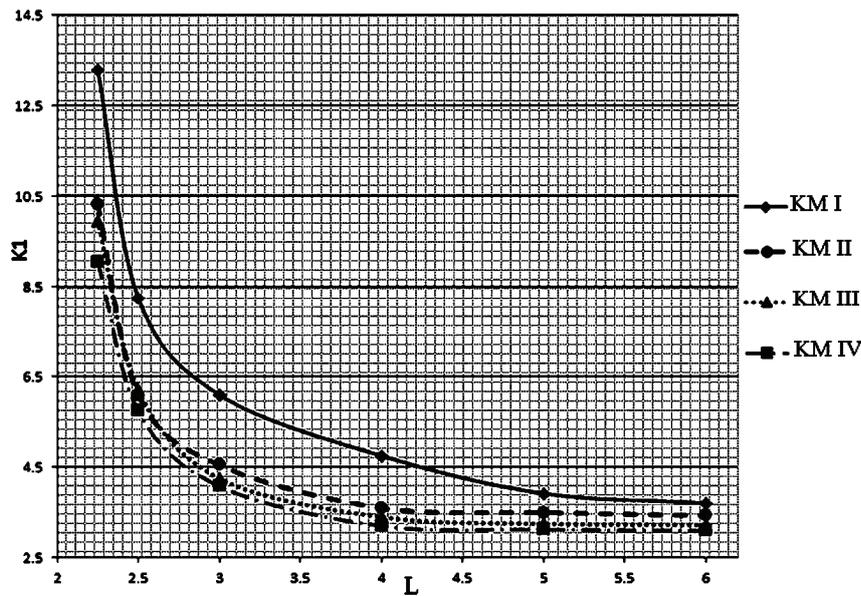


Рисунок 3 – Концентрация напряжений армированных пластинок с рядом круговых одинаковых отверстий при  $\zeta = 0,488$

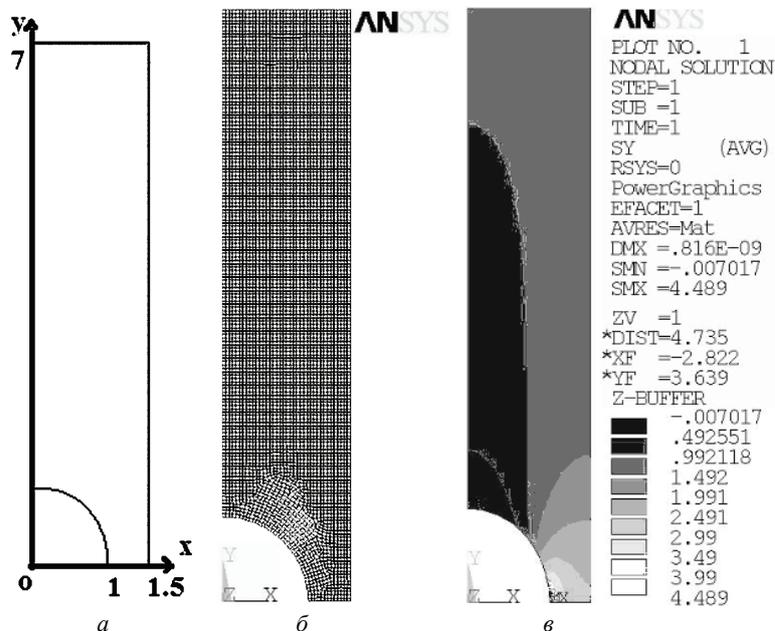


Рисунок 4 – Схема: а – модели представительной ячейки с единичным отверстием; б – сетки конечных элементов ячейки; в – распределения напряжений  $\sigma_x$  на пластинке  $L = 3R$  и  $\zeta = 0,488$

Для вычислений методом конечных элементов задаются следующие граничные условия:

– симметричные условия выполняются на линиях:

$$\begin{aligned}
 x = 0: & \quad u_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0 \text{ и} \\
 y = 0: & \quad u_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0, \\
 \text{– на линии } x = 1,5 & \text{ выполняются условия симметрии: } u_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0;
 \end{aligned}$$

– на линии  $y = 7$ : растягивающая сила  $q = 1$ ,  $\tau_{xy} = 0$ .

Приведено распределение напряжений  $\sigma_y$  при одноосном растяжении растягивающей силой  $q$  на рис. 4, в.

