

УДК 539.3

А. В. ВОРОПАЙ**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОПОРОЙ**

Механическая система состоит из прямоугольной изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по контуру и дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опоры. На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Исследования сводятся к анализу интегральных уравнений Вольтерра, которые решаются численно с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. Описан выбор параметра регуляризации. Приведен пример расчета прогиба пластины с дополнительной вязкоупругой опорой, а также показана реакция между пластиной и дополнительной опорой.

Ключевые слова: пластина средней толщины, нестационарное нагружение, сосредоточенная вязкоупругая опора, интегральные уравнения Вольтерра, метод регуляризации.

Введение. Одними из самых широко распространенных элементов конструкций являются пластины, большинство из которых – прямоугольные. В технике и строительстве в качестве облицовочных элементов зачастую используются тонкие пластины. Когда от элементов конструкций требуется обладать существенными несущими свойствами, необходимы тонкостенные пластинчатые элементы со сложным профилем или пластины средней толщины (а иногда и толстые плиты). Пластины средней толщины, хотя и играют сложным тонкостенным элементом с точки зрения материалоемкости и веса, во-первых, конструктивно проще, а во-вторых, значительно лучше работают в условиях динамических, а особенно ударных нагрузений.

Иногда для механических систем, включающих в себя элементы конструкции в виде прямоугольных пластин, на которые действуют нестационарные нагрузки, кроме требований прочности вводятся дополнительные ограничения на перемещения некоторых элементов (их прогибы и т.п.). В таких случаях для опертых по периметру пластин целесообразно использовать дополнительные опоры.

В работе [1] решается задача для прямоугольной пластины с дополнительной линейно-упругой опорой, а в работе [2] рассмотрены нестационарные колебания пластины с дополнительным амортизатором. Настоящая работа является логическим продолжением этих двух работ, так как здесь исследуется влияние дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опоры.

1 Постановка задачи. Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной в некоторой точке (рис. 1). Считается, что дополнительная опора установлена ортогонально срединной плоскости пластины и шарнирно соединена с ее нижней лицевой поверхностью. Коэффициенты жесткости и демпфирования опоры постоянны, а сила сопротивления изменяется по формуле:

$$R(t) = c \cdot w_C(x_C, y_C, t) + k \cdot \frac{dw_C(x_C, y_C, t)}{dt}, \quad (1)$$

где c – коэффициент жесткости дополнительной опо-

ры, Н/м; k – коэффициент демпфирования, Н·с/м.

На пластину в некоторой точке воздействует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины с дополнительной опорой. Воздействие дополнительной опоры на пластину моделируется в виде неизвестной нестационарной силы $R(t)$, приложенной к пластине в месте установки опоры (точка C). При решении задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузки и координаты установки дополнительной опоры произвольны (любые точки, принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе).

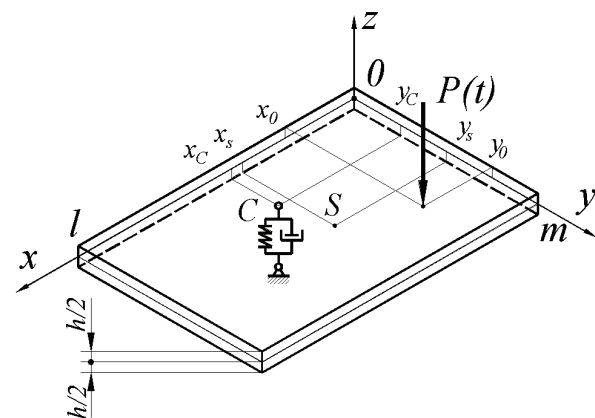


Рисунок 1 – Схема нагружения

2 Решение задачи. В рамках теории пластин средней толщины типа С. П. Тимошенко система дифференциальных уравнений, которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине имеет вид аналогичный приведенному, например, в [3]. При наличии дополнительной вязкоупругой опоры система трех дифференциальных уравнений в частных производных может быть дополнена уравнением связи (1). Для пластины, имеющей толщину h , плотность ρ , модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν , когда ее срединная плоскость связана с плоскостью xOy декартовой системы координат, а w – прогиб срединной плоскости пластины; ψ_x, ψ_y – углы поворота нормали к этой плоскости, система уравнений может быть записана в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + R(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) &= \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - \\ - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) &= \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}; \\ c \cdot w(x_C, y_C, t) + \kappa \frac{dw(x_C, y_C, t)}{dt} &= R(x_C, y_C, t), \end{aligned} \right. \quad (2)$$

где $G' = k' G$; k' – коэффициент сдвига; $I = h^3/12$; t – время, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$;

$$\varphi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Укажем, что $P(x, y, t)$ и $R(t)$ – возмущающая нагрузка и реакция взаимодействия между пластиной и дополнительной опорой соответственно.

