

логического нагрева.

Существующий режим нагрева стандартного колеса не обеспечивает выполнение ограничений по расширению отверстия ступицы и по напряжениям; наличие пластических деформаций при сборке снижает прочность соединения с натягом колеса и оси. Оптимальный нагрев обеспечивает примерно такой же расход энергии, как и существующий режим нагрева, при выполнении всех ограничений и отсутствии пластических деформаций.

Применение биметаллического колеса приведет к снижению динамических нагрузок на рельс, так как все колесной пары снижается на 80 кг, жесткость биметаллического колеса в радиальном направлении составляет 49 % от жесткости стандартного. Жесткость биметаллического колеса в осевом направлении практически совпадает с жесткостью стандартного колеса.

**Список литературы:** 1. *Никольская Э.Н., Гречищев Е.С.* Влияние средних напряжений цикла на усталостную прочность колес подвижного состава // Вестник ВНИИ железнодорожного транспорта. – Коломна, 1976, № 3. – С. 13-15. 2. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М., Высшая школа, 1985. – 392 с. 3. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с. 4. *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике: в 2-кн. Кн. 2. – М.: Мир, 1986. – 320 с. 5. *Andreev A.G., Scepkin A.W., Langwitz F.* Untersuchung von Spannungen und Deformationen in Eisenbahnradern infolge induktiver Erwärmung bei der Montage. – Technische Mechanik, Вн. 15, Н. 4 1995. – S. 271-280. 6. *Никольская Э.Н., Гречищев Е.С., Герасимова А.К.* Исследование температурного и напряженного состояний цельнокатаного тепловозного колеса // Труды ВНИИ железнодорожного транспорта. – М.: 1970, № 34. – С. 184-197.

*Поступила в редколлегию 08.05.2003*

УДК 539.3

**Е.Г.ЯНЮТИН**, д-р техн. наук, НТУ «ХПИ»; **А.В.ВОРОПАЙ**, ХНАДУ

## **УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ МЕМБРАНЫ**

Пропонується спосіб керування нестационарними коливаннями прямокутної мембрани завдяки прикладенню додаткового керуючого навантаження, закон зміни за часом якого вважається невідомим. Поставлена задача зводиться до інтегрального рівняння Вольтера I роду, яке розв'язується чисельно з використанням метода регуляризації А. М. Тихонова. Наведено приклад гашення коливань у конкретній точці на мембрані.

The method of controlling non-stationary vibrations of rectangular membrane is presented. The control is based on loading the membrane by additional controlling force, whose function of change in time is unknown. The problem is reduced to the first-kind Volterra integral equation, which is solved numerically by Tikhonov regularization method. Example of the vibrations eliminating in one of the membrane points is considered.

Предположим, что на мембрану в заданной точке воздействует сосредоточенная импульсная нагрузка, закон изменения во времени которой известен и которая вызывает нестационарный колебательный процесс. На

колебания механической системы налагается дополнительное условие (критерий управления), отвечающее, например, отсутствию перемещению в некоторой точке. Для удовлетворения требуемого условия к мембране прилагается управляющая сила в некоторой третьей точке, закон изменения которой во времени естественно будет зависеть от возмущающей силы и налагаемого условия.

Задача управления нестационарными колебаниями мембраны состоит в определении закона изменения управляющей силы во времени для конкретной точки приложения этой силы.

Приведем постановку задачи для прямоугольной мембраны (рис. 1). Пусть точка приложения возмущающей силы  $P(t)$  имеет координаты  $x_0, y_0$ ; точка, в которой требуется управлять колебаниями –  $x_s, y_s$ ; а точка приложения управляющего воздействия  $G(t)$  –  $x_c, y_c$ .

Уравнение колебаний мембраны для рассматриваемого случая можно записать следующим образом [1]

$$a^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P(x, y, t) + G(x, y, t) \quad (1)$$

где в качестве нагрузок введены:

$$P(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) P(t) \quad \text{и} \quad G(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \delta(x - x_c) \delta(y - y_c) G(t),$$

причем  $P(t)$  – заданная функция, а  $G(t)$  – подлежащая определению.

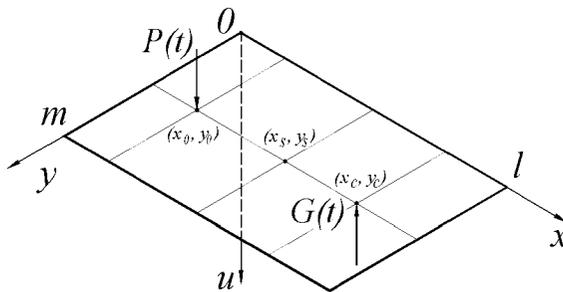


Рис. 1. Схема управления нестационарными колебаниями мембраны.

