

*Н.Н.ТКАЧУК*, НТУ «ХПИ»

## **К ВОПРОСУ О ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА**

У статті запропоновано один спосіб отримання серії еталонних рішень для кругового циліндра. З їх допомогою на двох типах поверхневого навантаження було перевірено одну скінченноелементну модель.

In the paper the construction of a series of master solutions for circular cylinder is discussed. These solutions were applied to verify a finite element model with two cases of boundary loading.

**Введение.** Результаты конечноэлементного моделирования механических систем, в которых присутствует контакт упругих тел, являются чувствительными к качеству конечноэлементной сетки и параметрам расчетной схемы. Погрешности модели и ошибки при ее построении могут приводить к внешне правдоподобным, но неверным результатам. Таким образом, проведение достоверного и точного анализа любой сложной конструкции требует верификации ее расчетных моделей.

Одним из способов проверки адекватности модели исследуемому объекту является сравнение получаемых с помощью нее результатов с известными точными решениями или экспериментальными данными. В случаях, когда поставленная задача анализа не имеет точного решения, можно говорить о проверке методики построения КЭ модели на тестовых задачах. При их выборе требуется максимально учесть характер геометрии тел, способ приложения нагрузок и свойства материала в оригинальной задаче. При сохранении основных особенностей исследуемой механической системы в постановке проверочной задачи можно предполагать, что критерии, обеспечивающие требуемую точность решения этой тестовой задачи, можно распространить и на построение моделей исходной конструкции.

В статье обсуждается один способ получения серии эталонных решений для кругового цилиндра. Их назначение – создание моделей объектов, содержащих детали цилиндрической формы, пребывающие в контакте, которые бы точно описывали их деформирование при приложении к ним действующих в конструкции нагрузок, в том числе контактных давлений.

**Постановка задачи.** Для решения плоских задач теории упругости рядом авторов в середине XX в. был разработан математический аппарат, основанный на методах теории функций комплексной переменной [1, 2]. В настоящее время он мало используется при проведении инженерных и исследовательских расчетов, поскольку сфера его применения и возможности значительно меньше, чем у современных средств компьютерного моделирования.

Тем не менее, для получения эталонных решений в этой работе задействован именно этот аппарат. В его рамках используются известные аналитические представления перемещений, напряжений и деформаций. При их получении плоскость сечения тела, пребывающего в состоянии плоской деформации, отождествляют с комплексной плоскостью так, что точке с координатами  $(x_1, x_2)$  ставится в соответствие комплексное число

$$z = x_1 + ix_2. \quad (1)$$

При этом перемещения точек тела представляется функцией этой комплексной переменной:

$$w(z) = u_1 + iu_2, \quad (2)$$

вещественная и мнимая части которой совпадают с компонентами  $u_1$  и  $u_2$  вектора перемещений.

Согласно формуле Колосова-Мусхелишвили [1] перемещения в теле при плоской деформации в отсутствие объемных сил в произвольном случае выражаются через две голоморфные функции  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$2\mu w(z) = 2\mu(u_1 + iu_2) = \chi\varphi(z) - z\overline{\varphi}(\bar{z}) - \overline{\psi}(\bar{z}), \quad z \in \Omega. \quad (3)$$

Здесь  $\chi = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\nu$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ляме, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\Omega$  – область, занимаемая сечением тела.

Перемещения, получаемые из представления (3), заведомо удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению упругой статики. Таким образом, от функции  $w$  остается лишь требовать выполнения краевых условий.

**Аналитическое решение.** Для первой основной задачи теории упругости, в которой усилия на границе тела являются заданными, эти условия имеют следующий вид [2]:

$$f_k = f_{1k} + i f_{2k} = \varphi(z) + z\overline{\varphi}(\bar{z}) + \overline{\psi}(\bar{z}), \quad z \in \Gamma_k, \quad (4)$$

где  $\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k$  – граница тела, состоящая в случае многосвязности области  $\Omega$  из нескольких контуров,  $f_k$  – функции, определяемые на каждом из контуров  $\Gamma_k$  через компоненты  $T_1$  и  $T_2$  граничных усилий как

$$f_k = f_{1k} + i f_{2k} = i \int_0^s (T_1 + iT_2) ds. \quad (5)$$

Для единичного круга функциями  $\varphi$  и  $\psi$ , удовлетворяющими краевому условию (4), являются [2]

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f d\sigma}{\sigma - z} - \frac{z}{4\pi i} \int \frac{f d\sigma}{\sigma^2} - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f d\sigma}{\sigma}; \quad (6)$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{f} d\sigma}{\sigma - z} - \frac{\varphi'(z) - \varphi'(0)}{z} \quad (7)$$

для  $z \in S_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ . Здесь  $\varphi'(0) = \frac{1}{4\pi i} \int \frac{f d\sigma}{\sigma^2}$ .

