

рукций методом конечных элементов. Справочник. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с. 4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: *В.Н.Челомей* (пред). – М.: Машиностроение, 1981. – Т.6. Защита от вибрации и ударов. 1981. – 456 с.

*Поступила в редколлегию 14.04.2003.*

УДК 534

***С.Н.РЕШЕТНИКОВА; О.С.ГАЛАС***

## **АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЙ ВИБРОГАСИТЕЛЬ**

Концепція нелінійних нормальних форм коливань використовується при дослідженні коливань деяких пружних систем, що зв'язані з нелінійними пружкими пасивними віброгасителями. Виділені локалізовані форми коливань, що сприятливі для віброгасіння. Досліджена стійкість нелокальних форм. Розглянуто також вимушені коливання в подібних системах, аналізуються основні резонанси.

Concept of nonlinear normal modes is used to study vibrations of some elastic structures attached with single-DOF nonlinear elastic absorbers. The localized vibration modes favorable for the absorption are allocated. Stability of nonlocalized modes is investigated. The forced vibrations in such systems are considered also, the principal resonances are analyzed. Forced resonances of the systems under consideration are considered too.

### **1. Введение. Обзор литературы. Постановка задачи.**

Применение упругих виброгасителей является одним из наиболее распространенных способов защиты от вибраций и ударов [1,2]. Создание таких устройств, обладающих к тому же ограниченными размерами, является непростой технической проблемой. Решение проблем виброзащиты часто может быть обеспечено использованием пассивных элементов с нелинейными характеристиками [1]. Большое число публикаций, относящихся к решению различных задач теории и практики виброгашения, заставляют нас выделить лишь некоторые из них, в которых обсуждается использование пассивных виброгасителей для гашения вынужденных колебаний.

Во многих работах [2-7] для различных моделей элементов машин решается задача такого подбора конструктивных элементов (или параметров системы), который обеспечивает уменьшение амплитуд колебаний или уход от основного или субгармонических резонансов. Один из способов решения задачи – присоединить к рассматриваемой системе линейный или нелинейный осциллятор с одной степенью свободы, и подобрать его параметры так, чтобы резонансная частота вышла за пределы частотного диапазона системы. Скелетная кривая, как правило, определяется методом гармонического баланса или методами теории возмущений.

В работе [8] изучались резонансы при вынужденных колебаниях системы с нелинейным виброгасителем. В работе [9] осциллятор с нелинейным закре-

плением использовался для гашения вынужденных колебаний осциллятора Дуффинга. Общая теория линейных и нелинейных виброгасителей представлена в книге [1]. Использование вибро-ударных осцилляторов для гашения колебаний рассматривается в работах [10 и др.].

Опыт применения пассивных линейных виброгасителей показывает, что зачастую для того, чтобы удалить резонансные частоты из рабочего частотного диапазона системы, необходимо вводить в систему гаситель с достаточно большой массой, что чаще всего невозможно сделать в реальной системе. Поэтому представляет интерес задача использования в качестве гасителя колебаний существенно нелинейный осциллятор. Анализ вынужденных колебаний системы, включающей в себя именно такой элемент, и является предметом исследования в настоящей работе.

## 2. Основная модель.

Рассмотрим вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы, включающей в себя некоторую упругую систему, которая приближенно заменяется линейным упругим осциллятором, и связанный с этим линейным элементом виброгаситель в виде существенно нелинейного осциллятора (рис. 1). Предполагается, что масса гасителя существенно меньше, чем масса основной упругой системы. Уравнения динамики такой системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon m \ddot{x} + cx^3 + \gamma(x - y) = \theta; \\ M \ddot{y} + \omega^2 y + \gamma(y - x) = P_0 \cos kt, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x, y$  – обобщенные координаты, соответственно, нелинейного динамического гасителя и массы, колебания которой требуется погасить,  $m$  и  $M$  – массы элементов системы,  $\gamma$  – коэффициент связи между обобщенными координатами,  $P_0 \cos kt$  – гармоническое внешнее воздействие,  $\varepsilon$  – малый параметр.

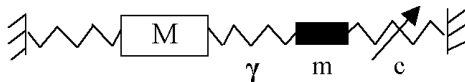


Рис. 1

В данной работе рассматривается процедура построения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) при различных вариантах выбора приближенного решения системы (1).

