

Unsteady Aerodynamics and Aeroelasticity of Turbomachines, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1998. – pp. 477-491. **10.** *Launder B.E., Spalding D.B.* The Numerical Computation of Turbulent Flows. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, No. 2, 1974, pp. 269-286. **11.** *Gerolymos G.A., Tsanga G. u dp.* Near Wall  $k-\epsilon$  Computation of Transonic Turbomachinery Flows with Tip Clearance. // AIAA Journal, Vol. 36, No. 10, October 1998. pp. 1769-1777. **12.** *Speziale, C.G. Abid R.* A new near-wall model for Reynolds stress turbulence closures with no wall damping. Bull. Am. Phys. Soc., Vol. 39, 1994, p. 1911. **13.** *Biswas D., Ishizuka M. u dp.* Application of an Improved  $k-\epsilon$  Turbulence Model to Predict the Compressible Viscous Flow Behavior in Turbomachinery Cascades. // JSME International Journal, Series B, Vol. 43, No. 1, 2000. pp. 12-21. **14.** *Jennions I.K., Turner M.G.* Three-Dimensional Navier-Stokes Computations of Transonic Fan Flow Using an Explicit Flow Solver and an Implicit  $k-\epsilon$  Solver. // ASME Journal of Turbomachinery, April 1993, Vol. 115, pp. 261-272. **15.** *Wilcox D.C.* Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models. // AIAA Journal, Vol. 26, No. 11, 1988, pp. 1299-1310. **16.** *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. – Москва: Мир, 1991. **17.** *Соколовский Г.А., Гнесин В.И.* Нестационарные трансзвуковые и вязкие течения в турбомашинах. – Киев: Наук. Думка, 1986. – 260 с. **18.** *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – Москва: Наука, 1970. – 904 с. **19.** *Menter F.R.* Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. // AIAA Journal, Vol. 32, No. 8, August 1994, pp. 1598-1605. **20.** *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – Москва: Наука, 1969. **21.** *Fransson T.H., Jöcker M. u dp.* Viscous and Inviscid Linear/Nonlinear Calculations Versus Quasi-Three-Dimensional Experimental Data for a New Aeroelastic Turbine Standard Configuration. // ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 121, October 1999, pp. 717-725.

*Поступило в редколлегию 16.01.2003*

УДК 621.452.3.011

**П.П.ГРИГОРЬЕВА, Ю.А.ЛЫМАРЕНКО**, Запорожский  
государственный университет;  
**А.Д.ШАМРОВСКИЙ**, д.-р физ.-мат. наук, Запорожская  
государственная инженерная академия

## **ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ДИСКА С ЛОПАТКАМИ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ**

Лопатки і диски є одними з найбільш навантажених елементів газотурбінних двигунів. З огляду на велику складність задачі, дослідження їх роботи потребує застосування сучасних методів, що ґрунтуються на використанні ЕОМ. При цьому дуже цікаві є дискретні моделі, як такі, що найліпше пристосовані для такого дискретного приладу, як ЕОМ. У статті пропонується дискретна модель диска газотурбінного двигуна, що дозволяє враховувати вигінні коливання лопаток сумісно із рухом диска. Використання властивості симетрії системи дає можливість звести задачу із великою кількістю степенів свободи до задачі з двома або трьома степенями свободи. Описані усі власні форми коливань системи.

Blades and disks are the most loaded elements of gas-turbine engines. In view of the big complexity of a problem, research of their work demands application of the modern methods based on use of the computer. Thus discrete models, as in the best way adapted for such discrete device, as represent the computer, are very interesting. In the article the discrete model of a gas-turbine engine disk with blades is offered, allowing to take into account winding oscillations of blades together with movement of a disk. Use of symmetry of system allows to reduce a task about oscillations of system with the big number of

degrees of freedom to a task with two and three degrees of freedom. All mode shapes of oscillations of the system are described.

