

**В.П.ОЛЬШАНСЬКИЙ**, докт. фіз.-мат. наук ХНТУСГ;

**В.І.ЛАВІНСЬКИЙ**, докт. тех. наук; **С.В.ОЛЬШАНСЬКИЙ**, НТУ «ХПІ»

## **ПРИСКОРЕННЯ ГАЗОВИМ ПОТОКОМ РУХУ КРАПЛІ, ЩО ВИПАРОВУЄТЬСЯ ЗА ЗАКОНОМ СРЕЗНЕВСЬКОГО**

Описано рух краплі, що випаровується, як матеріальної точки зменшувальної маси, нелінійним диференціальним рівнянням з перемінними коефіцієнтами. За допомогою спеціального перетворення при рівноперемінному русі газу знайдений аналітичний розв'язок задачі Коші у функціях Ейрі.

The motion of an evaporating drop, as material point of decreasing mass, is described by nonlinear differential equation with variable coefficients. After special transformation at equalvariable motion of gas the analytical solution of Cauchy problem is found in Airy functions.

**Актуальність теми і мета дослідження.** В техніці зустрічаються випадки, коли рух газу використовують для розгону часток рідини і утворення розпиленних струменів. Такі процеси мають місце в двигунах внутрішнього згорання [1], в ракетній техніці та авіації [2], в пожежній справі [3] й інших областях. На підставі числових методів створено достатньо складні моделі руху і розроблено алгоритми їх комп'ютерної реалізації [4,5]. Але це не виключає пошуку компактних аналітичних розв'язків спрощених задач цього класу. З досліджень у цьому напрямку вкажемо на роботи [6,7], в яких запропоновано аналітичні розв'язки задач в лінійній постановці, а також в нелінійній – без урахування випаровування краплі. Але при русі частки рідини в середовищі з високою температурою доводиться враховувати випаровування. Тому удосконалення існуючих розрахункових моделей руху краплі, яка випаровується, відноситься до актуальних задач.

**Постановка задачі.** Будемо вважати, що зменшення радіуса сферовидної частки у часі за рахунок випаровування описується формулою Срезневського

$$r(t) = r_0 \sqrt{1 - \varepsilon t},$$

в якій  $r(t)$  – поточний радіус краплі в момент часу  $t$ ;  $r_0$  – початковий радіус;  $\varepsilon$  – коефіцієнт, що характеризує швидкість випаровування; він залежить від температури газового середовища та інших чинників [8].

Силу аеродинамічної взаємодії частки з потоком газу приймаємо пропорційною площі міделевого перерізу сфери і квадрату її відносної швидкості польоту. Абсолютну швидкість потоку газу апроксимуємо виразом

$$V(t) = V + at,$$

у якому  $V$  і  $a$  деякі константи, що відповідає руху газу зі сталим прискоренням.

ренням (або сповільненим). За цих припущень швидкість руху краплі є розв'язком диференціального рівняння

$$\dot{v} - \frac{\beta}{r_0 \sqrt{1 - \varepsilon t}} (v - V - at)^2 = 0, \quad (1)$$

де  $\beta$  – безрозмірний коефіцієнт аеродинамічної взаємодії частки з газом; крапка над символом означає похідну за часом  $t$ .

Рівняння (1) доповнюємо початковою умовою

$$v(0) = v_0, \quad (2)$$

дотримуючись нерівності  $v \leq V + at$ .

