

УДК 539.3

С. В. ФИЛИПКОВСКИЙ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РОТОРА НА РАДИАЛЬНО-УПОРНЫХ ШАРИКОПОДШИПНИКАХ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ДИСБАЛАНСА И ВИБРАЦИИ ОПОР

Получена модель нелинейных колебаний ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным осевым поджатием. Методом продолжения по параметру получена амплитудно-частотная характеристика системы при совместном действии дисбаланса и вибрации опор. Анализ показал, что колебания возникают не только на основных резонансных частотах, но и на частотах меньше резонансных в целое число раз. Исследованы неустойчивые режимы и характер бифуркаций периодических решений.

Ключевые слова: ротор, радиально-упорный шарикоподшипник, нелинейные колебания, резонанс, бифуркация.

Введение. Многие агрегаты, например гироскопические приборы, турбохолодильники самолетов, работают в условиях вибрации, которая распространяется по конструкции машины даже при наличии виброизоляции. Роторы этих агрегатов должны быть защищены от ударов, которые могут возникнуть в результате раскрытия и закрытия зазоров между шариками и канавками качения подшипников при поперечной вибрации ротора. Такие роторы устанавливают на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным осевым поджатием.

Уравнения для определения нелинейной жесткости предварительно поджатых подшипников выведены в [1], однако для выполненных в этой статье исследований они линеаризованы. В статье [2] численно и экспериментально исследованы поперечные колебания ротора на радиально-упорных предварительно поджатых шарикоподшипниках, вызванные дисбалансом диска и показана их зависимость от нелинейных контактных сил. В статье [3] исследована параметрическая неустойчивость вала на шарикоподшипниках под действием переменной осевой силы.

В статье [4] исследованы свободные колебания ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным поджатием и получены скелетные кривые и нелинейные нормальные формы колебаний при разных углах между линией действия контактных сил и осью подшипника. В летательных аппаратах и морских судах опоры агрегатов подвержены воздействию вибраций планера аппарата или корпуса судна. Влияние этих факторов на вынужденные колебания ротора остались не исследованными.

Целью настоящей работы является исследование нелинейных колебаний ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным поджатием, вызванные одновременным действием дисбаланса и вибрации опор.

Расчетная схема. Ротор представляет собой вал с диском, закрепленным несимметрично относительно опор (рис. 1). Назначение и условия работы агрегатов, в которых применяют осевое поджатие шарикоподшипников, таковы, что соотношение длины и диаметра вала обуславливают жесткость вала на порядок больше жесткости подшипников. Поэтому считаем вал недеформируемым телом, а степенями свободы являются перемещения цапф относительно внешних

колец подшипников.

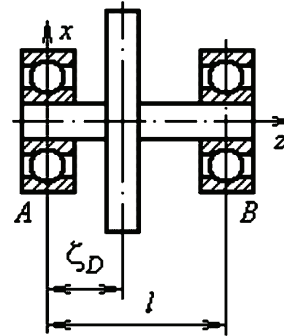


Рисунок 1 – Схема ротора

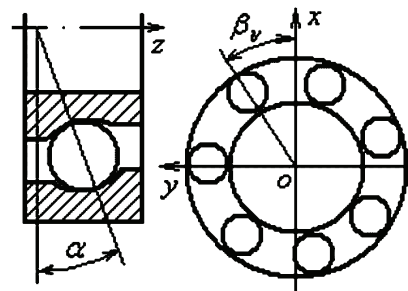


Рисунок 2 – Схема шарикоподшипника

Компоненты упругих реакций подшипника вдоль осей x, y, z получены в работе [1]; они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P_{x_i} &= K \sum_{v=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_v + y_i \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &\quad + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \cos \beta_v; \\
 P_{y_i} &= K \sum_{v=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_v + y_i \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &\quad + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \sin \beta_v; \\
 P_{z_i} &= K \sum_{v=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_v + y_i \cos \alpha \sin \beta_v + \\
 &\quad + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \sin \alpha; \\
 K &= \frac{3P_0}{2N_B} z_0^{-3/2} \sin^{-5/2} \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где x_i, y_i, z – смещения центра внутреннего кольца относительно центра наружного кольца; $i = \overline{1, 2}$ – номер обобщенной координаты цапфы; углы α и β_v показаны