**Введение.** Возможность и эффективность теоретических исследований динамики роторных систем ГТД с целью создания новых методов обнаружения дефектов в значительной степени определяются видом используемой диагностической модели [1]. Модель должна быть достаточно простой [2,3] и соответствовать не только объекту, но и явлению, исследуемому при выделении диагностических признаков и формировании правил принятия решений о техническом состоянии объекта. Примерами таких явлений могут служить нарушение сплошности материала [4] и «дыхание» трещины [5] при диагностике усталостных трещин в лопатках, изменение параметров авиационного двигателя, регистрируемых в процессе эксплуатации [6]. На сегодняшний день наиболее распространенным методом построения математических моделей является метод конечных элементов, вопросам применения которого посвящено множество работ [7,8]. В таких исследованиях основной является проблема дискретизации непрерывных моделей. Вместо этого возможно построение изначально дискретной модели. В данной работе строится дискретная модель диска с лопатками газотурбинного двигателя, пригодная для нахождения собственных частот и собственных форм колебаний. При изгибных колебаниях лопатку обычно рассматривают как консольную балку. В отличие от этого движение деформируемой лопатки в данной работе аппроксимируется движением двух упруго соединенных жестких стержней, что позволяет рассматривать две изгибные формы колебаний. Получена система уравнений, описывающих совместное движение жесткого диска и венца лопаток. Использование симметрии системы позволяет свести задачу о колебаниях системы с большим числом степеней свободы к задаче с двумя и тремя степенями свободы. Нахождение собственных частот и собственных форм колебаний сведено к нахождению собственных чисел и собственных векторов некоторых матриц. Описаны все собственные формы колебаний системы. Дальнейшие исследования предполагают построение вибрационного критерия наличия повреждений, основанного на анализе изменения частотного спектра и форм колебаний поврежденного изделия. Принципиальным является использование симметрии как прием, приводящий к упрощению системы. Другими методами, используемыми при исследовании сложных механических систем, являются, например, методы усреднения, ускоренной сходимости и асимптотических разложений [9], принцип дополнительности [10].

**Описание модели.** Реальная лопатка заменена двумя жесткими стержнями, упруго закрепленными между собой и прикрепленными к жесткому диску, причем моменты инерции стержней и жесткости упругих закреплений подобраны так, чтобы частоты колебаний модельной лопатки совпадали с нижними частотами колебаний реальной лопатки. Будем считать, что все ло-

патки, соединенные с данным диском, имеют одинаковые характеристики. Диск считается значительно более жестким, чем лопатки, и рассматривается как абсолютно твердое тело. Некоторые упругие свойства диска учтены при помощи линейных пружин, соединяющих соседние лопатки. В данной работе мы не касаемся теоретико-экспериментальных методик замены сложных узлов ГТД их дискретными аналогами, решая задачу о совместных колебаниях систем типа диск-венец лопаток.

Диск имеет радиус  $R$  и на нем с постоянным шагом  $2\pi/n$  прикреплены  $n$  абсолютно жестких лопаток, соединенных упруго с диском.

Все лопатки одинаковы, стержни первого уровня (стержни, соединенные с диском), имеют массы  $m_1$ , моменты инерции относительно их центров масс  $j_1$  и расстояния от центров масс до точек крепления  $a_1$ . Крутильные жесткости спиральных пружин, соединяющих эти стержни с диском, равны  $c_1$ . Стержни второго уровня имеют соответствующие характеристики  $m_2, j_2, a_2$ . Крутильные жесткости пружин, соединяющих стержни второго уровня со стержнями первого уровня, равны  $c_2$ . Длину стержня первого уровня обозначим через  $l$ . Жесткости линейных пружин, соединяющих соседние лопатки, равны  $c_0$ , расстояние от точки крепления каждой из лопаток к диску до точки крепления линейной пружины к лопатке равно  $h$  (рис. 1).

Диск имеет упругие внешние связи с жесткостями при перемещениях вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , равными  $c$ , и жесткостью при повороте в плоскости диска  $c_\varphi$ . Масса диска  $M$ , момент инерции относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости диска,  $J$ .