Эти функции вместе с их производными непрерывны на границе круга и принимают на ней следующие значения:

$$\varphi(\sigma_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int \frac{f d\sigma}{\sigma - \sigma_0} + \frac{1}{2} f(\sigma_0) - \frac{z}{4\pi i} \int \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma^2} - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f d\sigma}{\sigma}; \quad (8)$$

$$\psi(\sigma_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int \frac{\bar{f} d\sigma}{\sigma - \sigma_0} + \frac{1}{2} \bar{f}(\sigma_0) - \frac{\varphi'(\sigma_0) - \varphi'(0)}{\sigma_0}; \quad (9)$$

$$\varphi'(\sigma_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int \frac{f' \bar{\sigma} d\sigma}{\sigma - \sigma_0} + \frac{1}{2} f'(\sigma_0) \frac{\bar{\sigma}_0}{i} - \frac{1}{4\pi i} \int \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma^2}; \quad (10)$$

$$\psi'(\sigma_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int \frac{\bar{f}' \bar{\sigma} d\sigma}{\sigma - \sigma_0} + \frac{1}{2} \bar{f}'(\sigma_0) \frac{\bar{\sigma}_0}{i} - \frac{\varphi''(\sigma_0) - (\varphi'(\sigma_0) - \varphi'(0))}{\sigma_0^2}; \quad (11)$$

$$\varphi''(\sigma_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int \frac{-\sigma^2 [f'' - i f'] d\sigma}{\sigma - \sigma_0} - \frac{1}{2} \sigma_0^2 [f''(\sigma_0) - i f'(\sigma_0)], \quad (12)$$

В приведенных выше равенствах под *v.p.* следует понимать главную часть сингулярного интеграла типа Коши, определенного для произвольной гельдеровой функции  $\xi \in C^{\nu, \alpha}(\Gamma)$  как предел

$$\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{\xi d\sigma}{\sigma - \sigma_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \cup \varepsilon(\sigma_0)} \frac{\xi d\sigma}{\sigma - \sigma_0}. \quad (13)$$

Следует заметить, что в правых частях этих равенств содержатся только известные функции. Таким образом, система соотношений (8)-(12) позволяет в явном виде вычислить граничные значения голоморфных функций  $\varphi$  и  $\psi$  и их производных. По этим граничным значениям можно восстановить значения  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ , а также  $\psi$  и  $\psi'$  внутри круга, поскольку все они голоморфны и внутри круга совпадают с соответствующими интегралами Коши:

$$\zeta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\zeta(\sigma) d\sigma}{\sigma - z}, \quad z \in S_1(0), \quad \zeta = \{\varphi, \varphi', \varphi'', \psi, \psi'\}. \quad (14)$$

Искомые перемещения могут быть найдены по формуле Колосова-Мухели-швили как на границе, так и внутри круга. Более того, используя соотношения [1]

$$\sigma_{11} = 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) - \operatorname{Re}(\bar{z} \varphi''(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})), \quad (15)$$

$$\sigma_{22} = 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) + \operatorname{Re}(\bar{z} \varphi''(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})), \quad (16)$$

$$\sigma_{12} = \operatorname{Im}(\bar{z} \varphi''(z) + \bar{\psi}'(\bar{z})), \quad (17)$$

легко находятся и напряжения (а вместе с ними и деформации).