на рис. 2; ν и N_B – номер и количество шариков; P_0 – сила предварительного осевого натяга, z_0 – осевое смещение внутреннего кольца относительно внешнего кольца от действия силы P_0 . Величину z_0 определяем из геометрических соотношений в зонах контакта

$$z_0 = (2R_K + w_1 + w_2 - d_B) \sin \alpha,$$

где P_K – радиусы канавок качения в кольцах подшипника, w_1 и w_2 – сближения внутреннего и внешнего колец с шариком по направлению линии контакта, вызванные предварительным осевым поджатием; d_B – диаметр шарика. Сближения вычисляем по формуле Герца [5]

$$w_i = b_i P_K^{3/2}; \quad i = \overline{1,2},$$

где b_1 и b_2 – коэффициенты формулы Герца; P_K – сила сжатия, действующая по направлению линии контакта $P_K = P_0 / (N_B \sin \alpha)$.

Угол α определяется из уравнения

$$(2R_K + w_1 + w_2 - d_B) \cos \alpha = R_1 + 2R_K - R_2,$$

где R_1 и R_2 – радиусы внутреннего и внешнего колец, измеренные от оси подшипника до середин канавок качения.

Коэффициенты формулы Герца определены выражением

$$b = \frac{3}{2} F_1 \sqrt[3]{(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) k^2 (\Theta_1 + \Theta_2)^2 / (3E_1)},$$

где F_1 , E_1 – эллиптические интегралы первого и второго рода; K_{11} , K_{12} , K_{21} , K_{22} – кривизны главных нормальных сечений контактирующих поверхностей; k – корень трансцендентного уравнения

$$(F_1 - E_1) / (F_1 - E_1 / k^2) = (K_{11} - K_{21}) / (K_{12} - K_{22}).$$

Величины Θ_1 и Θ_2 зависят от свойств материалов контактирующих тел, они определены зависимостью:

$$\Theta_i = (1 - \mu_i^2) / (\pi E_i); \quad i = \overline{1,2},$$

где μ_i и E_i – коэффициенты Пуассона и модули упругости материалов подшипниковых колец и шариков.

Уравнения колебаний ротора. Длину вала обозначим l ; перемещения срединной линии вала по направлениям координатных осей u_x , u_y , записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x(\zeta, t) &= x_1(t) \frac{l - \zeta}{l} + x_2(t) \frac{\zeta}{l}; \\ u_y(\zeta, t) &= y_1(t) \frac{l - \zeta}{l} + y_2(t) \frac{\zeta}{l}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ζ – координата сечения вала по оси z , $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ – обобщенные координаты, описывающие радиальные перемещения цапф; t – время. Внутренние кольца шарикоподшипников совершают как радиальные, так и осевые колебания относительно наружных колец. Отметим, что перемещения малы по сравнению с длиной вала. Тогда продольные колебания ротора вдоль координатной оси z можно описать одной обобщенной координатой $u_z = z(t)$.

Для составления уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. При наших допущениях выражение кинетической энергии вала T_B в виде функции обобщенных координат будет

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{\rho I}{2l} (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + \frac{\rho I}{2l} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \rho I \Omega^2 - \\ &\quad - \frac{2\rho I \Omega}{l} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)(y_1 - y_2) + \\ &\quad + \frac{\rho S l}{6} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{y}_2^2) + \frac{\rho S l}{2} \dot{z}^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ – плотность материала вала, I – момент инерции сечения вала, S – площадь сечения вала; Ω – угловая скорость вращения ротора. Кинетическая энергия диска T_D в виде функции обобщенных координат будет

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{I_1}{2} \left(\frac{\dot{y}_1 - \dot{y}_2}{l} \right)^2 + \frac{I_1}{2} \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} \right)^2 + \frac{I_0}{2} \Omega^2 + \\ &\quad + I_0 \Omega \frac{(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)(x_2 - x_1)}{l^2} + \frac{m_0}{2} \left[\dot{x}_1 \left(1 - \frac{\zeta_D}{l} \right) + \dot{x}_2 \frac{\zeta_D}{l} \right]^2 + \\ &\quad + \frac{m_0}{2} \left[\dot{y}_1 \left(1 - \frac{\zeta_D}{l} \right) + \dot{y}_2 \frac{\zeta_D}{l} \right]^2 + \frac{m_0}{2} \dot{z}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где I_1 – экваториальный момент инерции, I_0 – полярный момент инерции, m_0 – масса диска, ζ_D – координата диска по оси z .