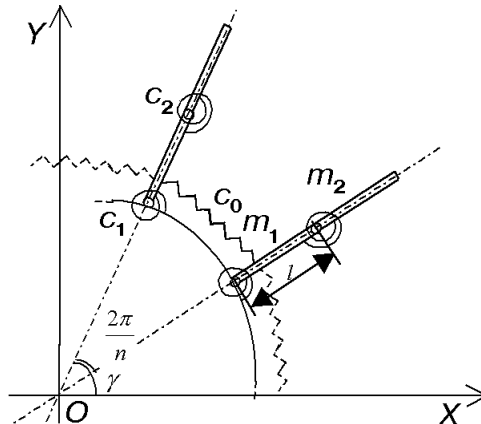


Рис. 1. Параметры лопатки

Исследуемая система описывается  $2n + 3$  обобщенными координатами. Движение диска задается координатами  $x, y$  смещений центра диска вдоль осей координат и углом  $\varphi$  поворота диска. Движения лопаток задаются отно-

сительными углами  $\xi_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) поворотов стержней первого уровня в плоскости диска (угол откладывается от нормали, проведенной к окружности диска в точке крепления лопатки к диску) и углами  $\eta_k$  поворотов стержней второго уровня в плоскости диска (угол откладывается от той же нормали) (рис.2).

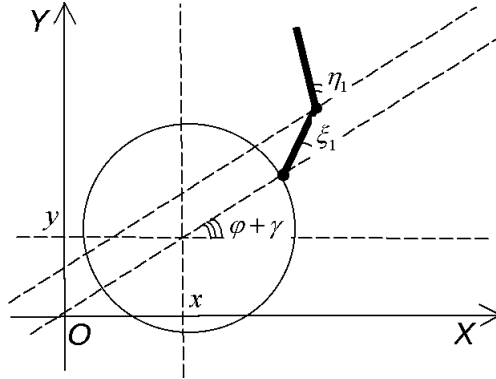


Рис. 2. Обобщенные координаты системы

**Решение модели.** Уравнения Лагранжа движения системы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & (M + m_1 n + m_2 n)x - \sum_k \sin \theta_k \{m_1 (R\varphi + a_1 (\varphi + \xi_k)) + \\
 & \quad + m_2 (R\varphi + l(\varphi + \xi_k) + a_2 (\varphi + \eta_k))\} + cx = 0; \\
 & (M + m_1 n + m_2 n)y + \sum_k \cos \theta_k \{m_1 (R\varphi + a_1 (\varphi + \xi_k)) + \\
 & \quad + m_2 (R\varphi + l(\varphi + \xi_k) + a_2 (\varphi + \eta_k))\} + cy = 0; \\
 & [J + n(m_1 (R + a_1)^2 + m_2 (R + l + a_2)^2 + j_1 + j_2)]\ddot{\varphi} + \\
 & \quad + m_1 (R + a_1) \sum_k [\xi_k a_1 + y \cos \theta_k - x \sin \theta_k] + \\
 & \quad + m_2 (R + l + a_2) \sum_k (\xi_k l + \eta_k a_2 + y \cos \theta_k - x \sin \theta_k) + j_1 \sum_k \xi_k + j_2 \sum_k \eta_k + c_\varphi \varphi = 0; \\
 & \quad a_1 m_1 [a_1 (\varphi + \xi_k) + R\varphi + y \cos \theta_k - x \sin \theta_k] + \\
 & \quad + l m_2 [l(\varphi + \xi_k) + R\varphi + a_2 (\varphi + \eta_k) + y \cos \theta_k - x \sin \theta_k] + \\
 & \quad + j_1 (\varphi + \xi_k) + (c_1 + c_2 + 2hc_0)\xi_k - c_2 \eta_k - hc_0 \xi_{k-1} - hc_0 \xi_{k+1} = 0; \\
 & a_2 m_2 [a_2 (\varphi + \eta_k) + R\varphi + l(\varphi + \xi_k) + y \cos \theta_k - x \sin \theta_k] + j_2 (\varphi + \eta_k) + c_2 \eta_k - c_2 \xi_k = 0.
 \end{aligned}$$

Согласно [11], при рассмотрении малых колебаний системы ее движение можно рассматривать как результат возбуждения различных гармонических осцилляторов, колеблющихся с различными амплитудами и фазами. Следовательно, вектор смещений в случае  $r$ -той формы колебаний имеет вид

$$(x, y, \varphi, \xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)^T = \mathbf{a}_r \sin(\omega_r t + \alpha_r),$$

где  $\mathbf{a}_r$  – вектор амплитуд, не зависящий от времени,  $T$  – знак транспонирования.