## 3. Гармоническая аппроксимация вынужденных колебаний системы.

Примем решение системы (1) в виде простейшей гармонической аппроксимации:

$$\begin{aligned} x &= a \cos kt; \\ y &= b \cos kt. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя решение (2) в систему (1), и выделяя коэффициенты при косинусах, получим следующую систему уравнений,

$$\begin{cases} -\varepsilon m a k^2 + \frac{3}{4} c a^3 + \gamma(a-b) = 0; \\ -M b k^2 + \omega^2 b + \gamma(b-a) - P_0 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

которая связывает амплитуды  $a$  и  $b$  и частоту внешнего воздействия  $k$ . Исключая амплитуду  $b$ , получаем уравнение, связывающее амплитуду  $a$  и частоту  $k$ :

$$-\varepsilon m a k^2 + \frac{3}{4} c a^3 + \gamma a - \frac{\gamma^2 a + P_0 \gamma}{\omega^2 + \gamma - M k^2} = 0.$$

Для конкретного расчета положим в этом уравнении  $M = 1$ ;  $\varepsilon m = 0,1$ ;  $c = 1$ ;  $\gamma = 1$ ;  $P_0 = 0,1$ ;  $\omega^2 = 1$ . АЧХ вынужденных колебаний нелинейного виброгасителя, а также скелетные линии соответствующей консервативной системы, изображены на рис. 2.

Аналогично, исключая из второго уравнения (3) амплитуду  $a$ , получаем уравнение, связывающее амплитуду  $b$  и частоту внешнего воздействия  $k$ :

$$-\frac{\varepsilon m k^2 b}{\gamma} (\omega^2 + \gamma - M k^2) + \frac{\varepsilon m k^2 P_0}{\gamma} + \frac{3c}{4\gamma} (b(\omega^2 + \gamma - M k^2) - P_0) + \omega^2 - M k^2 - P_0 = 0.$$

Используя те же, что и ранее, численные значения параметров системы, определим АЧХ вынужденных колебаний линейной упругой системы, изображенную вместе с соответствующими скелетными линиями, на рис. 3.

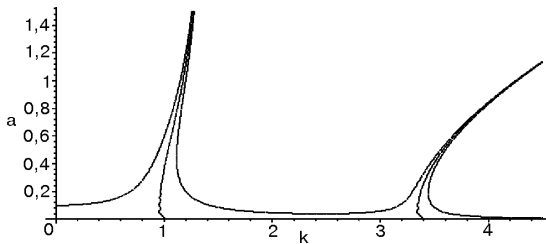


Рис. 2

Расчеты показывают, что уменьшение коэффициента нелинейности  $c$  приводит к увеличению амплитуд колебаний в области двух основных резонансов. Таким образом, выбор нелинейного осциллятора в качестве виброгасителя оказывается эффективным, если нелинейная жесткость достаточно велика. Кроме того, можно заметить, что в области второго резонанса амплитуда колебаний основной упругой системы намного меньше амплитуды колебаний виброгасителя, то есть, в этом частотном диапазоне происходит реальное гашение колебаний упругой системы.

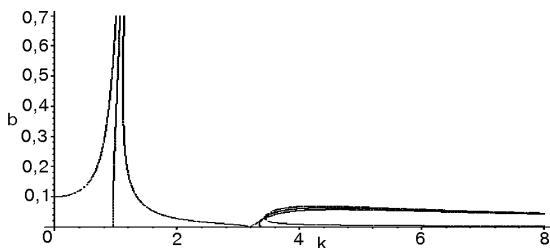


Рис. 3

#### 4. Затухающие вынужденные колебания.

Введем в исходную систему уравнений (1) слагаемое, содержащее трение. В результате получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon m \ddot{x} + \beta \dot{x} + cx^3 + \gamma(x - y) = 0; \\ M \ddot{y} + \beta \dot{y} + \omega^2 y + \gamma(y - x) = P_0 \cos kt. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\beta$  – коэффициент трения. Решение уравнений (4) будем искать в виде:

$$\begin{cases} x = a \cos(kt + \varphi_1); \\ y = b \cos(kt + \varphi_2). \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя (8) в (7) и приравнявая коэффициенты при  $\sin kt$  и  $\cos kt$ , получим систему нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными  $a$ ,  $b$ ,  $S_i$ ,  $C_i$ , где  $S_i = \sin \varphi_i$ ;  $C_i = \cos \varphi_i$ ;  $i = 1, 2$ . После некоторых преобразований эта система может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \varepsilon mak^2 S_1 - \beta ak C_1 - \frac{3}{4} ca^3 S_1 - \gamma a S_1 + \gamma b S_2 = 0; \\ -\varepsilon mak^2 C_1 - \beta ak S_1 + \frac{3}{4} ca^3 C_1 + \gamma a C_1 - \gamma b C_2 = 0; \\ Mb k^2 S_2 - \beta bk C_2 + \gamma a S_1 - \gamma b S_2 = 0; \\ -Mb k^2 C_2 - \beta bk S_2 - \gamma a C_1 + \gamma b C_2 - P_0 = 0; \\ S_1^2 + C_1^2 = 1; \\ S_2^2 + C_2^2 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Исключая из системы (6) переменные  $S_i$ ;  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , получим в результате такую систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \left( b^2 (Mk^2 - \omega^2 - \gamma) + a^2 \left( \frac{3}{4} ca^2 + \gamma - \varepsilon mk^2 \right) \right)^2 + (\beta k (a^2 + b^2))^2 = P_0^2 b^2; \\ \beta^2 k^2 a^2 + a^2 \left( \frac{3}{4} ca^2 + \gamma - \varepsilon mk^2 \right)^2 = \gamma^2 b^2. \end{cases} \quad (7)$$

Исключая  $b^2$ , получим нелинейное уравнение относительно амплитуды  $a$  и частоты внешнего воздействия  $k$ . На рис. 4 построена эта зависимость при следующих значениях  $M = 1$ ;  $\varepsilon m = 0,1$ ;  $c = 1$ ;  $\gamma = 1$ ;  $P_0 = 0,1$ ;  $\omega^2 = 1$ ;  $\beta = 0,005$ . На рис. 5

построена соответствующая АЧХ, связывающая амплитуду  $b$  и частоту  $k$ .

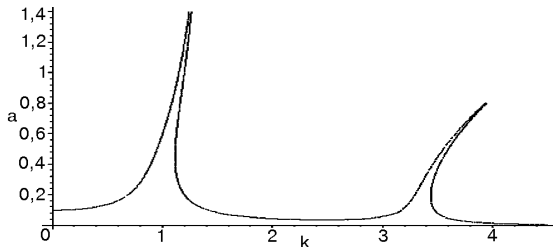


Рис. 4

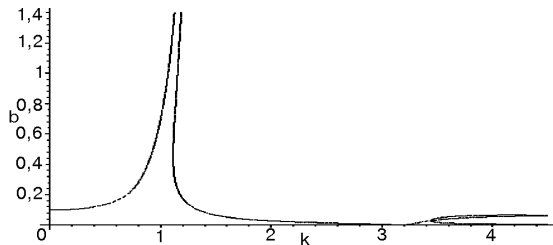


Рис. 5

### 5. Бигармоническое приближение вынужденных колебаний.

Для проверки точности гармонического приближения решения увеличим число гармоник в приближенном решении (без учета трения), а именно, выберем решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos kt + a_3 \cos 3kt; \\ y &= b_1 \cos kt + b_3 \cos 3kt. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив приближение (8) в систему (1) и приравнявая коэффициенты при первой и третьей гармониках косинуса, получим:

$$\begin{cases} -ma_1k^2 + \frac{3}{4}a_1^3c + \frac{3}{4}a_1^2a_3c + \frac{3}{2}a_1a_3^2c + \gamma a_1 - \gamma b_1 = 0; \\ -9mk^2a_3 + \frac{1}{4}a_1^3c + \frac{3}{2}a_1^2a_3c + \frac{3}{4}a_3^3c + \gamma a_3 - \gamma b_3 = 0; \\ -Mb_1k^2 + \omega^2b_1 + \gamma b_1 - \gamma a_1 - P_0 = 0; \\ -9Mb_3k^2 + \omega^2b_3 + \gamma b_3 - \gamma a_3 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Соотношения (9) позволяют получить АЧХ для различных гармоник решения. Зависимости  $a_1$  и  $a_3$  от частоты  $k$  при тех же значениях параметров системы, что и ранее, представлены на рис. 6 и 7. АЧХ на рис. 6 более точна, чем представленная ранее на рис. 2.