Методика решения задач для прямоугольных пластин, на которые воздействует система нескольких независимых нестационарных нагрузок, описана, например, в [4]. Согласно методике, решение системы уравнений представляется в виде разложения искомых функций $w(x, y, t)$, $\psi_x(x, y, t)$ и $\psi_y(x, y, t)$ в двойные ряды Фурье. Разложения прогибов пластины при шарнирном опирании будет иметь следующий вид:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}.$$

Для определения коэффициентов разложения в ряды $w_{kn}(t)$ используется операционное исчисление (для данной задачи преобразование Лапласа). В результате решения системы дифференциальных уравнений (2) для прогиба пластины получается следующее аналитическое выражение:

$$w(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K_P^W(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R^W(x, y, t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

где $K_i(x, y, t)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля, полученные после выполнения обратного преобразования Лапласа с использованием теоремы о свертке:

$$K_i^W(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} f_{x_k}(x) f_{y_n}(y) \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \sin(\omega_{pkn} \cdot t),$$

причем, для шарнирно опертых пластин $f_{x_k}(x) = \sin \frac{k\pi \cdot x}{l}$, $f_{y_n}(y) = \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}$.

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения:

$$a = \frac{G'}{\rho}; \quad b = \frac{G'h}{\rho \cdot J}; \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J}; \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right);$$

$$\Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2(a+d)+b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4};$$

$$\Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn} = -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.$$

Укажем, что для сосредоточенных нагрузок коэффициенты разложения в двойные ряды будут иметь следующий вид:

$$C_{ikn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m},$$

где (x_i, y_i) – координаты точки приложения сосредоточенной нагрузки.

Для точки, в которой находится дополнительная опора, можно записать следующие соотношения для прогиба:

$$\left\{ \begin{aligned} w(x_C, y_C, t) &= \frac{R(t)}{c} + \int_0^t \frac{R(\tau)}{\kappa} d\tau, \\ w(x_C, y_C, t) &= \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Задача определения зависимости во времени нормального перемещения и углов поворота нормали точек пластины $w(x, y, t)$, $\psi_x(x, y, t)$ и $\psi_y(x, y, t)$ при известной силе $P(t)$, коэффициентах жесткости c и демпфирования κ может быть сведена к интегральному уравнению (ИУ) Вольтерра второго рода, относительно неизвестной $R(t)$:

$$c \int_0^t R(\tau) \left[K_R(t - \tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau + R(t) = c \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau. \quad (5)$$

ИУ (5) решается с использованием регуляризующего алгоритма А. Н. Тихонова [5], согласно которому, решение интегрального уравнения эквивалентно решению регуляризованной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{A}^T \mathbf{w}, \quad (6)$$

где \mathbf{A} – матрица, соответствующая интегральному оператору, $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица, вид которой приведен в [5], \mathbf{r} – искомый вектор, соответствующий значениям функции $R(t)$, \mathbf{w} – вектор, отвечает правой части ИУ.

Дискретный аналог ИУ (5) имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}_R^* \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} = \mathbf{A}_P^* \cdot \mathbf{p},$$

где матрицы $\mathbf{A}_P^* = c \cdot \mathbf{A}_P$, $\mathbf{A}_R^* = c \cdot \mathbf{A}_R$, а матрицы \mathbf{A}_P , \mathbf{A}_R – соответствуют ядрам интегральных уравнений $K_i(x_C, y_C, t)$. Тогда для составления СЛАУ (6) вектор \mathbf{w} можно определить, как $\mathbf{w} = \mathbf{A}_P^* \cdot \mathbf{p}$, а матрицу \mathbf{A} можно представить в виде $\mathbf{A} = \mathbf{A}_R^* + \mathbf{E}$, где \mathbf{E} – единичная матрица.

В результате находится сила взаимодействия между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой $R(t)$, что позволяет определять компоненты перемещения во времени во всех точках пластины (как при воздействии двух независимых нагрузок $P(t)$ и $R(t)$ на пластину без дополнительных опор).

3 Результаты расчетов. При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy

декартовой системы координат. Численные расчеты производились при следующих значениях: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0,3$; $E = 2,07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h = 0,04 \text{ м}$; $l = 0,6 \text{ м}$, $m = 0,4 \text{ м}$. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0 = 0,15 \text{ м}$, $y_0 = 0,3 \text{ м}$. Координаты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_c = 0,45 \text{ м}$, $y_c = 0,15 \text{ м}$. Значение коэффициента жесткости дополнительной опоры $c = 10^4 \text{ Н/м}$, а коэффициент демпфирования $\kappa = 10^5 \text{ Н/(м/с)}$; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

На рис. 2 показано изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды) и определенная в результате решения интегрального уравнения (5) реакция между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой $R(t)$.