Рассмотрим вектор амплитуд. Венец лопаток инвариантен относительно поворотов диска на углы, кратные углу между лопатками в равновесном положении. Это значит, что последние  $2n$  координат вектора амплитуд преобразуются по подпредставлениям группы  $SO(2)$  произвольных вращений плоскости [12]. Неприводимыми представлениями группы  $SO(2)$  являются тригонометрические функции [13].

Поэтому амплитуды стержней первого уровня могут иметь вид

$$k_1, k_1 \cos \theta_k, k_1 \sin \theta_k, k_1 \cos 2\theta_k, k_1 \sin 2\theta_k, \dots \quad (1)$$

где  $\theta_k = \frac{2\pi}{n}(k-1) + \gamma$ ;  $k = \overline{1, n}$ . Множитель  $k_1$  определяется из уравнений

движения системы.

Аналогично амплитуды стержней второго уровня могут иметь вид

$$k_2, k_2 \cos(\theta_k + \beta), k_2 \sin(\theta_k + \beta), k_2 \cos(2\theta_k + \beta), k_2 \sin(2\theta_k + \beta), \dots \quad (2)$$

$$k = \overline{1, n}.$$

Необходимо определить, какова разность фаз  $\beta$ , а также в каких сочетаниях выражения (1) и (2) входят в вектор амплитуд. После подстановки (1), (2) в уравнения движения системы определяем, что  $\beta = 0$  и что лопатки разных уровней описываются одинаковыми функциями из (1) и (2) (разница лишь во множителях  $k_1$  и  $k_2$ ), иначе приходим к противоречивым соотношениям

$$\begin{cases} \sin r\theta_1 = \sin r\theta_2 = \dots = \sin r\theta_n, \\ \cos r\theta_1 = \cos r\theta_2 = \dots = \cos r\theta_n \end{cases}$$

для произвольных  $r$  и  $n$ .

Записав вектор смещений в общем виде и подставив его в уравнения движения системы, получаем три формы колебаний вида

$$(0, 0, \varphi_0, k_1, \dots, k_1, k_2, \dots, k_2)^T, \quad (3)$$

которые качественно различаются соотношением знаков величин  $\varphi_0, k_1, k_2$ . Например, когда все эти величины имеют один знак, при повороте диска вправо оба яруса лопаток также поворачиваются вправо и наоборот. Если знак величины  $\varphi_0$  отличается от знаков величин  $k_1, k_2$ , то диск и лопатки вращаются в разные стороны. Интересны также сочетания знаков величин  $k_1, k_2$ . Если эти коэффициенты одного знака, система двух стержней моделирует самую нижнюю форму колебаний реальной лопатки. Если знаки  $k_1$  и  $k_2$  различны, имеем вторую изгибную форму колебаний лопатки. Эти формы описывают случай осевой симметрии. Диск поворачивается на малый угол, но его смещения вдоль осей координат равны нулю.

Следующие три формы колебаний имеют вид

$$(0, y_0, 0, k_1 \cos \theta_1, \dots, k_1 \cos \theta_n, k_2 \cos \theta_1, \dots, k_2 \cos \theta_n)^T. \quad (4)$$

Эти формы колебаний описывают случай симметрии относительно оси  $Oy$ . Имеем один узловой диаметр и малое смещение диска вдоль оси ординат.

Следующие три формы колебаний имеют вид

$$(x_0, 0, 0, k_1 \sin \theta_1, \dots, k_1 \sin \theta_n, k_2 \sin \theta_1, \dots, k_2 \sin \theta_n)^T. \quad (5)$$

Эти формы колебаний описывают случай симметрии относительно оси  $Ox$ . Имеем один узловой диаметр и малое смещение диска вдоль оси абсцисс.

Работая с формами колебаний (3-5), мы имеем дело с задачей о колебаниях системы с тремя степенями свободы. Следующие формы колебаний соответствуют случаю неподвижного диска, и мы имеем дело с системой, имеющей 2 степени свободы. Выпишем эти формы колебаний в общем виде.