Из допущения о том, что вал недеформируемый следует, что потенциальная энергия деформации системы представлена только энергией деформации подшипников $\Pi = \Pi_{\Pi}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)$. Производные потенциальной энергии по обобщенным координатам представляют собой выражения (1).

Демпфирование, обусловленное смазкой опор, обычно определяют на основе экспериментов и описывают моделью вязкого трения [6,7]. В этом случае диссипативная функция Рэлея Φ имеет вид

$$\Phi = \frac{C}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}^2), \quad (5)$$

где C – коэффициент демпфирования.

Используя выражения (1), (3), (4) и (5) получим уравнения колебаний в матричном виде

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}(t), \quad (6)$$

где \mathbf{M} – матрица масс; \mathbf{G} – гироскопическая матрица; \mathbf{C} – матрица демпфирования; $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ – вектор, компонентами которого являются нелинейные функции (1), \mathbf{X} – вектор обобщенных координат, $\mathbf{Q}(t)$ – вектор правой части.

Колебания возбуждаются совместным действием силы дисбаланса диска и вибрации опор, поэтому

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_D(\Omega, t) + \mathbf{Q}_{\Pi}(\omega, t),$$

где $\mathbf{Q}_D(\Omega, t)$ – вектор сил, обусловленных дисбалансом диска, $\mathbf{Q}_{\Pi}(\omega, t)$ – вектор кинематического возбуждения колебаний, ω – круговая частота вибрации опор. Первый вектор

$$\begin{aligned} Q_D(\Omega, t) &= A_{\Pi} \left[\left(1 - \frac{\zeta_D}{l} \right) \cos \Omega t \quad \left(1 - \frac{\zeta_D}{l} \right) \sin \Omega t \quad \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \quad \frac{\zeta_D}{l} \cos \Omega t \quad \frac{\zeta_D}{l} \sin \Omega t \quad 0 \right]^T, \end{aligned}$$

где $A_{\Pi} = m_0 a \Omega^2$ получаем в результате дифференцирования (4). Второй вектор следует записать следующим

щим образом [8]:

$$\mathbf{Q}_{\Pi}(\omega, t) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{A}_{\Pi}(\omega, t),$$

где \mathbf{M} – матрица масс, $\mathbf{A}_{\Pi}(\omega, t)$ – вектор виброускорений опор,

$$\mathbf{A}_{\Pi}(\omega t) = [A_{\Pi x1} \ A_{\Pi y1} \ A_{\Pi x2} \ A_{\Pi y2} \ A_{\Pi z}]^T \sin \omega t,$$

где $A_{\Pi x1}, \dots, A_{\Pi z}$ – амплитуды виброускорений.

Построение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) методом продолжения по параметру. Под АЧХ понимаем зависимость полуразмаха колебаний от частоты ω , частоту Ω считаем фиксированной. Определим безразмерные параметры следующим образом:

$$x_A = x_1/z_0; \quad y_A = y_1/z_0; \quad x_B = x_2/z_0;$$

$$y_B = y_2/z_0; \quad z_A = z/z_0; \quad \bar{\omega} = \omega/\omega_1; \quad \tau = t \cdot \omega_1,$$

где ω_1 – основная резонансная частота линеаризованной системы при $\alpha = 15^\circ$. Уравнение (5) можно записать в виде:

$$\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{f}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \tau), \tag{7}$$

где \mathbf{f} – n -мерная вектор-функция, $\mathbf{U} = [x_A \ y_A \ x_B \ y_B \ z]^T$ – вектор безразмерных обобщенных координат. Обозначив $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{U}}$, перепишем (7) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{Y}} = \varphi(\mathbf{Y}, \tau), \tag{8}$$