**Побудова аналітичного розв'язку.** Введемо допоміжну функцію  $u(t) = v - V - at$ . Тоді  $\dot{v} = \dot{u} + a$  і замість (1) отримуємо

$$\frac{du}{dt} - \frac{\beta}{r_0 \sqrt{1 - \varepsilon t}} u^2 = -a. \quad (3)$$

Рівняння (3) є спеціальним рівнянням Рікатті. Для побудови його аналітичного розв'язку скористаємось новою змінною

$$\xi = \sqrt{1 - \varepsilon t}; \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\xi},$$

в результаті чого рівняння (3) набуває вигляду

$$\frac{du}{d\xi} + bu^2 = q\xi, \quad (4)$$

$$\text{де } b = \frac{2\beta}{\varepsilon r_0}; \quad q = \frac{2a}{\varepsilon}.$$

Позначивши через  $f = -bu$ , замість рівняння (4) отримуємо

$$\frac{df}{d\xi} - f^2 = -l\xi; \quad l = \sqrt[3]{bq}. \quad (5)$$

Щоб позбутися нелінійності в (5) вводимо нову функцію  $w(\xi)$ , таку що:

$$f = -\frac{1}{w} \frac{dw}{d\xi}; \quad \frac{df}{d\xi} = -\frac{w \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2}{w^2}.$$

Це дає

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - l^3 \xi w = 0. \quad (6)$$

Рівняння (6) має загальний розв'язок

$$w = c_1 Ai(l\xi) + c_2 Bi(l\xi). \quad (7)$$

де  $c_1, c_2$  – довільні сталі;  $Ai(x), Bi(x)$  – функції Ейрі.

Враховуючи вираз (7) і перетворення виконані раніше, одержуємо розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$v(t) = \frac{l}{b} \frac{c Ai'(l\xi) + Bi'(l\xi)}{c Ai(l\xi) + Bi(l\xi)} + V + at.$$

Тут  $Ai'(x)$ ,  $Bi'(x)$  – похідні функцій Ейрі.

Константу  $c = c_1(c_2)^{-1}$  визначаємо з початкової умови (2). Підставивши (8), в (2), отримуємо

$$c = \frac{(v_0 - V)Bi(l) - lb^{-1}Bi'(l)}{lb^{-1}Ai'(l) - (v_0 - V)Ai(l)}. \quad (9)$$

Визначення швидкості розгону краплі зводиться до використання таблиць функцій Ейрі та їх похідних [9-10].

Для визначення відстані, яку пролітає крапля за час  $t$ , треба взяти інтеграл

$$z(t) = \int_0^t v(t) dt. \quad (10)$$

Він не виражається у відомих функціях, тому для наближеного аналітичного обчислення (10) виділимо в ньому головну частину. З цією метою скористаємось асимптотикою функцій Ейрі та їх похідних при малих значеннях аргументу:

$$\begin{aligned} Ai(x) &\sim q_1 - q_2 x; & Bi(x) &\sim \sqrt{3}(q_1 + q_2 x); \\ Ai'(x) &\sim -q_2; & Bi'(x) &= \sqrt{3}q_2; \\ q_1 &= \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}; & q_2 &= \frac{1}{3^{1/3}\Gamma(1/3)}, \end{aligned}$$

де  $\Gamma(t)$  – гама-функція. На підставі виразів (9) і (10) знаходимо, що при  $a \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} c &\sim -\sqrt{3} \frac{(v_0 - V)(q_1 + q_2 l) - lb^{-1}q_2}{(v_0 - V)(q_1 - q_2 l) + lb^{-1}q_2}; \\ v_a(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} v(t) = \left[ b(\xi - 1) + \frac{1}{v_0 - V} \right]^{-1} + V. \end{aligned} \quad (11)$$

Інтеграл від  $v_a(t)$  виражається в елементарних функціях

$$S(t) = \int_0^t v_a(t) dt = Vt - \frac{r_0}{\beta} \left[ \sqrt{1 - \varepsilon t} - 1 + A \ln \left( \frac{A - \sqrt{1 - \varepsilon t}}{A - 1} \right) \right], \quad (12)$$

$$\text{де } A = 1 + \frac{1}{b(V - v_0)}.$$

При  $|at| \ll V$  модуль різниці  $\Phi(t) = z(t) - S(t)$  значно менший, ніж  $S(t)$ . Його легко оцінити за допомогою нерівності

$$|\Phi(t)| < t |v(t) - v_a(t)|.$$

У наближених розрахунках  $z(t)$  на інтервалі часу  $t \ll V/|a|$  можна прийняти

$$\Phi(t) \approx \int_0^t [v(t) - v_a(t)] dt \approx \frac{1}{2} t (v(t) - v_a(t)). \quad (13)$$