$$\begin{aligned} & (0, 0, 0, k_1 \cos(2\theta_1), \dots, k_1 \cos(2\theta_n), k_2 \cos(2\theta_1), \dots, k_2 \cos(2\theta_n))^T, \\ & (0, 0, 0, k_1 \sin(2\theta_1), \dots, k_1 \sin(2\theta_n), k_2 \sin(2\theta_1), \dots, k_2 \sin(2\theta_n))^T, \\ & (0, 0, 0, k_1 \cos(3\theta_1), \dots, k_1 \cos(3\theta_n), k_2 \cos(3\theta_1), \dots, k_2 \cos(3\theta_n))^T, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \dots \dots \dots \\ & (0, 0, 0, k_1 \cos(q\theta_1), \dots, k_1 \cos(q\theta_n), k_2 \cos(q\theta_1), \dots, k_2 \cos(q\theta_n))^T, \\ & (0, 0, 0, k_1 \sin(q\theta_1), \dots, k_1 \sin(q\theta_n), k_2 \sin(q\theta_1), \dots, k_2 \sin(q\theta_n))^T, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Для каждого  $q$  функция  $\sin(q\theta)$  ( $\cos(q\theta)$ ) имеет на единичной окружности  $2q$  промежутков знакопостоянства. Поэтому часть лопаток имеет в каждый момент времени неположительное смещение, часть – неотрицательное, т.е. имеем  $q$  узловых диаметров. Для четного  $n$  максимальное значение  $q$  равно  $n/2$ , для нечетного –  $\frac{n-1}{2}$ . В случае нечетного  $n$  для каждого  $q$  имеем 4 формы колебаний, следовательно, всего  $2n - 6$  форм вида (6). Действительно, имеем значения  $q$ :  $2 = \frac{5-1}{2}, \frac{7-1}{2}, \dots, \frac{n-1}{2}$ . Значит, всего

$\left(\frac{n-5}{2} + 1\right) \cdot 4 = 2n - 6$  форм колебаний. Вместе с формами (3-5) имеем  $2n+3$  формы колебаний. Данное рассуждение справедливо для значений  $n > 3$ . При  $n = 3$  имеем только формы колебаний (3-5).

Рассмотрим случай четного  $n$ . Если  $n = 2$ , формы колебаний (5) вырождаются в одну форму, когда система движется как твердое тело вдоль оси, проходящей через лопатки. Пусть  $n > 2$ . При  $q = n/2$  имеем не 4, а только 2 формы колебаний, когда соседние лопатки колеблются с одинаковыми амплитудами в противоположные стороны, если начальный поворот диска  $\gamma \neq 0$ . Если же  $\gamma = 0$ , также имеем только 2 формы колебаний, соответствующие векторам (6), в которые входит функция косинус. У векторов, в которые входит

функция синус, все координаты нулевые.

Возможные значения  $q$ :  $2 = \frac{4}{2}$ ,  $\frac{6}{2}$ , ...,  $\frac{n-2}{2}$ ,  $\frac{n}{2}$ . Всего имеем

$\left(\frac{(n-2)-4}{2} + 1\right) \cdot 4 + 2 = 2n - 6$  форм колебаний, которые вместе с формами (3), (4), (5) дают  $2n + 3$  формы.

Таким образом, мы исчерпали все случаи, т.к. система с  $2n + 3$  степенями свободы имеет столько же форм колебаний.

Опишем процедуру вычисления величин, входящих в выражения (3-6). Для примера опишем получение вектора вида (5).

Запишем вектор смещений в общем виде:

$$\mathbf{f} = (x, y, \varphi, k_1 \sin \theta_1, \dots, k_1 \sin \theta_n, k_2 \sin \theta_1, \dots, k_2 \sin \theta_n)^T \sin(\omega t + \alpha). \quad (7)$$

Очевидно,  $\ddot{\mathbf{f}} = -\omega^2 \mathbf{f}$ . Подставляя (7) в уравнения движения системы, и учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{2\pi}{n}(k-1) + \gamma\right) &= \sum_{k=1}^n \sin \theta_k = 0; \\ \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}(k-1) + \gamma\right) &= \sum_{k=1}^n \sin^2 \theta_k = \frac{n}{2}; \\ 2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}k + \gamma\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}(k-1) + \gamma\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}(k+1) + \gamma\right) &= \\ &= 2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}k + \gamma\right) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \gamma\right)\right), \end{aligned}$$