Решение уравнения (1) при нулевых начальных условиях для случая двух воздействующих на мембрану сил примет вид

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \times \left[ C_{kn}^P \int_0^t P(\tau) \sin \lambda_{kn}(t - \tau) d\tau - C_{kn}^G \int_0^t G(\tau) \sin \lambda_{kn}(t - \tau) d\tau \right], \quad (2)$$

$$\text{где } C_{kn}^P = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \sin \frac{k\pi \cdot x_0}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_0}{m}; \quad C_{kn}^G = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \sin \frac{k\pi \cdot x_c}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_c}{m}.$$

На основе (2) рассмотрим выражение для перемещения точки мембраны, в которой необходимо выполнить условие управления

$$u(x_s, y_s, t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau - \int_0^t G(\tau) K_G(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

$$\text{где } K_P(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^P}{\lambda_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \cdot \sin(\lambda_{kn} t);$$

$$K_G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^G}{\lambda_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \cdot \sin(\lambda_{kn} t).$$

Если условием управления является устранение колебаний в точке  $(x_s, y_s)$ , то есть  $u(x_s, y_s, t) = 0$ , то для нахождения управляющей силы необходимо решить следующее уравнение

$$\int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau = \int_0^t G(\tau) K_G(t - \tau) d\tau, \quad (4)$$

которое при известной функции  $P(t)$  и искомой  $G(t)$  является линейным интегральным уравнением Вольтерра первого рода. Следует отметить, что получение точного решения уравнения (4) для произвольной точки приложения управляющего воздействия невозможно, в силу «существенной» некорректности поставленной задачи. Однако, возможно построение приближенного решения, посредством описанного, например, в [2,3] регуляризирующего алгоритма Тихонова А. Н. Для этого запишем уравнение (4) в операторной форме

$$A_P \cdot p = A_G \cdot g, \quad (5)$$

где  $A_P$  – интегральный оператор, соответствует ядру  $K_G(t - \tau)$ ;  $A_G$  –  $K_G(t - \tau)$ ;  $p - P(t)$ ;  $g - G(t)$ .

В матричной форме СЛАУ, из которой находится приближенное решение уравнения (5), на основе методики изложенной в [2,3], можно записать так

$$(A_G^T A_G + \alpha C) \cdot g = A_G^T A_P \cdot p, \quad (6)$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $C$  – единичная трехдиагональная матрица, вид которой приведен [2,3].

Численный расчет управляющей силы был выполнен для случая, когда точка приложения управляющей силы находится между точкой приложения возмущающей силы и точкой управления. При расчетах принимались следующие параметры:  $l = 0,6$  м;  $m = 0,4$  м;  $a = 2800$  м/с;  $\max P(t) = 10^5$  Н;  $\alpha = 10^{-27}$ ;  $x_0 = 0,2$  м;  $y_0 = 0,2$  м;  $x_s = 0,3$  м;  $y_s = 0,2$  м;  $x_c = 0,25$  м;  $y_c = 0,2$  м. Ре-

зультаты решения СЛАУ (6) приведены на рис. 2, где на графике кривой 1 соответствует закон изменения во времени возмущающей силы, а кривой 2 – управляющей силы.

На рис. 3 представлено изменение во времени прогиба мембраны в точке управления, кривая 1 соответствует случаю, когда управляющее воздействие отсутствует, кривая 2 – случаю, когда осуществляется управление.

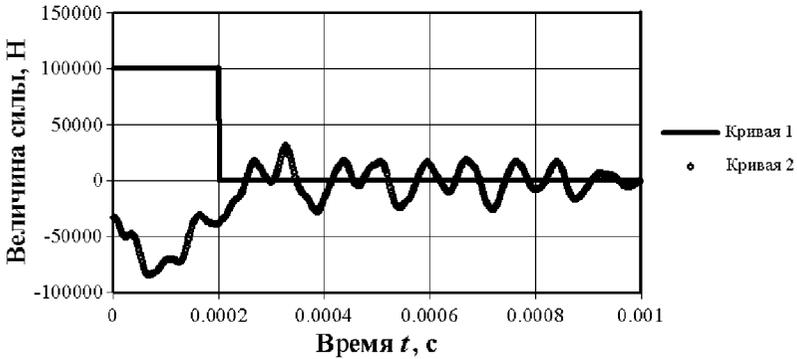


Рис.2. Изменение во времени возмущающей и управляющей сил.