### 6. Устойчивость вынужденных колебаний

Для исследования устойчивости решений системы (1) выпишем систему уравнений в вариациях. Пусть  $x = x_0 + u$ ;  $y = y_0 + v$ , где  $u$  и  $v$  – малые отклонения от нормальной формы колебаний системы (1). Тогда имеем:

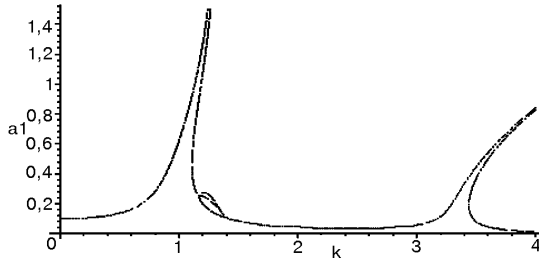


Рис. 6

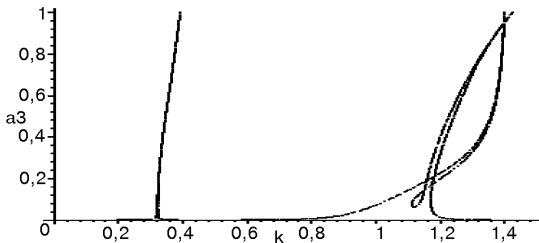


Рис. 7

$$\begin{cases} \varepsilon m \ddot{u} + 3c x_0^2 u + \gamma(u - v) = 0; \\ M \ddot{v} + \omega^2 v + \gamma(v - u) = 0. \end{cases}$$

Сохранив только члены, не содержащие  $\varepsilon$ , получим упрощенную систему вида

$$\begin{cases} 3c x_0^2 u + \gamma(u - v) = 0; \\ M \ddot{v} + \omega^2 v + \gamma(v - u) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Из первого уравнения системы (10) выразим  $u = \frac{v}{1 + \frac{3c}{\gamma} x_0^2}$  и подставим

это выражение во второе уравнение этой системы. В дальнейшем используем простейшую гармоническую аппроксимацию решения в форме (2). Получаем

$$M \ddot{v} + v \left[ \omega^2 + \gamma \left( 1 - \frac{1}{1 + 4\rho \cos^2 kt} \right) \right] = 0, \quad (11)$$

где  $\rho = \frac{3}{4} \cdot \frac{c a^2}{\gamma}$ .

Раскладывая функцию  $\frac{1}{1 + 4\rho \cos^2 kt} = a_0 + a_2 \cos 2kt + \dots$ , где  $a_0 = \frac{1}{r}$ ;

$a_2 = -\frac{2(r-1)}{r(r+1)}$ , в ряд Фурье и сохраняя в разложении только две первые гармоники, перепишем уравнение (11) (вводя замену переменных  $kt = \theta$ ) в следующем виде:

$$M v_{\theta\theta}'' k^2 + \nu [\omega^2 + \gamma(1 - a_0 - a_2 \cos 2\theta)] v = 0,$$

или

$$v_{\theta\theta}'' + [\delta^* + 2\varepsilon^* \cos 2\theta] v = 0, \quad (12)$$

$$\text{где } \delta^* = \frac{\omega^2}{Mk^2} + \gamma \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{1}{Mk^2}; \quad \varepsilon^* = \frac{\gamma(r-1)}{r(r+1)} \cdot \frac{1}{Mk^2}, \quad r = \sqrt{1+4\rho}.$$