получаем уравнения

$$y = 0; \quad \varphi = 0;$$

$$(M + m_1 n + m_2 n)(-\omega^2)x - (m_1 a_1 + m_2 l) \frac{n}{2} (-\omega^2)k_1 - m_2 a_2 \frac{n}{2} (-\omega^2)k_2 + cx = 0;$$

$$-(m_1 a_1 + m_2 l)(-\omega^2)x + (j_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l^2)(-\omega^2)k_1 +$$

$$+ m_2 l a_2 (-\omega^2)k_2 + \left(c_1 + c_2 + 2hc_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)\right)k_1 - c_2 k_2 = 0;$$

$$-m_2 a_2 (-\omega^2)x + m_2 l a_2 (-\omega^2)k_1 + (j_2 + m_2 a_2^2)(-\omega^2)k_2 - c_2 k_1 + c_2 k_2 = 0.$$

Введем обозначения

$$\begin{pmatrix} x \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \mathbf{s}; \quad \begin{pmatrix} M + m_1 n + m_2 n & -(m_1 a_1 + m_2 l) \frac{n}{2} & -m_2 a_2 \frac{n}{2} \\ -(m_1 a_1 + m_2 l) & j_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l^2 & m_2 l a_2 \\ -m_2 a_2 & m_2 l a_2 & j_2 + m_2 a_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{G};$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 + 2hc_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right) & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H}.$$

Тогда  $\mathbf{G}(-\omega^2)\mathbf{s} + \mathbf{H}\mathbf{s} = 0$ , откуда  $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{s} = \omega^2\mathbf{s}$ . Следовательно, вектор неизвестных коэффициентов  $\mathbf{s}$  является собственным вектором, а квадрат частоты  $\omega^2$  является собственным числом матрицы  $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}$ . Для определения собственных чисел и собственных векторов матрицы существуют стандартные программы [14], которые и следует использовать для отыскания величин, входящих в выражение для формы колебаний.

Заметим, что при отсутствии линейных пружин, соединяющих лопатки между собой, всем собственным формам вида (6) соответствует одно значение частоты. Действительно, при неподвижном диске кинематических связей между лопатками нет. Колебания различных лопаток связаны только условием суммарного равновесия, и уравнения движения системы преобразуются в уравнения, описывающие движение отдельной лопатки. Введение линейных пружин, позволяющих учитывать некоторые упругие свойства диска, приводит к тому, что каждой паре векторов вида (6), описывающей взаимно ортогональные формы колебаний с  $q$  узловыми диаметрами, соответствует свое значение частоты. Действительно, векторам

$$(0, 0, 0, k_1 \cos(q\theta_1), \dots, k_1 \cos(q\theta_n), k_2 \cos(q\theta_1), \dots, k_2 \cos(q\theta_n))^T$$

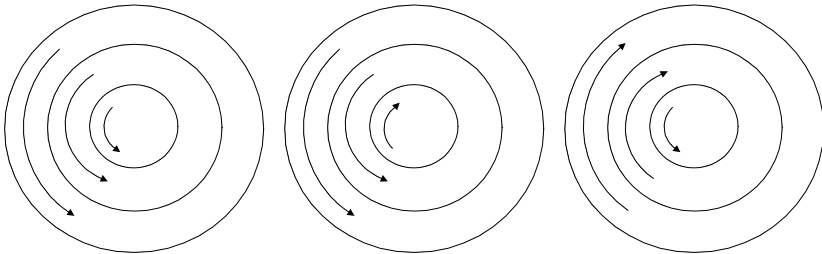
и

$$(0, 0, 0, k_1 \sin(q\theta_1), \dots, k_1 \sin(q\theta_n), k_2 \sin(q\theta_1), \dots, k_2 \sin(q\theta_n))^T$$

соответствуют одинаковые матрицы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  порядка 2. Каждой из двух собственных частот, определяемых этими матрицами, соответствует пара ортогональных собственных форм.

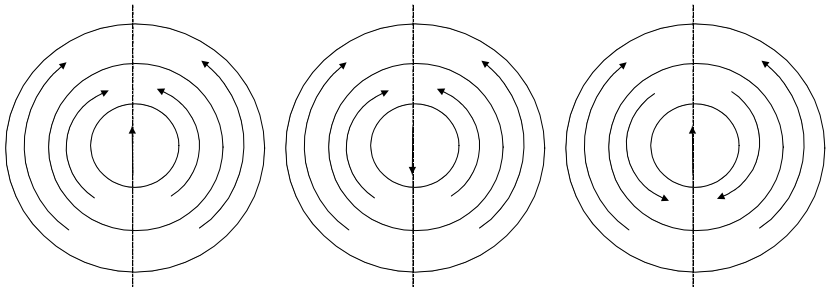
**Полученные результаты.** Изобразим формы колебаний диска с лопатками схематически. Венец лопаток будем обозначать двумя сплошными кольцами.