У підсумку розрахунок відстані розгону краплі зводиться до використання формули

$$z(t) = S(t) + \Phi(t). \quad (14)$$

Для випадку, коли прискорення  $a = 0$ , маємо розв'язки в елементарних функціях:

$$v(t) = v_a(t); \quad z(t) = S(t).$$

**Числові результати та їх аналіз.** Розглянемо, як впливає величина  $a$  на швидкість руху краплі. Для цього прийемо  $r_0 = 10^{-3}$  м;  $\varepsilon = 3 \text{ с}^{-1}$ ;  $\beta = 4 \cdot 10^{-3}$ ;  $v_0 = 0$ ;  $V = 30$  м/с.

Одержані графіки  $v(t)$  для різних  $a$  подано на рис. 1.

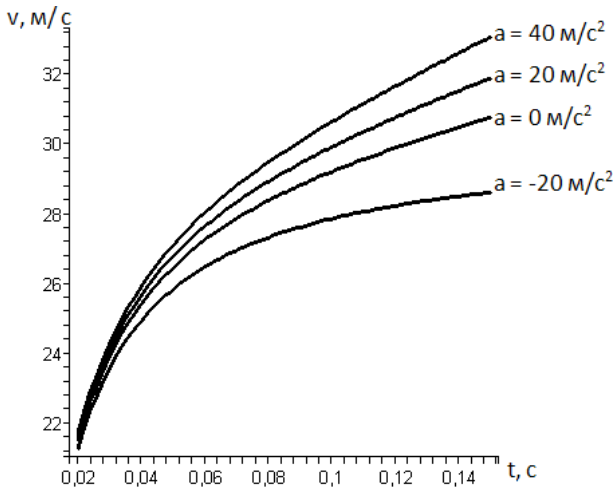


Рисунок 1 – Залежності швидкості краплі від часу для різних  $a$

Із рис. 1 видно, що зі збільшенням  $a$  криві істотно відрізняються одна від одної на відріжку, де швидкість краплі наближається до швидкості газу.

З'ясуємо характер зміни швидкості в часі при різних коефіцієнтах аеродинамічної взаємодії краплі з газом. Для цього прийемо попередні вихідні дані та  $a = 10$  м/с. Одержані графіки  $v(t)$  подано на рис. 2.

Розглянувши рис. 2, можна зробити висновок, що зі збільшенням коефіцієнта  $\beta$  швидкість частки досягає швидкості газу за коротший проміжок часу.

Порівняємо величини переміщень краплі, одержаних числовим інтегру-

ванням (10) та за допомогою формули (14). Для цього беремо попередні вихідні дані та різні  $a$  при  $t = 0,1$  с.

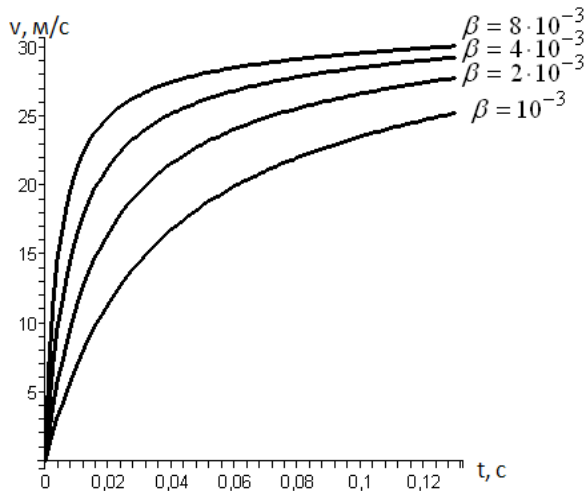


Рисунок 2 – Залежності швидкості краплі від часу для різних  $\beta$

Значення переміщень краплі, обчислених різними способами

$a, \text{м/с}^2$	-30	-20	-10	10	20	30
$z(0,1), \text{м}$	<u>2,281</u>	<u>2,310</u>	<u>2,341</u>	<u>2,403</u>	<u>2,435</u>	<u>2,468</u>
	2,279	2,309	2,339	2,405	2,439	2,475

У таблиці в чисельниках записано результати числового інтегрування, а у знаменниках – результати, одержані по формулі (14).

