

2. Моделирование задач эксплуатации систем трубопроводного транспорта / *Е.И. Яковлев, В.Д. Куликов и др.* М.: ВНИИОЭНГ, 1992. 358 с. 3. Моделирование и управление газотранспортными системами / *Г.Н. Поляков, Е.И. Яковлев, А.С. Пиотровский.* СПб.: Недра, 1992. 256 с. 4. *Кривошеин Б.Л.* Теплофизические расчеты газопроводов. М.: Недра, 1982. 168 с. 5. *Коротаев Ю.П., Кривошеин Б.Л., Новаковский В.Н.* Термогазодинамика газопромысловых систем. М.: Недра, 1991. 276 с. 6. О математических моделях неизотермического нестационарного течения газа в трубах / *Б.Л. Кривошеин, А.В. Дубинский и др.* // Известия вузов. Нефть и газ. 1976. №12. С. 82–86. 7. *Брук В.А.* Нестационарный теплообмен между потоком газа в трубопроводе и внешней средой // Промышленная теплотехника. 1982. Т. 4. №5. С. 48–53. 8. *Идин М.А., Шериков В.В.* Решение задачи движения газа в трубе методом малого параметра // Пневматика и гидравлика: Приводы и системы управления. 1984. Вып. 10. С. 249–263. 9. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с. 10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с. 11. *Скляр Ю.С., Минкин С.И.* Анализ переходных процессов в длинных линиях постоянного тока методами теории дифференциально-разностных уравнений // Известия вузов. Электромеханика. 1975. №7. С. 687–694.

Поступила в редколлегию 00.00.02

УДК 621.771.63; 621.785

Т.С.СКОБЛО, докт.техн.наук; ***А.И.СИДАШЕНКО***, канд.техн.наук;
А.Д.МАРТЫНЕНКО; Н.В.СЛОНОВСКИЙ; ХГТУСХ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РЕЖИМА ЛАЗЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПОДВЕРГНУТЫХ ХИМИКО-ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ПРОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОКРЫТИЙ

В роботі розглянуті існуючі методи проведення деазотування деталей, попередньо підданих хіміко-термічній обробці та наведено результати експериментів і математичне обґрунтування режимів процесу дисоціації нитридів для підвищення міцності відновлювальних покриттів.

Ряд деталей машин и оборудования для повышения износостойкости и обеспечения высокого уровня прочности и твердости подвергаются химико-термической обработке – азотированию, цементации, нитро-цементации. В процессе их эксплуатации и изнашивания такой упроченный слой частично сохраняется, что при восстановлении любым из общепринятых методов наращивания не обеспечивает получение качественного покрытия.

Наиболее часто встречаемые в производстве способы восстановления [1] включают такие технологические операции как - предварительную термообработку, удаление дефектов путем обточки, наплавку слоя металла с помощью электрода, предварительную и окончательную механическую и термическую обработки.

Недостатком этих способов является то, что требуется выполнение большого количества операций, предшествующих восстановительной – наплавке, отжиг для снятия напряжений, механическая обработка для снятия

дефектного слоя. Кроме того, наплавка слоя металла с помощью электрода приводит к интенсивному прогреву и короблению тонкостенных и длинномерных деталей, а также изменению физико-механических свойств сердцевины деталей. Для завершения операции восстановления детали требуется последующая окончательная термическая обработка. Такая технология эффективна для небольшого объема восстанавливаемых деталей или для которых требуется компенсация изношенного слоя более 2-3мм.

Удаление частично сохранившегося упрочненного слоя путём механической обработки уменьшает эффективное сечение и снижает усталостную прочность детали. При такой подготовке к ремонту много металла идет в отходы, приходится удалять полностью оставшийся упрочненный слой, который в ряде случаев и не содержит каких-либо дефектов. В процессе ремонта и восстановления деталей приходится наносить компенсирующий слой существенно больший, чем это можно было бы сделать при сохранении качественного и предварительно упрочненного слоя. Это связано с тем, что при наличии такого слоя при восстановлении наплавкой из-за нагрева происходят структурные изменения, которые приводят к разложению (диссоциации) окислов нитридов и растворения карбидов.