Итак, исследование устойчивости решений системы (1) свелось к исследованию устойчивости решений хорошо известного уравнения Матье (12) [11 и др.], причем здесь не вводятся ограничения на амплитуду колебаний. Области устойчивости и неустойчивости решений этого уравнения достаточно хорошо известны. Дальнейший анализ был проведен при фиксированных значениях некоторых параметров:  $\varepsilon m = 0,1$ ;  $M = 1$ ;  $c = 1$ ;  $\omega^2 = 1$ ;  $\gamma = 1$ . Важно, что изменение этих фиксированных параметров не оказывает существенного влияния на решение задачи устойчивости. На рис. 8 отмечены пунктиром устойчивые и крестиком неустойчивые ветви АЧХ вынужденных колебаний. Характерно, что колебания вблизи первого резонанса оказываются неустойчивыми, а колебания вблизи второго – устойчивы. Таким образом, устойчивыми оказываются колебания, обеспечивающие режим виброгашения. Результаты, полученные при аналитическом исследовании устойчивости вынужденных колебаний, разумеется, носят приближенный характер, так как здесь использовано гармоническое приближение решения. Однако проверочные числовые расчеты на компьютере, выполненные А.Козьминым, подтверждают полученные выводы относительно устойчивости/неустойчивости вынужденных колебаний.

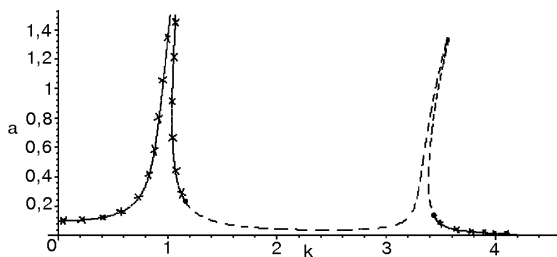


Рис. 8

### Выводы.

В настоящей работе проведен анализ вынужденных колебаний для сис-

темы с двумя степенями свободы, которая содержит осциллятор с относительно большой массой (аппроксимация линейной упругой системы) и осциллятор с относительно малой массой (виброгаситель колебаний основной упругой системы). Также построены АЧХ при некоторых значениях параметров, исследована устойчивость вынужденных колебаний.

**Список литературы:** 1. Сб. "вибрации в технике", том 6. М.: Машиностроение, 1981. 2. *Коловский М.З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. – М.: Наука, 1966. – 317с. 3. *Вульфсон И.И., Коловский М.З.* Нелинейные задачи динамики машин. – М.: Машиностроение, 1968. – 282 с. 4. *Троицкий В.А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. – Киев: Машгиз, 1976. – 248 с. 5. *Штейнвольф А.И.* Динамические расчеты машин и механизмов. – Киев: Машгиз, 1961. – 340 с. 6. *Вейц В.Л., Коловский М.З., Кочура А.Е.* Динамика управляемых машинных агрегатов. – М.: Наука, 1984. – 351 с. 7. *Haxton R.S., Barr A.D.S.* 1972, "The autoparametric vibration absorber". – Journal of Engineering for Industry, 94. – P. 119-225. 8. *Natsiavas S.* Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorber. – J. Sound Vibr. V.156 (2), 1992. – 227-245. 10. *Aoki S., Watanabe T.* 1994, "An investigation of an Impact Vibration Absorber with Hysteretic Damping", in Proc. of the Second International Conference on Motion and Vibration Control, Yokohama, Japan. – P. 468-474. 11. *Т.Хаяси* "Нелинейные колебания в физических системах". – М.: Мир, 1968.

*Поступила в редколлегию 07.05.2003*

УДК 539.3

**В.А.САЛО**, канд.техн.наук

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСИММЕТРИЧНОГО ДАВЛЕНИЯ**

Запропоновано підхід до визначення напружено-деформованого стану пружних циліндричних оболонок довільної товщини. Використовуваний метод заснований на варіаційному принципі Рейсснера, теорії R-функцій, загальних рівнянь тривимірної теорії пружності, методу И.Н.Векуа й алгоритму двосторонньої оцінки точності наближених рішень змішаних варіаційних задач. Ефективність методу показана на прикладах.

The approach is suggested to definition of the stress-strained state of elastic cylinders of any thickness. The used method is based on Reissner's variational principle, R-functions theory, the common equations of the three-dimensional theory of an elasticity, I.N.Vekua's method and algorithm for two-sided estimation of exactitude of approached solutions of the mixed variational problems. Efficiency of the method is shown on examples.

**Постановка проблемы.** Решения пространственных задач теории упругости сопряжены со значительными вычислительными трудностями. Прогресс в разработке методов, позволяющих получить достоверные результаты расчетов толстостенных оболочек, невозможен без привлечения современных ПЭВМ. В этой связи актуальна потребность в создании универсальных и алгоритмически простых для реализации методов расчета нетонких оболочек.