**Численная схема.** Приведенное выше решение, хоть и является явным, обладает одним существенным недостатком: для произвольной уравновешенной нагрузки сингулярные интегралы в правых частях равенств (8)-(12) и интегралы Коши (14) не вычисляются аналитически. Тем не менее, они допускают применение приближенных квадратурных формул интерполяционного типа с равноотстоящими узлами [3, 4]. Следуя [3], рассмотрим два семейства узловых точек на интервале  $[0, 2\pi]$ :

$$p_k^n = \frac{2k}{2n+1}\pi, k = \overline{0, 2n}, \quad (18)$$

$$p_{0j}^n = \frac{2j+1}{2n+1}\pi, j = \overline{0, 2n}. \quad (19)$$

Тогда для произвольной гельдеровой  $2\pi$ -периодической функции  $\xi \in C^{r,\alpha}[0, 2\pi]$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) приближенно выполняется:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\theta \cong \sum_{k=0}^{2n} \xi(p_k^n) \frac{1}{2n+1}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \xi(\theta) d\theta \cong \sum_{\theta_0 = p_{0j}^n}^{2n} \text{ctg} \frac{p_k^n - p_{0j}^n}{2} \xi(p_k^n) \frac{1}{2n+1}. \quad (21)$$

Равенства (20), (21) являются точными для тригонометрических полиномов порядка  $n$ . В общем же случае допускаемую в них погрешность можно оценить как  $O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha+1}}\right) n \rightarrow \infty$  [3,4]. В результате находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int \frac{\xi(\sigma) d\sigma}{\sigma - \sigma_0} d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi(\theta)}{1 - e^{i(\theta_0 - \theta)}} d\theta \Big|_{\theta_0 = p_{0j}^n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\xi(p_k^n)}{1 - e^{i(p_{0j}^n - p_k^n)}} \frac{1}{2n+1}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\xi(\sigma) d\sigma}{\sigma - z} \Big|_{\sigma = \exp(i\theta)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\xi(\theta) e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z} d\theta = \sum_{\theta_0 = p_{0j}^n}^{2n} \frac{\xi(p_k^n) e^{ip_k^n}}{e^{ip_k^n} - z} \frac{1}{2n+1}. \quad (23)$$

Видно, что при  $z = e^{ip_{0j}^n}$  правые части в формулах (22) и (23) совпадают. Тем не менее, эти формулы имеют различный смысл: первая дает приближенное значение сингулярного интеграла в узловых точках на границе единичного круга, а вторая – регулярного интеграла с ядром Коши во внутренних точках круга. Более того, формула (23) становится неприменимой при  $z: |z| > 1 - \frac{2\pi}{2n+1}$ , то есть в точках внутренности круга, расстояние от которых до границы сравнимо с расстоянием между соседними узловыми точками.

Для них ядро  $\frac{1}{\sigma - z}$  становится настолько близким к сингулярному, что погрешность в формуле (23) начинает составлять до 50 %.

Итак, примененные одна на границе, а другая внутри круга квадратурные формулы (22), (23) позволяют вычислить с высокой точностью правые части в соотношениях (8)-(12) и (14). Полученные таким образом значения голоморфных функций  $\varphi$ ,  $\psi$  и их производных и вычисленные по ним величины перемещений, деформаций и напряжений предлагается использовать в качестве эталонного решения. Его преимуществами являются контролируемая точность вычисления как перемещений, так и напряжений, непрерывность и относительная малость вычислительных затрат, требующихся для его получения.

**Пример реализации.** Применение эталонных решений при построении конечноэлементных моделей продемонстрируем на примере двух видов нагрузки: распределенной по всей границе кругового цилиндра (рис. 1) и сосредоточенной на малой ее части (рис. 2).

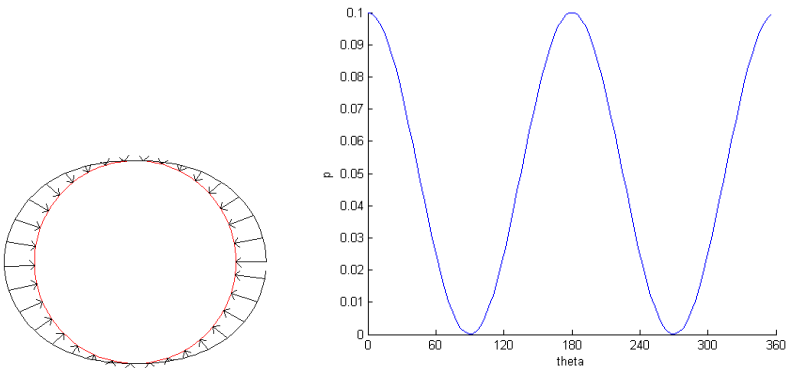


Рисунок 1 – Распределение давления на границе круга в первой задаче

В первом случае нормальное давление, приложенное к границе цилиндра, задается следующим:

$$p(\theta) = p_0 \cos^2(\theta) \sim \begin{cases} T_1 = -p_0 \cos^2(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ T_2 = -p_0 \cos^2(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad (24)$$

