

По результатам выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

- поведение осциллятора в около резонансной области ( $0,9 \leq z \leq 1,1$ ) вынужденных колебаний существенно зависит от формы и параметров функции трения;
- для построения достаточно точной математической модели исследуемого осциллятора с внутренним трением необходимо использовать комбинированную функцию трения, параметры которой должны обеспечивать выполнение двух критериев: соответствие теоретического и экспериментального значений времени затухания  $\Delta t \approx 0,8$  с и соответствие теоретической и экспериментальной форм огибающей линии колебаний.

**Список литературы:** 1. Писаренко Г.С., Береговенко А.Ю. О возможном подходе к учету различных видов диссипации энергии при расчете колебаний реальных механических систем / Материалы XIII Респ. Науч. конф. – Киев: Наукова думка, 1985. – С. 5-15. 2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний. – М.: Машиностроение, 1967. – 313 с. 3. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. – М.: Гос. изд.-во техн. теор. Литературы, 1950. – 345 с. 4. Магнус К. Колебания. – М.: Мир, 1982. – 302 с. 5. Баженов В.А., Гром А.А., Гуляев В.И., Лизунов П.П. Нелинейные колебания конструкций с учетом диссипативных сил. / Материалы XIII Респ. Науч. конф. – Киев: Наукова думка, 1985. – С. 131-137. 6. Моисеев А.А., Розенберг А.Н. Конструирование и расчет прочности судовых ТЗА. – Л.: Судостроение, 1964. – 510 с.

*Поступила в редколлегию 29.11.2007*

УДК 539.3

**Е.Г.ЯНЮТИН**, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ»;  
**А.В.ВОРОПАЙ**, канд.техн.наук, ХНАДУ

## **АКТИВНОЕ ГАШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ**

Пропонується методика активного гашіння нестационарних коливань прямокутної пластини. Гашіння виконується системою чотирьох нестационарних зосереджених навантажень, які отримані в результаті розв'язку оберненої задачі динамічної теорії пластин типу С. П. Тимошенка. Проблема зводиться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, яка розв'язується чисельно з використанням спеціалізованого алгоритму та методу регуляризації А. М. Тихонова.

The procedure of active damping of the nonstationary vibration for rectangular plate is presented. The damping is executed by the system of four nonstationary concentrated forces obtained as a result of solving an inverse problem of Timoshenko's plate dynamic theory. The problem is reduced to the system of the first-kind Volterra integral equations solved numerically with means of Tikhonov's regularization method.

## Введение

Одной из важнейших проблем в инженерии является проблема виброзащиты. С развитием современных конструкций, материалов и новых технологий все чаще начинают применяться схемы активной виброзащиты. Особенно это касается элементов конструкций, которые подвержены импульсному нагружению, так как в этом случае элементы пассивной виброзащиты не всегда могут работать удовлетворительно.

В настоящее время начали активно развиваются исследования по управлению напряженно-деформированным состоянием элементов конструкций. Одним из основных факторов, способствующих развитию этой тематики, является создание современных компактных и эффективных устройств по управлению колебаниями, например, пьезодатчик/пьезопривод (piezosensor/actuator); магнитореологические (MR) датчики; слои вязкоупругого материала, помещенные между магнитными (электромагнитными) слоями; элементы конструкций в целом, созданные из так называемых усовершенствованных материалов (smart materials), функционально упорядоченных материалов (ФУМ или FGM) и т.д. Укажем некоторые опубликованные работы этого направления: [1-2] это работы по управлению колебаниями механических объектов, выполненных из специальных материалов; в статьях [3-4] управление колебаниями осуществляется за счет специальных устройств (растяжек, накладок и т.д.), вводимых в механические системы.

Используемая в настоящем исследовании методика управления колебаниями прямоугольной пластины с помощью приложения внешних управляющих воздействий и является логическим продолжением методики приведенной в [5], но только на качественно более высоком уровне. В [5] приведено решение соответствующей задачи об управлении нестационарными колебаниями в одной точке прямоугольной пластины с помощью применения одной управляющей силы.

## Постановка задачи

Рассмотрим упругую изотропную прямоугольную пластину средней толщины. Габариты пластины –  $l \times m$ , а толщина  $h$  (рис. 1). Схема закрепления пластины соответствует шарнирному опиранию.

Предположим, что на пластину воздействует система двух независимых поперечных нагрузок, приложенных в точках  $(x_{01}, y_{01})$  и  $(x_{02}, y_{02})$ , которые вызывают первичное деформирования пластины. Требуется «погасить» колебания (по возможности значительно уменьшить амплитуды колебаний прогиба во времени) на всей области прямоугольной пластины. При этом предполагается, что на пластину воздействует система, состоящая из четырех независимых между собой, сосредоточенных управляющих воздействий (сил). В случае, если закон изменения во времени упомянутых двух возмущающих нагрузок известен, поставленная задача сводится к отысканию четырех неизвестных управляющих нагрузок.