Выражениям (3) соответствуют случаи

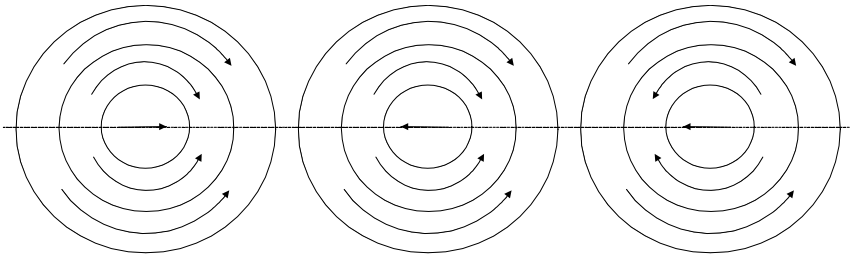


Выражениям (4) соответствуют случаи

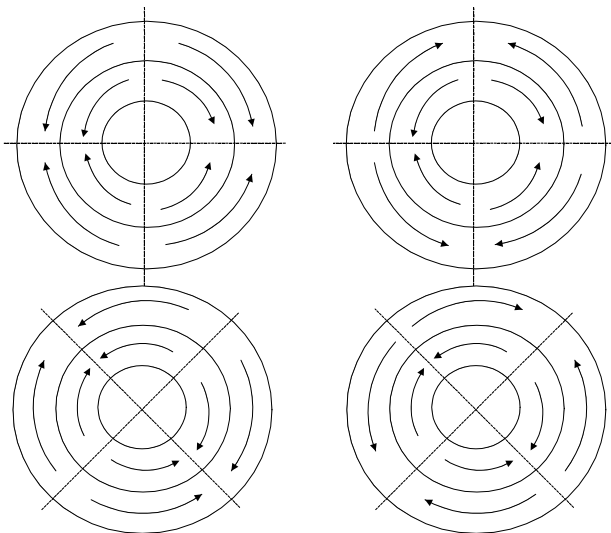




Выражениям (5) соответствуют случаи



Выражениям (6) при  $q = 2$  соответствуют случаи



Проанализируем частотный спектр при следующих параметрах системы:

$n = 20$ ;  $\frac{M}{m} = \frac{5}{2}$ ;  $\frac{R}{a} = \frac{5}{1}$ ;  $\frac{J}{j} = \frac{2}{1}$ ;  $c_1 : c_\varphi : c : c_0 = 7 : 8 : 9 : 20$ . На рис. 3 приведены значения частот для всех 23 форм колебаний.

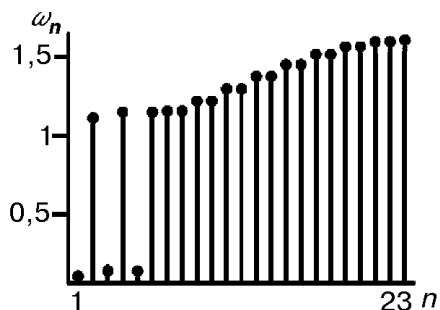


Рис. 3. Частоты колебаний системы в зависимости от номера формы колебаний

При упорядочении этих значений первые три частоты соответствуют формам колебаний, при которых диск смещается, либо поворачиваясь вокруг оси симметрии, либо двигаясь поступательно вдоль осей координат. Первым двум формам колебаний соответствуют случаи, когда диск и лопатки имеют смещения одного знака, при третьей форме эти смещения разных знаков. Четвертая по величине частота колебаний соответствует вращательному движению диска при смещениях диска и лопаток, различающихся знаками. Это значит, что если диск вращается по часовой стрелке, то лопатки – против часовой стрелки и наоборот. Имеем одну узловую окружность. Следующие две частоты равны и описывают случаи с одним узловым диаметром и поступательным движением диска вдоль осей координат. При движении диска вдоль оси ординат движение диска и лопаток происходят в разные стороны, при смещении вдоль оси абсцисс – в одну сторону. Следующие 16 частот образуют пары и соответствуют взаимно ортогональным формам колебаний. Последняя, максимальная из частот соответствует случаю максимального числа узловых диаметров. Следовательно, при возрастании количества узловых диаметров частоты колебаний диска с лопатками возрастают.