Во втором рассматривалась нормальная нагрузка вида:

$$p(\theta) = \begin{cases} p_0 \sqrt{1 - \sin^2(\theta) / \sin^2(\alpha)}, |\sin(\theta)| < |\sin(\alpha)| \\ 0, |\sin(\theta)| \geq |\sin(\alpha)| \end{cases} \sim \begin{cases} T_1 = -p(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ T_2 = -p(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad (25)$$

Ставилась задача проверки качества одной конечноэлементной модели

(рис. 3) на этих двух случаях поверхностного нагружения и ее применимости для решения задач, в которых усилия распределяются по всей границе цилиндрического тела (1-й случай) или на небольшой ее части (2-й случай).

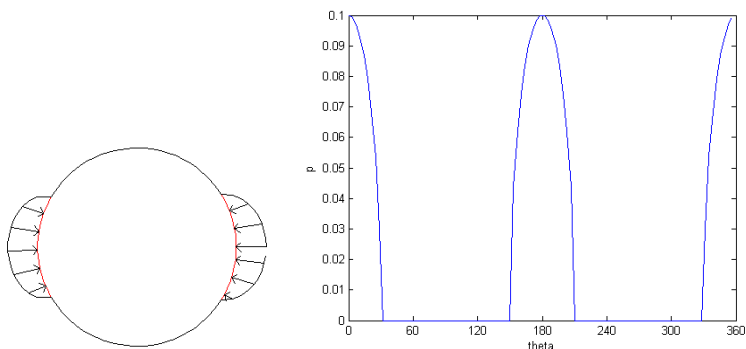


Рисунок 2 – Распределение давления на границе круга во второй задаче

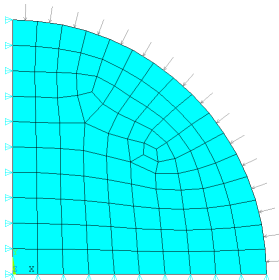
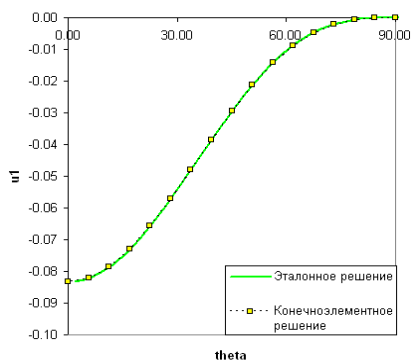


Рисунок 3 – Проверяемая конечноэлементная модель

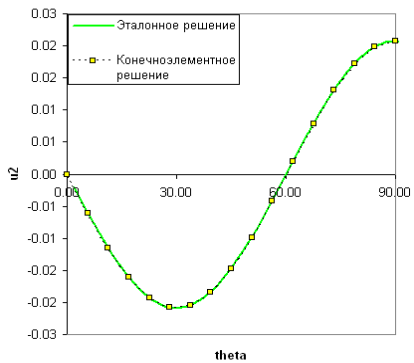
Как в эталонном, так и в конечноэлементном решении принимались следующие безразмерные величины основных параметров:  $R = 1$  – радиус цилиндра,  $E = 1$  – модуль упругости,  $\nu = 0,25$  – коэффициент Пуассона,  $p_0 = 0,1$  – максимальная величина давления, прикладываемого на границе.

Для этих значений в каждом из случаев нагружения были получены перемещения в цилиндре и на его границе, а также распределения напряжений. Ниже приведены результаты сравнения компонент перемещений  $u_1$  и  $u_2$  на границе (рис. 4, 6) и распределения эквивалентных напряжений (рис. 5, 7), получаемых из конечноэлементного решения, с эталонными их значениями.