Виходячи з таблиці можна зробити висновок, що наближена формула (14) має високу точність.

**Висновки.** Запропоновані формули дозволяють обчислити параметри руху краплі, яка випаровується, без числового розв’язання задачі Коші. Висока точність наближених аналітичних розв’язків підтверджена шляхом порівняння результатів, до яких вони приводять, з результатами числового інтегрування.

**Список літератури:** 1. *Лышевский А.С.* Распыливание топлива в судовых дизелях. – Л.: Судостроение, 1971. – 248 с. 2. *Борисенко А.И., Селиванов В.Г., Фролов С.Д.* Расчет и экспериментальное исследование газожидкостного сопла при значительном содержании жидкости в газе. – Сб. научн. тр.: Вопросы газотермодинамики энергоустановок. – Вып. 1. – Харьков: ХАИ, 1974. – С. 83-93. 3. *Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А.* Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001. – 195 с. 4. *Стернин Л.Е.* Основы газодинамики двухфазных потоков в соплах. – М.: Машиностроение, 1974. – 211 с. 5. *Васильев Ю.Н.* Теория двухфазного

газожидкостного эжектора с цилиндрической камерой смешения // В кн.: Лопаточные машины и струйные аппараты. – Вып. 5 – М.: Машиностроение, 1971. – С. 175-261. **6.** Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Тищенко Л.М. Моделирование полету капель, які випаровуються при русі в газі. – Харків: Едена, 2006. – 203 с. **7.** Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Тищенко Л.М. Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків: Едена, 2007. – 303 с. **8.** Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Нижняя оценка дальности полета испаряющейся капли огнетушащей жидкости // И.Ф.Ж. – 2007. – 80, № 4. – С. 59-62. **9.** Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. **10.** Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

*Надійшла до редколегії 12.10.2007.*

УДК 531

**Н.В.ПЕРЕПЕЛКИН; Ю.В.МИХЛИН**, докт.физ.мат.наук; НТУ «ХПИ»

## **ПЕРЕХОДНЫЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ В СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ**

Розглядається перехідний процес у системі з обмеженим збудженням, в якій відбувається взаємодія між джерелом енергії (двигуном) та лінійною пружною підсистемою. Перехідний процес описується за допомогою метода багатьох масштабів. Розглядається можливість виходу на стаціонарні режими системи, в тому числі на резонансний режим одиначної кратності. Чисельне моделювання підтверджує ефективність отриманих аналітичних розв'язків.

Transient in a non-ideal system with limited excitation, where an interaction of engine and linear elastic subsystem takes place, is considered. The transient is described by the multiple scales method. Possibility of transfer to stationary regimes, including a resonance regime, is considered. Numerical simulation confirms an efficiency of the obtained analytical solutions.

**Вступление.** Важным классом моделей машин являются модели с упругими звеньями, учитывающие взаимовлияние машины и источника энергии. Решение задач об описании движения таких систем является непростой задачей ввиду того, что колебательные процессы, происходящие в механической части оказывают влияние на поведение источника энергии и наоборот. Системы, имеющие источник энергии, обратным влиянием на который со стороны связанной с ним упругой подсистемы нельзя пренебречь из-за его конечной мощности, называются системами с ограниченным возбуждением.

Рассмотрим некую механическую систему с источником энергии ограниченной мощности и попробуем выявить, что же принесет в поведение системы учет взаимовлияния источника энергии и упругой подсистемы.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются колебания системы, содержа-