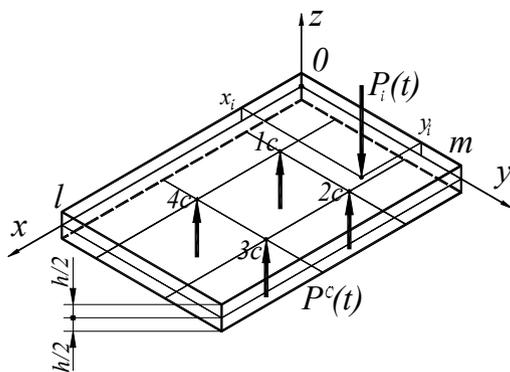


Рисунок 1 – Схема «гашения» колебаний

### Уравнение движения пластины и вид решения

Уравнения нестационарных колебаний прямоугольной пластины под действием системы поперечных нагрузок (управляющих и возмущающих) по аналогии с [6] можно записать следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^N P_i(x, y, t) + \sum_{i=1}^{N_c} P_i^c(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w_0) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w_0) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \end{array} \right.$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; & \nabla_1^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}; & \varphi_{xy} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \\ \psi_{xy} &= \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; & I &= h^3/12; & G' &= k'G. \end{aligned}$$

Укажем, что  $\sum_{i=1}^N P_i(x, y, t)$  – система возмущающих нагрузок (в настоящей работе – две сосредоточенные нагрузки  $P_1(x, y, t)$  и  $P_2(x, y, t)$ , приложенные в двух различных точках, причем  $P_1(t) \neq P_2(t)$ ); а  $\sum_{i=1}^{N_c} P_i^c(x, y, t)$  – система управляющих нагрузок (для активного «гашения»).

Данная система решается аналитически с помощью разложения искомых функций перемещения в двойные ряды Фурье по тригонометрическим функциям с использованием интегрального преобразования Лапласа для коэффици-

циентов разложения, зависящих от времени. В результате для прогиба решение прямой задачи получается в виде суммы интегралов Дюамеля (сверток):

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \quad (1)$$

где  $K_i^W(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn}(t)$  – со-

ответствующее ядро интегралов Дюамеля.

В приведенных выражениях

$$\lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right); \quad a = \frac{G'}{\rho}; \quad b = \frac{G'h}{\rho \cdot J}; \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J};$$

$$\Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2(a+d) + b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4};$$

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2(a+d) + b) + \Delta_{kn}]}; \quad \Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}};$$

$$\omega_{2kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2(a+d) + b) - \Delta_{kn}]}; \quad \Omega_{2kn} = -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.$$

### Определение управляющих нагрузок (воздействий)

Так как требуется «гасить» колебания по всей срединной плоскости пластины, то в качестве критерия управления можно выбрать:  $w(x, y, t) \rightarrow 0$  (уменьшение значений прогибов). Следовательно в предельном случае можно выбрать следующие выражения:  $w(x_{cj}, y_{cj}, t) = 0$ , где  $(x_{cj}, y_{cj})$  – точки приложения управляющих воздействий.

Используя решение прямой задачи для прогибов (1) и критерии управления для четырех управляющих воздействий можно получить систему четырех интегральных уравнений Вольтерра I рода:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^W(x_{cj}, y_{cj}, t - \tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^W(x_{cj}, y_{cj}, t - \tau) d\tau. \quad (2)$$

Система интегральных уравнений (2) в матричном виде такова:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} \\ \mathbf{A}_{41} & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{c1} \\ \mathbf{P}_{c2} \\ \mathbf{P}_{c3} \\ \mathbf{P}_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1} \mathbf{A}0_{1i} \mathbf{P}_i \\ \sum_{i=1} \mathbf{A}0_{2i} \mathbf{P}_i \\ \sum_{i=1} \mathbf{A}0_{3i} \mathbf{P}_i \\ \sum_{i=1} \mathbf{A}0_{4i} \mathbf{P}_i \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Входящие в (3) матрицы  $\mathbf{A}_{ij}$ ,  $\mathbf{A}0_{ij}$  являются дискретными аналогами интегральных операторов, входящих в уравнения (2).

Для решения системы уравнений (3) относительно искомым функций  $P_{cj}(t)$  разработан специальный метод решения, который базируется на использовании обобщенного алгоритма Крамера для блочной матрицы  $\mathbf{A}$  и регуляризирующего алгоритма А.Н.Тихонова [7] при обращении матриц. При выполнении процедуры регуляризации для (3) параметры регуляризации находятся на основании минимизации соответствующих функционалов изменения прогибов в каждой точке управления (в зависимости от управляющих воздействий) с учетом ограничения суммарного (по модулю) управляющего воздействия.