Эти результаты наглядно демонстрируют, что применение эталонных решений позволяет обосновывать выбор конечноэлементной сетки для произвольного вида нагрузок и типов задач. Естественно, что для реальных контактных задач, в которых градиенты давлений, а вместе с ними перемещений и напряжений, выше, чем в рассмотренных здесь двух случаях, верификации

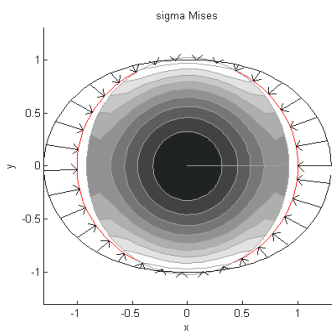


а

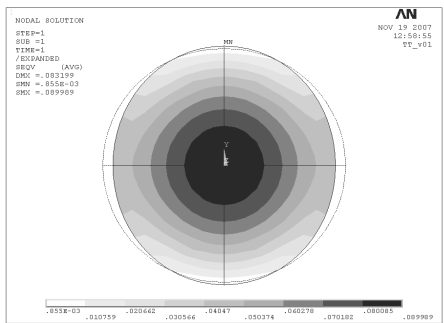


б

Рисунок 4 – Сравнение перемещений  $u_1$  (а) и  $u_2$  (б) на границе круга для эталонного и конечноэлементного решений первой тестовой задачи

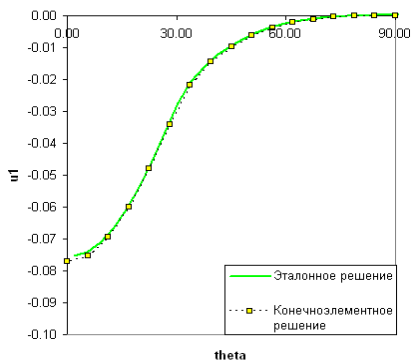


а

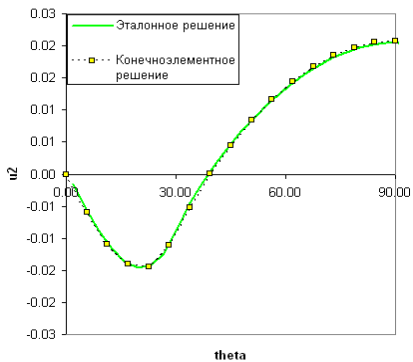


б

Рисунок 5 – Распределение эквивалентных напряжений, отвечающие эталонному (а) и конечноэлементному (б) решениям первой тестовой задачи



а



б

Рисунок 6 – Сравнение перемещений  $u_1$  (а) и  $u_2$  (б) на границе круга для эталонного и конечноэлементного решений второй тестовой задачи

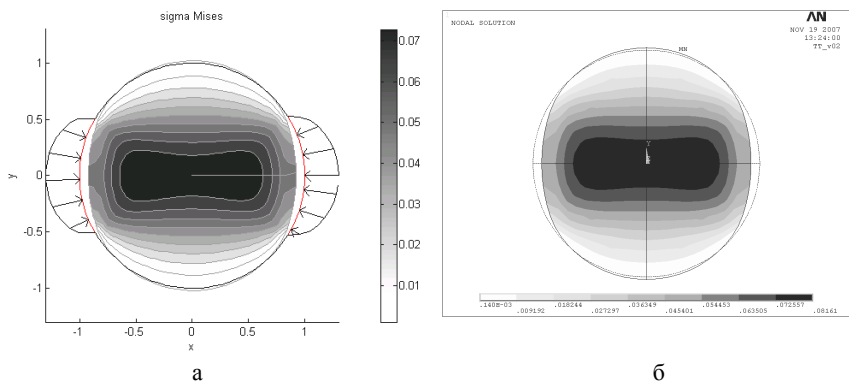


Рисунок 7 – Распределение эквивалентных напряжений, отвечающие эталонному (а) и конечноэлементному (б) решениям второй тестовой задачи

будут подвергаться конечноэлементные модели со сгущением узлов сетки в районе контакта.

**Вывод.** В работе обосновано применение эталонных решений для верификации конечноэлементных моделей конструкций, содержащих детали цилиндрической формы.

Для получения этих решений предложена численная схема, основанная на известном решении первой основной задачи теории упругости для кругового цилиндра и применении квадратурных формул интерполяционного типа.

Преимуществом такого подхода является то, что он использует аналитические представления для перемещений и напряжений в упругом теле и допускает разнообразие типов поверхностной нагрузки. Это обуславливает его универсальность и широту области применений.

**Список литературы:** 1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 712 с. 2. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. 3. *Гандель Ю.В.* Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: ХНУ, 2001. – 92 с. 4. *Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С.* Математические вопросы метода дискретных токов. Часть II. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145 с.

*Поступила в редколлегию 21.11.2007*