где φ – $2n$ -мерная вектор-функция, $\mathbf{Y} = \{\mathbf{U}^T \ \mathbf{V}^T\}^T$. Условие периодичности решений уравнения (8) можно записать в виде:

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(T), \tag{9}$$

где T – период. Если ввести в рассмотрение векторы $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(0)$ и $\mathbf{Y}_T = \mathbf{Y}(T)$, определяющие состояние системы (8) в моменты времени $\tau = 0$ и $\tau = T$, то задачу Коши (8) с краевыми условиями (9) можно свести к решению неявного уравнения

$$\{\mathbf{Y}(\mathbf{Y}_0)\}_T = \mathbf{Y}_0. \tag{10}$$

Поскольку функцию $\{\mathbf{Y}(\mathbf{Y}_0)\}_T$ не удастся описать аналитически, для ее определения интегрируем систему (8) численным методом Рунге-Кутты. Вблизи резонансной частоты АЧХ может быть неоднозначной. Вне резонансной области АЧХ нелинейной системы приближается к АЧХ линейной системы. Поэтому для построения первого приближения начальной точки АЧХ определяем собственные частоты линеаризованной системы и решаем уравнение (10) для этой системы в стороне от резонанса. Следующие точки АЧХ находим, выполняя заранее назначенный шаг по параметру продолжения в сторону резонансной области. Параметром продолжения для первых точек АЧХ является частота. Вблизи резонанса на АЧХ могут появиться особые точки, в которых касательная к кривой перпендикулярна оси абсцисс. При подходе к этой точке надо менять параметр продолжения АЧХ с частоты на одну их фазовых координат. Таковую задачу построения точек АЧХ называют инвертированной. Уточнение решений как прямой, так и инвертированной

ной задачи осуществляется итерационным методом Ньютона [9].

После окончания итераций еще раз выполняем интегрирование по алгоритму метода Ньютона. Получим матрицу Якоби, которая будет тождественна матрице монодромии, ее мультипликаторы $\lambda = \xi \pm i\psi$ определяют устойчивость и характер бифуркаций рассматриваемой точки АЧХ [10].

Результаты численных исследований. Рассмотрены колебания недеформируемого ротора с одним диском $l = 0,5$ м, $\zeta_D = 0,125$ м, диаметр вала $d = 0,025$ м, $m_0 = 10$ кг, $I_1 = 0,1$ кг·м², $I_0 = 0,2$ кг·м², который вращается на радиально-упорных подшипниках средней серии по ГОСТ 831-75. Характерные параметры подшипника таковы: радиус внешней канавки качения $R_2 = 27,5167$ мм; $\alpha = 15^\circ$; радиус внутренней канавки качения $R_1 = 16,000$ мм; радиус поперечного сечения канавок качения $R_K = 5,930$ мм; диаметр шарика $d_B = 11,510$ мм; количество шариков $N_B = 7$; модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

При совместном действии дисбаланса и вибрации опор проявляются резонансы всех форм колебаний ротора, а также резонансы с кратными частотам. На рис. 3 показана АЧХ ротора на подшипниках с углом контакта $\alpha = 15^\circ$. Резонансы 1, 2, 3 соответствуют форме колебаний, когда цапфы вала находятся с противоположных сторон от оси симметрии подшипников и в процессе колебаний движутся в сторону вращения ротора. Их частоты относятся как целые числа – 1, 1/2, 1/3. Резонанс 4 соответствует форме колебаний, когда цапфы вала находятся с противоположных сторон от оси симметрии подшипников и в процессе колебаний движутся противоположно вращению ротора. На АЧХ заметны резонансы и с более низкими частотами, соответствующими этим формам колебаний. Их амплитуды невелики, а частоты также относятся как целые числа.