Процесс сопровождается газовыделением, поро- и трещинообразованием. Кроме того, большое количество тепла, выделяемое при наплавке, может существенно изменить геометрическую форму детали. Поэтому наиболее целесообразным является разложение упрочняющих фаз перед восстановлением с использованием локального нагрева для формирования заданной по величине переходной зоны при обработке лазерным лучом.

В промышленности известен способ разложения слоя, полученного химико-термической обработкой [2], который позволяет восстанавливать деталь без полного его удаления. Метод заключается в обезуглероживании стальных изделий путем нагрева и выдержки при 1000-1050⁰С в расплаве оксидов: - железа (2,7-2,9вес %); – бария (14–16 вес %) и хлористого железа (остальное). Этот метод не может быть использован для тонкостенных, длинномерных деталей, поскольку приведет к изменению геометрических размеров (короблению), разупрочнению сердцевины, увеличению зерна в металле рабочего слоя при длительной выдержке в области высоких температур, развитию процессов эрозии.

Большинство деталей машин и оборудования, работающих в сопряжении, имеют износ рабочего слоя, не превышающий 0,5 мм, поэтому компенсировать его по известной технологии не эффективно из-за большого количества операций, интенсивного прогрева деталей, большого расхода наплавляемого металла и объемов механической обработки (до и после восстановления).

Для восстановления длинномерных и тонкостенных деталей, предварительно упрочненных химико-термическим способом, нами предложено выполнение следующего ряда технологических операций:

– предварительную лазерную термическую обработку поверхности детали (отжиг) для “разложения” оставшегося после эксплуатации азотированного

слоя, путем его нагрева до температуры диссоциации нитридов и карбонитридов на глубину формирования переходной зоны (0,4-0,5мм);

- нанесение компенсирующего износ покрытия, используя при этом электроискровую обработку (ЭИО) электродами из стали типа 30X13 с одновременной пластической деформацией (ППД) шариком или роликом;

- окончательная механическая обработка детали под номинальный размер – шлифование.

Для определения математической зависимости между параметрами лазерной обработки и глубиной разложения нитридов в качестве геометрической модели выбрали полый цилиндр ограниченный двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Используя принцип относительности, считали процесс обработки – установившимся, отсутствует зависимость между температурой детали и ее теплопроводностью, луч лазера постоянным (отсутствует неоднородность в распределении плотности мощности по диаметру лазерного пятна) и неподвижным, а цилиндр – совершающим сложное движение: вращательное относительно оси и поступательное вдоль нее. Выбрали цилиндрическую систему координат r, θ, z (рис. 1) с осью, совпадающей с осью цилиндра (втулки). В рассматриваемом случае движущейся среды (т.е. перемещающейся втулки) уравнение теплопроводности имеет вид 1 с учетом конвективных процессов (во внутренней части втулки) [3-5].

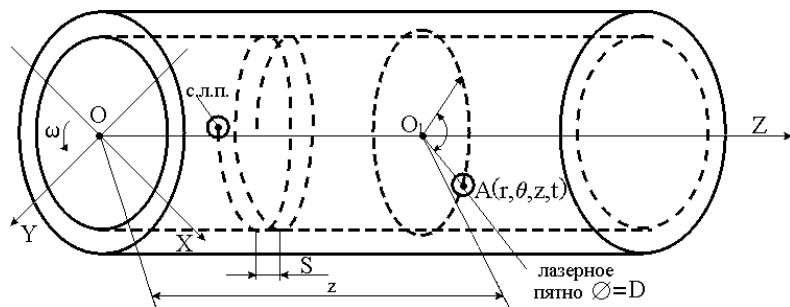


Рис. 1. Схема для расчета режимов лазерной термообработки

$$\frac{D}{Dt} T - \chi \nabla^2 T = 0, \quad (1)$$

где D/Dt – субстанциональная производная; T – температура во внутренних точках цилиндра; χ – коэффициент температуропроводности; ∇^2 – оператор Лапласа. Температуру T отсчитывали от окружающей среды (температура воздуха внутри помещения $T_b = 20$ °C).

Рассмотрим термообработку внешней поверхности цилиндра (втулки). При этом крайвым условием на внутренней поверхности будет: $T(r, \theta, z) = 0$ (2), а на внешней поверхности в области Γ^b , совпадающей со следом лазерно-

го луча – $\frac{\partial}{\partial r} T(r, \theta, z) \int_{r=b} = -\frac{q}{\lambda}$ (3), и вне области $\Gamma^b: T(b, \theta, z) = 0$ (4), где $\partial/\partial r$ – частная производная; q – плотность теплового потока переносимого лазерным пучком через поверхность цилиндра; λ – коэффициент теплопроводности материала втулки; a, b – внутренний и внешний радиусы цилиндра.