На рис. 3 показаны функционалы, на основе которых выбирался параметр регуляризации α при решении регуляризированной СЛАУ (6), причем значения вдоль оси абсцисс для наглядности отложены на логарифмической шкале. Кривая 1 на рис. 3 соответствует функционалу «суммарного прогиба» пластины в точке установки дополнительной опоры:

$M^\alpha[R] = \|w_P + A_R R^\alpha\|$. Этот функционал подобен «невязке» [5]. Однако в данной задаче нас интересует не глобальный минимум (который стремится к нулю), а локальный, так как дополнительная опора уменьшает перемещения (гасит их) но не устраняет полностью (иначе она станет абсолютно жесткой). Кривая 2 соответствует функционалу «суммарного воздействия» дополнительной опоры $M^\alpha[R] = \|R^\alpha\|$, которое должно быть по возможности минимальным, но не равным нулю (что соответствовало бы отсутствию реакции дополнительной опоры). Так как для функционала «суммарного воздействия» сложно выделить оптимальные значения (имеется только зона рациональных значений $10^{-18} > \alpha_{opt} > 10^{-22}$) вводится третий (вспомогательный) функционал «гладкости» изменения идентифицированной реакции в зависимости от параметра регуляризации α – кривая 3 (добавляется дополнительное ограничение $\alpha_{opt} > 10^{-21}$). На рис. 3 хорошо видно, что оптимальное приближенное решение задачи можно получить при значении параметра регуляризации $\alpha_{opt} = 10^{-20}$.