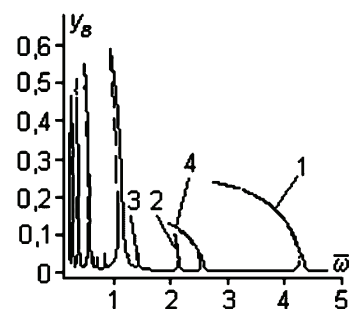
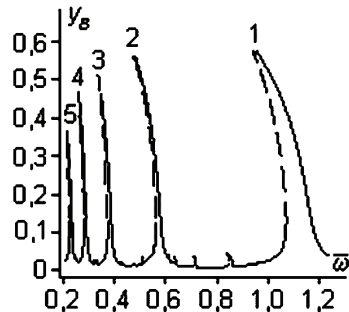
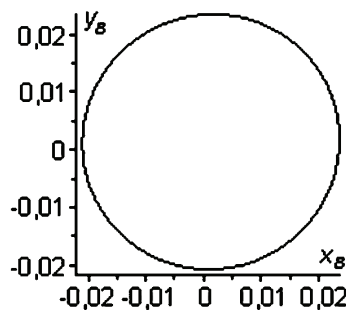
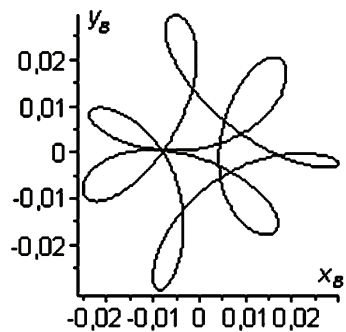


Рисунок 3 – АЧХ координаты y_B

На рис. 4 показана область низких частот той же АЧХ. Резонансы 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют форме колебаний, когда цапфы вала находятся с одной стороны от оси симметрии подшипников и в процессе колебаний движутся в сторону вращения ротора. Их частоты относятся как 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5.

Траектории центров цапф на основных резонансах всех форм колебаний близки к окружностям, как показано на рис. 5 для формы колебаний, когда цапфы

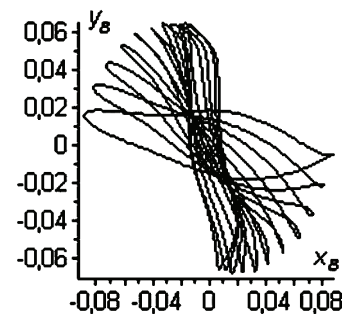
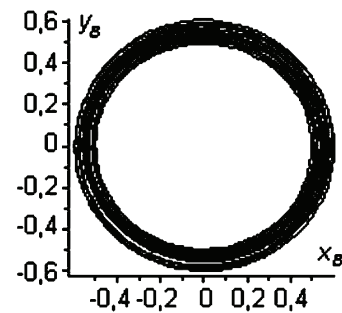
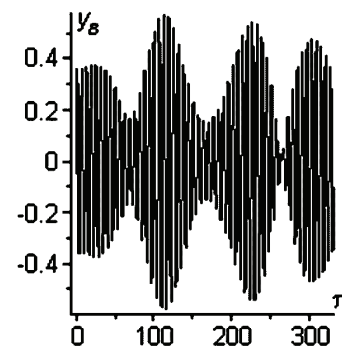
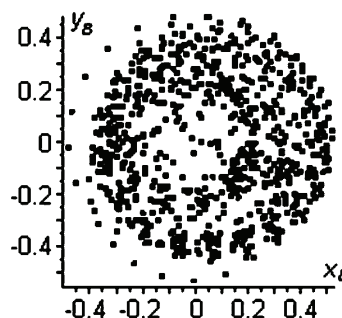
вала находятся с противоположных сторон от оси симметрии подшипников и в процессе колебаний движутся в сторону вращения ротора ($\bar{\omega} = 4,2405$). Для кратных частот за каждый цикл колебаний цапфа описывает столько круговых петель, во сколько раз частота ниже основной частоты для этой формы.