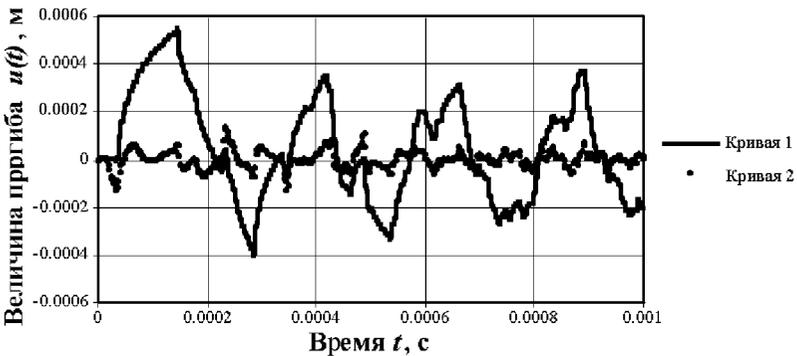


Рис. 3. Изменение прогиба во времени.

Далее приводятся графики распределения прогиба по поверхности мембраны в определенные моменты времени: рис. 4, а, б –  $t = 2 \cdot 10^{-5}$  с; рис. 4, в, г –  $t = 8 \cdot 10^{-5}$  с; рис. 4, д, е –  $t = 1,6 \cdot 10^{-4}$  с, следует также отметить, что приведенные слева графики соответствуют случаю, когда осуществляется управление (рис. 4, а, в, д), а справа – когда отсутствует управляющее воздействие (рис. 4, б, г, е).

На основании численного анализа по управлению (регулированию) прогиба мембраны в точке, которая является ее геометрическим центром, установлено, что способ управления содержащий алгоритм регуляризации является эффективным.

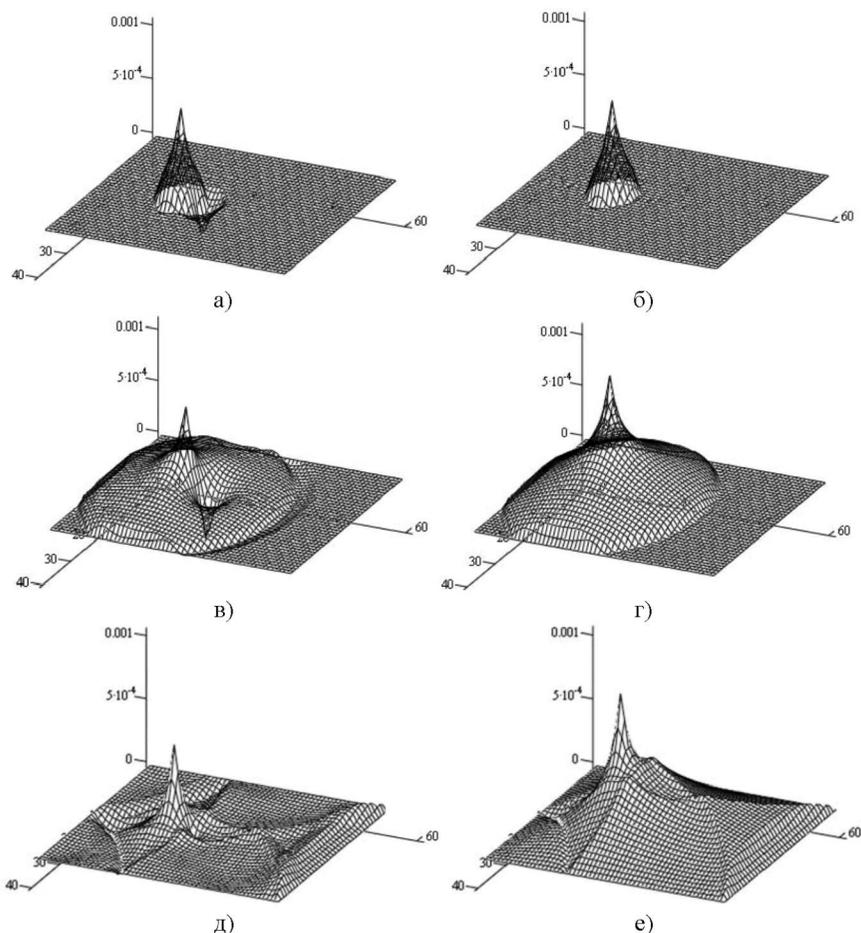


Рис. 4. Распределение прогибов по поверхности мембраны.

В случае рассмотренного варианта устранения колебаний в указанной точке удастся снизить амплитуды колебаний (по сравнению со случаем, когда отсутствует управляющая сила) в 3-20 раз (см. рис. 3).

Из представленных здесь соотношений вытекает, что варианты возможных схем управления, нетрудно обобщить на случаи управления не только прогибами, но и скоростями перемещений мембраны.

**Список литературы:** 1. Арамапович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 287 с. 2. Тихонов А.Н., Гончаровский А. В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. 1983. – 200 с. 3. Ялютин Е. Г., Янчевский И. В. Импульсные воздействия на угруго деформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с.

*Поступила в редколлегию 21.11.2002*