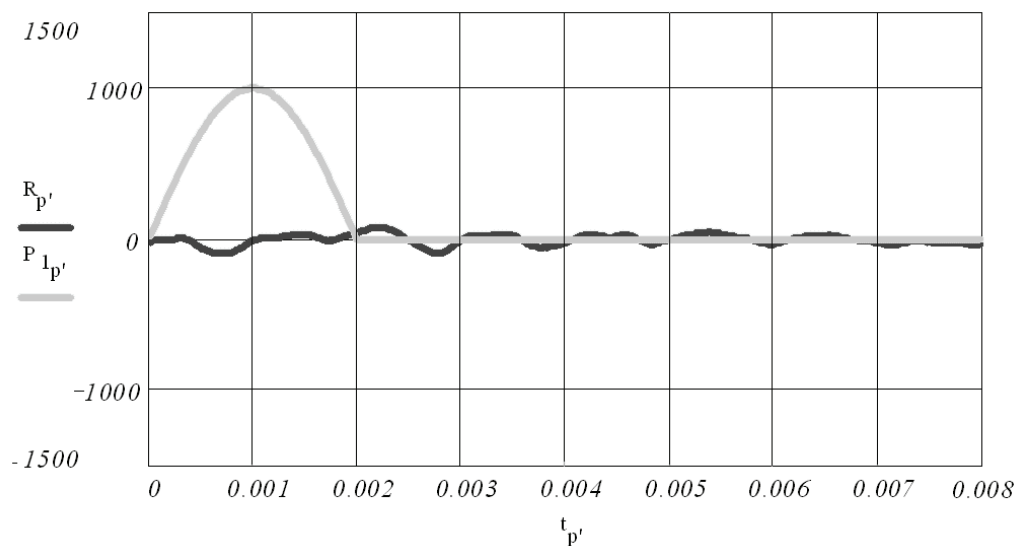


Рисунок 2 – Возмущающая нагрузка и реакция дополнительной вязкоупругой опоры

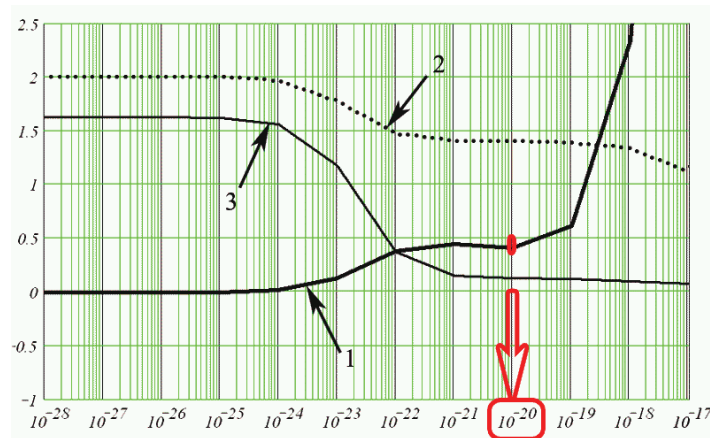


Рисунок 3 – Выбор параметра регуляризации

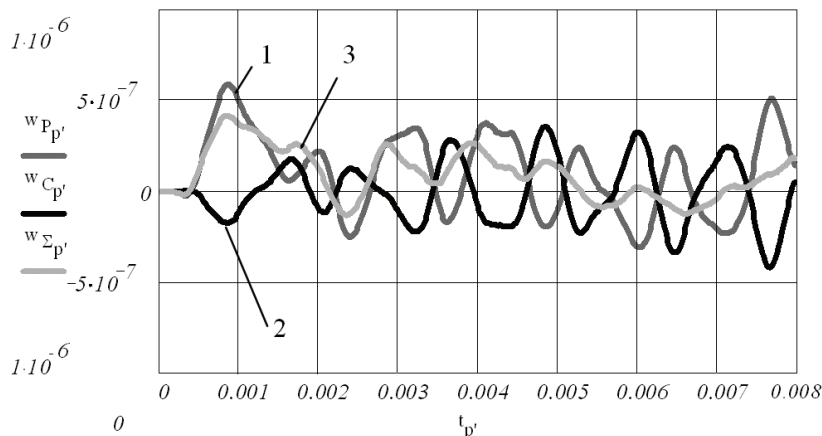


Рисунок 4 – Прогиб пластины в точке установки дополнительной опоры

На рис. 4 показаны изменения во времени прогиба пластины $w_P(x_C, y_C, t) = \int_0^t P(\tau) K_P^W(x_C, y_C, t - \tau) d\tau$, вызванного только возмущающей силой $P(t)$ без учета влияния дополнительной опоры – кривая 1; прогиба пластины $w_R(x_C, y_C, t) = \int_0^t R(\tau) K_R^W(x_C, y_C, t - \tau) d\tau$, вызванного только реакцией дополнительной вязкоупругой опоры $R(t)$ – кривая 2, и «суммарного» реального прогиба вызванного совместным действием возмущающей силы и реакции дополнительной опоры $w(x_C, y_C, t)$ – кривая 3.

Аналогичные графики можно построить для любой точки пластины, меняя в ядрах соответствующих интегралов значения ее координат (x, y) .

Выводы. В настоящей работе описан подход, при котором воздействие дополнительной вязкоупругой опоры на пластину моделируется в виде неизвестной нестационарной силы, определяемой из решения интегрального уравнения Вольтерра. На основе предложенного подхода при моделировании нестационарного деформирования пластинчатых элементов конструкций с дополнительными опорами имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения задач механики деформируемого твердого тела без использования итерационных схем.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Воропай Алексей Валериевич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Voropay Alexey Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Associated Professor, National Technical University «KhPI», phone (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Список литературы: 1. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с упругой подпоркой / А. В. Воропай // Вестник национального технического университета «ХПИ». Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2012. – № 55. – С. 30-37. 2. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с амортизатором / А. В. Воропай // Вестник национального технического университета «ХПИ». Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2011. – № 52. – С. 42-48. 3. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин / Я. С. Уфлянд // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 3. – С. 287-300. 4. Янютин Е. Г. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. / Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, С. И. Поваляев, И. В. Янчевский. – Х.: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с. 5. Тихонов А. Н. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А. Н. Тихонов, А. В. Гончаровский и др.. – М.: Наука, 1983. – 200 с.

Bibliography (transliterated): 1. Voropaj A. V. Nestacionarnye kolebanija prjamougol'noj plastiny s upravgoj podporkoj. A. V. Voropaj. Vestnik nacional'nogo tehničeskogo universiteta "KhPI". Dinamika i prochnost' mashin. Kharkiv: NTU "KhPI", 2012. No 55. 30-37. Print. 2. Voropaj A. V. Nestacionarnye kolebanija prjamougol'noj plastiny s amortizatorom. A. V. Voropaj. Vestnik nacional'nogo tehničeskogo universiteta "KhPI". Dinamika i prochnost' mashin. Kharkiv: NTU "KhPI", 2011. No 52. 42-48. Print. 3. Ufljand Ja. S. Rasprostranenie voln pri poperechnyh kolebanijah sterzhnej i plastin. Ja. S. Ufljand. Prikladnaja matematika i mehanika. 1948. Vol. 12, No 3. 287-300. Print. 4. Janjutin E. G. Identifikacija nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Monografija v 2-h chastjah. Chast' II. E. G. Janjutin, A. V. Voropaj, S. I. Povaljaev, I. V. Janchevskij. Kharkiv: Izd-vo KhNADU, 2010. 212. Print. 5. Tihonov A. N. Reguljarizirujushhie algoritmy i apriornaja informacija. A. N. Tihonov, A. V. Goncharovskij i dr. Moscow: Nauka, 1983. 200. Print.

Поступила (received) 10.07.2015