Из рис. 3, 4 очевидно, что условие равновесия выполняется на ячейке так:

$$\text{На линии } y = 0 \text{ и } y = 7: q \times \frac{L}{2} = \langle \sigma \rangle \times \left( \frac{L}{2} - 1 \right);$$

Поэтому при  $L = 3$ ,  $R = 1$  и  $q = 1$ :  $\langle \sigma \rangle = 3$ , где  $\langle \sigma \rangle$  – среднее значение напряжения между отверстиями на линии  $y = 0$ .

Таким образом сопоставление аналитических результатов с методом конечных элементов свидетельствует о достоверности полученных данных.

**Вывод.** Полученные результаты позволяют утверждать, что плоское напряженное состояние одноосного растяжения анизотропной пластинки с отверстиями зависит от свойств материалов и, кроме этого, от количества и расстояний между центрами одинаковых круглых отверстий. Для проверки достоверности результатов выполнено сравнение решений, полученных методом функций комплексного переменного и методом конечных элементов.

**Список литературы:** 1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с. 2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – М.: Наукова думка, 1968. – 887 с. 3. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами: учеб. пособие для студ. ун-тов и техн. вузов / А. С. Космодамианский. – М.: Вища школа, 1975. – 227 с. 4. Darya zadeh S. A two-level method for calculation of micro-stress on reinforced plates with circular hole in case of extension normal to principal direction / S. Darya zadeh, G. I. Lvov // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического уни-

верситета. Механика-Пермь. – Россия: «ПНИПУ». – 2015. – № 1. – С. 148-157. 5. Darya zadeh S. A numerical method of calculation of total stress in reinforced plates with pressurized hole / S. Darya zadeh, G. I. Lvov, R. Kiahosseini Seyed // International Journal of Modelling and Simulation. – London, England: Tylor & Francis, 2015. – № 1 (35). – С. 7-12. 6. Darya zadeh S. Numerical procedure of determining the effective mechanical characteristics of an aligned fiber composite / S. Darya zadeh, G. I. Lvov // Strength of Materials. – New York, USA: Springer, 2015. – № 4 (47). – С. 536-543. 7. Басов К. А. ANSYS в примерах задач / К. А. Басов. – М.: Компьютер-Пресс, 2002. – 224 с. 8. Jahedmotlagh H. R. ANSYS / H. R. Jahedmotlagh, M. R. Nooban, M. A. Eshraghee. – Tehran University, 2006. – 98 s.

**Bibliography (transliterated):** 1. Lehnickij S. G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. S. G. Lehnickij. Moscow: Nauka, 1977. 416. Print. 2. Savin G. N. Raspredelenie napryazhenij okolo otverstij. G. N. Savin. Moscow: Naukova dumka, 1968. 887. Print. 3. Kosmodamianskij A. S. Ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya plastin s otverstiyami, vyrezami i vystupami: ucheb. posobie dlya stud. un-tov i tehn. vuzov. A. S. Kosmodamianskij. Moscow: Vischa shkola, 1975. 227. Print. 4. Darya zadeh S. A two-level method for calculation of micro-stress on reinforced plates with circular hole in case of extension normal to principal direction. S. Darya zadeh, G. I. Lvov. Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Mehanika-Perm'. Rossiya: "PNIPU". 2015. No 1. 148-157. Print. 5. Darya zadeh S. A numerical method of calculation of total stress in reinforced plates with pressurized hole. S. Darya zadeh, G. I. Lvov, R. Kiahosseini Seyed. International Journal of Modelling and Simulation. London, England: Tylor & Francis, 2015. No 1 (35). 7-12. Print. 6. Darya zadeh S. Numerical procedure of determining the effective mechanical characteristics of an aligned fiber composite. S. Darya zadeh, G. I. Lvov. Strength of Materials. New York, USA: Springer, 2015. No 4 (47). 536-543. Print. 7. Basov K. A. ANSYS v primerah zadachah. K. A. Basov. Moscow: Komp'yuterPress, 2002. 224. Print. 8. Jahedmotlagh H. R. ANSYS. H. R. Jahedmotlagh, M. R. Nooban, M. A. Eshraghee. Tehran University, 2006. 98. Print.

Поступила (received) 25.09. 2015

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Саїд Дарія заде** – аспірант кафедри динаміки і прочності машин, Національний технічний університет «ХПІ», e-mail: s\_daryazadeh@yahoo.com

**Saeed Darya zadeh** – Postgraduate Student, Department of Dynamics and Strength of Machines, National Technical University "KhPI", e-mail: s\_daryazadeh@yahoo.com