Рисунок 4 – Начало АЧХ координаты y_B Рисунок 5 – Траектория цапфы $\bar{\omega} = 4,2405$ Рисунок 6 – Траектория цапфы $\bar{\omega} = 0,5098$

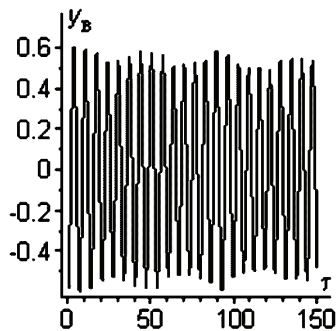
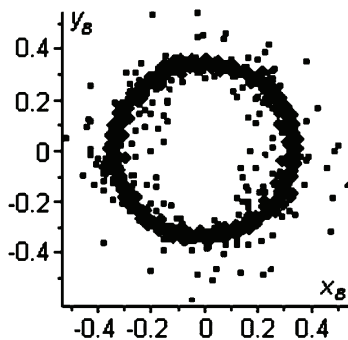
Между резонансами с большими амплитудами на рис. 4 хорошо видны резонансы с относительно малыми амплитудами и частотами, кратными частотам резонансов с формами колебаний, когда цапфы вала находятся с противоположных сторон от оси симметрии подшипников. В результате наложения колебаний по нескольким формам здесь траектории центров цапф более сложные, как показано на рис. 6 для частоты $\bar{\omega} = 0,5098$.

На левых ветвях резонансных пиков наблюдаются неустойчивые режимы колебаний, для которых наибольший мультипликатор матрицы монодромии становится действительным числом $\lambda_1 > 1$. На правых ветвях неустойчивые режимы появляются возле самых вершин резонансных пиков, модули наибольших комплексно-сопряженных мультипликаторов возраст-

ают до величин $|\lambda_{1,2}| > 1$. На рис. 7 показана траектория центра цапфы за десять периодов на левой ветви АЧХ, когда цапфы вала находятся с одной стороны от оси симметрии подшипников ($\bar{\omega} = 1,033$). На рис. 8 показана траектория цапфы за десять периодов на правой ветви АЧХ для такой же формы колебаний ($\bar{\omega} = 0,453$). Видно, что на этих режимах колебания становятся неперiodическими. На резонансах соответствующих всем остальным формам колебаний наблюдаются аналогичные процессы.

Рисунок 7 – Траектория цапфы $\bar{\omega} = 1,033$ Рисунок 8 – Траектория цапфы $\bar{\omega} = 0,453$ Рисунок 9 – Колебания $\bar{\omega} = 1,033$ Рисунок 10 – Отображение Пуанкаре $\bar{\omega} = 1,033$

Для анализа динамики ротора на неустойчивых режимах построены зависимости обобщенных координат от времени. На левых ветвях АЧХ наблюдаются хаотические колебания, как показано на рис. 9 при $\bar{\omega} = 1,033$. Отображение Пуанкаре для этого режима показано на рис. 10. На правых ветвях АЧХ наблюдаются колебания по типу биений, как показано на рис. 11 при $\bar{\omega} = 0,453$. Отображение Пуанкаре для этого режима показано на рис. 12.

Рисунок 11 – Колебания $\bar{\omega} = 0,453$ Рисунок 12 – Отображение Пуанкаре $\bar{\omega} = 0,453$

Выводы. Анализ нелинейной динамики ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным поджатием показал, что при совместном действии дисбаланса и вибрации опор возбуждаются все формы колебаний ротора, все АЧХ мягкие и на левых и правых ветвях АЧХ имеются неустойчивые режимы разного типа. При этом колебания возникают не только на основных резонансных частотах, но и на частотах меньше резонансных в целое число раз.

Резонансы, соответствующие форме колебаний, когда цапфы вала находятся с одной стороны от оси симметрии подшипников имеют наибольшую амплитуду, а резонансы, соответствующие форме колебаний, когда цапфы вала находятся с противоположных сторон от оси симметрии подшипников и в процессе колебаний движутся противоположно вращению ротора – наименьшую амплитуду.

Такое поведение системы объясняется тем, что частота вибрации опор близка к частоте вызванных дисбалансом резонансных колебаний. Частоты резонирующих форм колебаний имеют тот же порядок. Наложение этих возмущающих колебаний порождает биения суммарной возбуждающей вибрации с разными частотами, которые вызывают все рассмотренные резонансы.