**Выводы.** В работе рассмотрена проблема построения модели узла газотурбинного двигателя (диска с лопатками), позволяющей анализировать резонансные колебания этого узла. Показано, что возможно построение дискретной модели, которая хорошо программируется и исследуется при помощи современной вычислительной техники. Описанный метод работы с такой моделью алгоритмизирован, что также обеспечивает простоту ее обработки на ЭВМ. Найденны формы колебаний исследуемой системы, которые моделируют первую или вторую изгибные формы колебаний, а также форму колебаний

с одной узловой окружностью. Исследован частотный спектр системы и показано, что при неподвижном диске частоты упорядочены согласно возрастанию количества узловых диаметров.

Предложенную в статье идею построения дискретных моделей роторных систем можно развивать далее в трех направлениях. С одной стороны, необходимо рассмотреть пространственные модели диска с лопатками ГТД, что позволит описать более сложные формы колебаний реального изделия (крутильные, уголкового). Вторым направлением является определение математического аппарата для исследования поведения диска с повреждением и создание на этой основе вибрационного диагностического критерия. В этой области уже имеются определенные результаты [15]. Третьим направлением является решение задачи приведения, то есть разработки методик конструирования модели в соответствии с экспериментальными данными рабочих узлов ГТД. От решения этой задачи зависит успешность практического применения развиваемой теории.

**Список литературы:** 1. *Буряк Н.И.* Теоретические исследования временных и частотных характеристик нестационарной модели объекта виброакустической диагностики // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2002. – № 1. – С. 13-17. 2. *Виброакустическая диагностика зарождающихся дефектов / Балицкий Ф.Я., Иванова М.А. и др.* – М.: Наука, 1984. – 119 с. 3. *Карасев В.А., Максимов В.П., Сидоренко М.К.* Вибродиагностика газотурбинных двигателей. – М.: Машиностроение, 1978. – 131 с. 4. *Матвеев В.В., Бовсуновский А.П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщение 1. Изгибные колебания. Аналитическое решение // Проблемы прочности. – 1998. – № 6. – С. 9-22. 5. *Ройтман А.Б., Александрова Н.Б., Морозюк В.А.* Подовжні коливання консольного стрижня, який має форму чотиригранної піраміди, з поперечною тріщиною, що «дихає» // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки. Біологічні науки. – 2000. – № 1. – С. 133-141. 6. *Цуриков О.Н.* Совершенствование методики диагностирования авиационных двигателей // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2001. – № 3. – С. 37-39. 7. *P.L. George, H. Borouchaki, P.Lang.* An efficient algorithm for 3D adaptive meshing // Advances in Engineering Software, Vol. 33, Issues 7-10, July-October 2002, pp. 377-387. 8. *R. Lackner, H. A. Mang.* Mesh generation and mesh refinement procedures for the analysis of concrete shells // Advances in Engineering Software, Vol. 33, Issues 7-10, July-October 2002, pp. 389-402. 9. *Акуленко Л.Д.* Высокочастотные собственные колебания механических систем // Прикладная математика и механика. Т. 64, вып. 5, 2000. – С. 817-832 10. *Пфайффер Ф.* Системы многих тел с односторонними связями. // Прикладная математика и механика. Т. 65, вып. 4, 2001. – С. 681-687. 11. *Голдстейн Г.* Классическая механика. – М.: Наука, 1975. – 416 с. 12. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. 2. – М.: Мир, 1984. – 381 с. 13. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965. – 588 с. 14. *Уилкинсон, Райни.* Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с. 15. *Шамровський О.Д., Григор'єва П.П.* Метод збурень при дослідженні коливаний механічної системи // Вісник Запорізького державного університету. Фізико-математичні науки. Біологічні науки. – 2002. – № 1. – С. 96-101.

*Поступила в редколлегию 24.04.2003*