### Численные результаты «гашения» системой из четырех нагрузок

Численные расчеты производились при следующих значениях параметров:  $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$ ;  $E = 2,07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $h = 0,04 \text{ м}$ ;  $l = 1,2 \text{ м}$ ,  $m = 0,8 \text{ м}$ . Координаты точек приложения возмущающих нагрузок:  $x_{01} = 0,1 \text{ м}$ ;  $y_{01} = 0,25 \text{ м}$ ;  $x_{02} = 1 \text{ м}$ ;  $y_{02} = 0,5 \text{ м}$ .

Координаты приложения системы управляющих нагрузок:  $x_{C1} = 0,4 \text{ м}$ ;  $y_{C1} = 0,2 \text{ м}$ ;  $x_{C2} = 0,4 \text{ м}$ ;  $y_{C2} = 0,6 \text{ м}$ ;  $x_{C3} = 0,8 \text{ м}$ ;  $y_{C3} = 0,6 \text{ м}$ ;  $x_{C4} = 0,8 \text{ м}$ ;  $y_{C4} = 0,2 \text{ м}$ .

Координаты центра пластины:  $x_m = 0,6 \text{ м}$ ,  $y_m = 0,4 \text{ м}$ .

На рис. 2 и 3 представлены результаты численных расчетов.

На рис. 2, *а* показаны изменения во времени прогибов пластины в точках приложения управляющих нагрузок и в центре пластины при условии, что действует только система возмущающих нагрузок (группа кривых 1). Кривые 1 рис. 2, *а* получены при отсутствии управляющих воздействий, а кривые 2 рис. 2, *а* соответствует приложению четырех управляющих воздействий, закон изменения во времени, которых найден в результате решения обратной задачи управления.

На рис. 2, *б* показаны изменения во времени двух внешних возмущающих сил изменяющихся, как «полуволна синусоиды» (кривая P1) и «прямоугольная ступенька конечной продолжительности» (кривая P2), а также четырех управляющих воздействий (кривые Pс1–Pс4 соответственно).

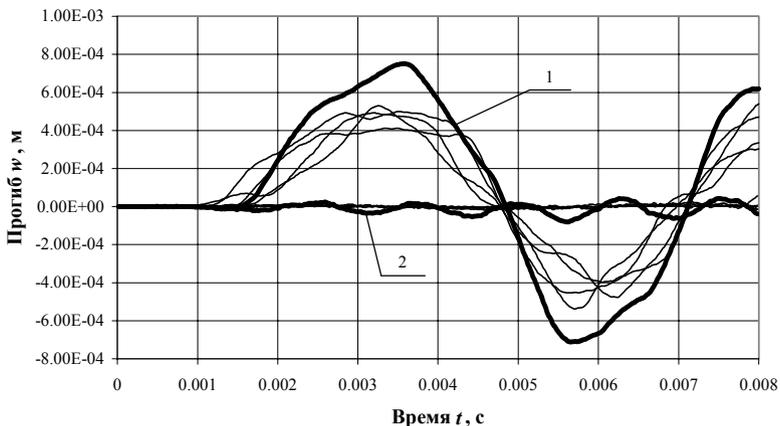
Рис. 3 демонстрирует распределение прогибов в срединной плоскости пластины (двумерная эпюра) в момент времени  $t = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ . Рис 3, *а* соответствует случаю, когда отсутствует управляющее воздействие, а на пластину воздействуют только возмущающие импульсные нагрузки. А рис. 3, *б* соответствует случаю, когда осуществляется управление – приложена система тех же возмущающих и четырех «гасящих» нагрузок.

Укажем, что для приведенного расчета (см. рис. 3) величина максимального прогиба уменьшается более чем в 3 раза, а величина суммарного прогиба пластины уменьшается почти в 8 раз:

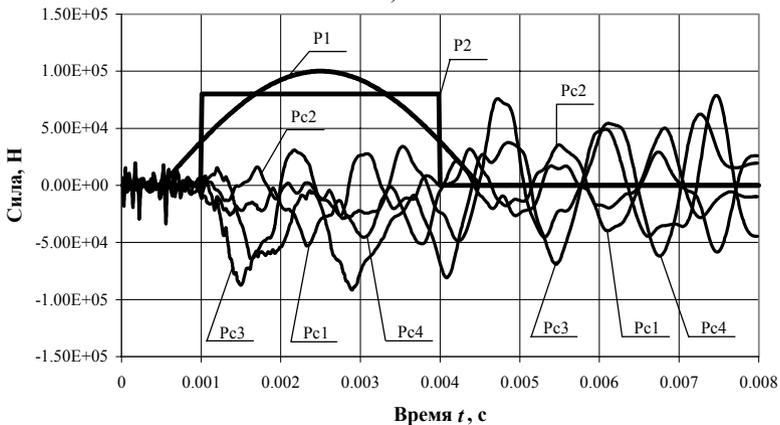
$$\frac{w_{\Sigma}}{w_{C\Sigma}} = 7,756, \text{ где } w_{\Sigma} = \sum_x \sum_y w(x, y) -$$

суммарный прогиб пластины, в случае, когда приложены только возмущающие силы;  $w_{C\Sigma} = \sum_x \sum_y w(x, y)$  – суммарный прогиб пластины в случае, когда

осуществляется активное «гашение».



а)



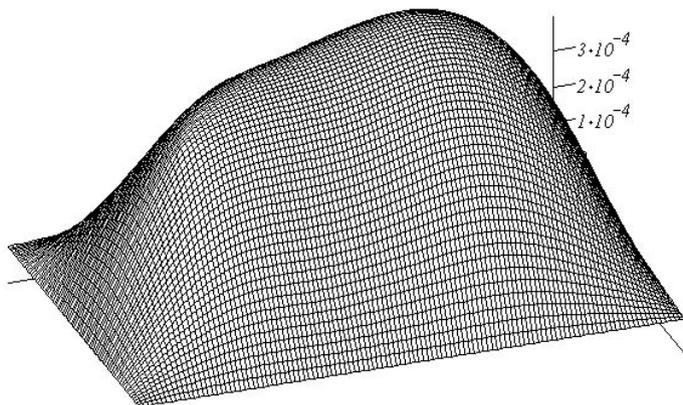
б)

Рисунок 2 – Результаты управления

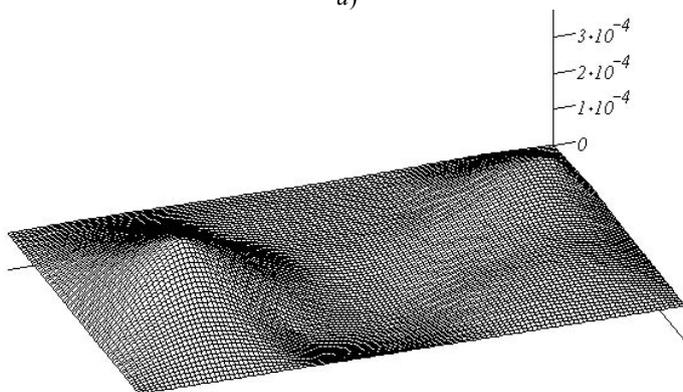
### Резюме

Применение современной теории обратных задач позволяет получить решения ряда важных и практически ориентированных задач механики деформируемого твердого тела. Представленная в статье задача по управлению нестационарными колебаниями пластины (сходной с активной виброзащитой), содержит принципиальные элементы новизны. В данной работе показана возможность уменьшения значений прогибов во времени на всей поверхности прямоугольной пластины, что является новой постановкой по сравнению с алгоритмами управления колебаниями только в одной точке. Дальнейшие исследования могут быть связаны с улучшением и оптимизацией предло-

женной схемы «гашения» и в конечном итоге могут внести определенный вклад в общую проблему активной виброзащиты элементов конструкций и их систем.



а)



б)

Рисунок 3 – Распределение прогиба

**Список литературы:** 1. *Kapurja S., Dumir P.C.* Coupled FSDT for piezotermoelectric hybrid rectangular plate. – *Int. J. Solids and Struct.* – 2000. – 37, № 42. – С. 6131-7153. 2. *He X.Q., Ng T.Y., Sivashanker S., Liew K.M.* Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators. – *Int. J. Solids and Struct.* – 2001. – 38, № 9. – С. 1641-1655. 3. *Saadat S., Noori M. u др.* Using NiTi SMA tendons for vibration control of coastal structures. – *Smart Mater. and Struct.* – 2001. – 10, № 4. – С. 695-704. 4. *Chen Lin-Hung, Huang Shyh-Chin* Vibration attenuation of a cylindrical shell with constrained layer damping strips treatment. – *Comput. and Struct.* – 2001. – 79, № 14. – С. 1355-1362. 5. *Voropay A.V., Yanyutin Ye.G.* Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. – *Int. J. Solids and Struct.* – 2004. – 41. – С. 4919-4926. 6. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с. 7. *Тихонов А.Н., Гончаровский А.В.* и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с.

Поступила в редколлегию 08.10.2007.