Список литературы: 1. Новиков Л. З. Определение собственных частот колебаний электродвигателя, связанных с нелинейной упругостью подшипников / Л. З. Новиков // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 6. – С. 84–91. 2. Bai C. Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing–rotor system / C. Bai, H. Zhang, Q. Xu // International Journal of Non-Linear Mechanics – 2013. – V. 50. – P. 1–10. 3. Young T. H. Dynamic stability of rotor-bearing systems subjected to random axial forces / T. H. Young, T. N. Shiau, Z. H. Kuo // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – V. 305(3). – P. 467–480. 4. Филипповский С. В. Свободные нелинейные колебания многодисковых роторов на шарикоподшипниках / С. В. Филипповский, К. В. Аврамов // Проблемы прочности. – 2013. – № 3. – С. 86–96. 5. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел. Избр. Тр., Т. 1. / А. Н. Динник. – К.: Изд-во АН УССР, 1952. – С. 15–114. 6. Балмонт В. В. О колебаниях момента сопротивления вращению шарикоподшипника / В. В. Балмонт, Б. О. Дубовецкий, А. М. Авдеев, Г. В. Селезнев // Машиноведение. – 1988. – № 3. – С. 73–81. 7. Позняк Э. Л. Маятниковые колебания несимметричного жесткого ротора в подшипниках с зазорами / Э. Л. Позняк, Т. Н. Гладышева, В. В. Ковалев // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1990. – № 4. – С. 33–40. 8. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с. 9. Беломытцев А. С. Алгоритм решения нелинейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в области многозначности / А. С. Беломытцев, В. Н. Карaban // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1986. – № 7. – С. 1099–1102. 10. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. – М.: Наука, 1990. – 312 с.

Bibliography (transliterated): 1. Novikov L. Z. Opredelenie sobstvennykh chastot kolebaniy jelektrodvigatelja, svjazannyh s nelinejnoy uprugost'ju podshpivnikov. L. Z. Novikov. Izv. AN SSSR. Mehanika i mashinostroenie. 1961. No 6. 84–91. Print. 2. Bai C. Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing–rotor system. C. Bai, H. Zhang, Q. Xu. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. Vol. 50. 1–10. Print. 3. Young T. H. Dynamic stability of rotor-bearing systems subjected to random axial forces. T. H. Young, T. N. Shiau, Z. H. Kuo. Journal of Sound and Vibration. 2007. Vol. 305 (3). 467–480. Print. 4. Filipkovskij S. V. Svobodnye nelinejnye kolebanija mnogodiskovyh rotorov na sharikopodshpivnikah. S. V. Filipkovskij, K. V. Avramov. Problemy prochnosti. 2013. No 3. 86–96. Print. 5. Dinnik A. N. Udar i szhatie uprugih tel. Izbr. Tr., T. 1. A. N. Dinnik. Kyjiv: Izd-vo AN USSR, 1952. 15–114. Print. 6. Bal'mont V. V. O kolebanijah momenta soprotivlenija vrashheniju sharikopodshpivnika. V. V. Bal'mont, B. O. Duboveckij, A. M. Avdeev, G. V. Seleznjov. Mashinovedenie. 1988. No 3. 73–81. Print. 7. Poznjak Je. L. Majatnikovye kolebanija nesimmetrichnogo zhestkogo rotora v podshpivnikah s zazorami. Je. L. Poznjak, T. N. Gladysheva, V. V. Kovalev. Problemy mashinostroenija i nadezhnosti mashin. 1990. No 4. 33–40. Print. 8. Timoshenko S. P. Kolebanija v inzhenernom dele. S. P. Timoshenko, D. H. Jang, U. Uiver. Moscow: Mashinostroenie, 1985. 472. Print. 9. Belomytcev A. S. Algoritm reshenija nelinejnoj kraevoj zadachi dlja obyknovennyh differencial'nyh uravnenij v oblasti mnogoznachnosti. A. S. Belomytcev, V. N. Karaban. Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki. 1986. No 7. 1099–1102. Print. 10. Anishchenko V. S. Slozhnye kolebanija v prostyh sistemah. V. S. Anishchenko. Moscow: Nauka, 1990. 312. Print.

Поступила (received) 15.06.2015

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Филипповский Сергей Владимирович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры теоретической механики и гидравлики Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет; тел.: (057) 707 37 30

Filipkovskiy Sergey Vladimirovich – Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department "Theoretical Mechanics and Hydraulics, Kharkiv National Automobile and Highway University; tel.: (057) 707 37 30