Решение уравнения (1) при краевых условиях (2) и (4) дает распределение температурного поля во внутренних точках цилиндра. Переходя к решению краевой задачи (1) и (4) перепишем уравнение (1) в эквивалентном виде [3]:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} T + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} T + \frac{\partial^2}{\partial z^2} T - \frac{\omega}{\chi} \frac{\partial}{\partial \theta} T - \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} T = 0; \quad (5)$$

краевыми условиями будут: $T(a, \theta, z) = 0$ (6); $T(b, \theta, z) = T^b \chi(\theta) \chi(z)$ (7), где T^b – температура поверхности в области Γ^b ; $\chi(\theta), \chi(z)$ – функции, равные единице в области Γ^b и нулю вне – Γ^b .

Найдем коэффициент Фурье $T_k(r, z)$ функции $T(r, \theta, z)$,

$$T_k(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(r, \theta, z) e^{-ki\theta} d\theta, \quad (8)$$

где k – индекс суммирования $k = -\infty; +\infty$; i – мнимая единица $i = \sqrt{-1}$; θ – полярный угол.

Умножая соотношения (5) и (7) на $e^{-ki\theta}$ и интегрируя почленно (слагаемые в (5), содержащие производные по θ , интегрируем по частям), находим:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} T_k(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} T_k(r, z) - \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} T_k(r, z) - \frac{i\omega}{\chi} T_k(r, z) = 0, \quad (9)$$

где в соотношениях (5) и (9): V – скорость перемещения лазерного луча вдоль оси цилиндра; ω – угловая скорость вращения цилиндра (втулки).

В дальнейшем будут использоваться функции $U_{sk}^a(r)$, определяемые соотношением:

$$U_{sk}^a(r) = I_k(\beta_{sk} r) N_k(\beta_{sk} a) - I_k(\beta_{sk} a) N_k(\beta_{sk} r), \quad (10)$$

где $I_k(\cdot), N_k(\cdot)$ – функции Бесселя и Неймана порядка n ; β_{sk} – корни уравнения. При этом:

$$I_k(\beta_{sk} b) N_k(\beta_{sk} a) - I_k(\beta_{sk} a) N_k(\beta_{sk} b) = 0. \quad (11)$$

Найдем приближенные (но достаточно точные) значения корней β_{sk} . Используя асимптотические представления функций $I_k(\xi), N_k(\eta)$ при больших значениях параметров ξ, η [6], находим:

$$I_k(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \quad (12); \quad N_k(\eta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}} \sin\left(\eta - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right). \quad (13)$$

Исходя из (10) (12), (13) получим:

$$U_{sk}^a(r) \approx \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta_{sk}} \frac{1}{\sqrt{ra}} \left[\cos\left(\beta_{sk}r - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\beta_{sk}a - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\beta_{sk}a - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\beta_{sk}r - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (14)$$

Таким образом, по формуле сложения имеем:

$$U_{sk}^a(r) \approx -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta_{sk}} \frac{1}{\sqrt{ra}} \sin[\beta_{sk}(r-a)]; \quad (15)$$

из (11) и (15) находим: $\sin[\beta_{sk}(b-a)] \approx 0$,

$$\text{откуда:} \quad \beta_{sk} \approx \frac{\pi}{b-a} s, \quad s = \overline{0 \dots \infty}. \quad (16)$$

Отметим, что в [7] получены более точные асимптотические оценки для бесселевых функций, что дает возможность уточнить соотношения (15), (16). Умножим почленно уравнение (9) на $U_{sk}^a(r)$, и проинтегрируем в пределах (a, b). Преобразуем, имеющееся выражение (13), введя оператор L_k и используем функции $T_{sk}^a(z)$ и $U_{sk}^a(z)$:

$$\begin{aligned} L_k T_{sk}^a(z) &\equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^a(z) = \int_a^b \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} T_k(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r, z) \right] \times \\ &\times U_{sk}^a(r) r dr = \int_a^b \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r, z) \right] [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] \times \\ &\times r dr = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r} T_k(r, z) \right] [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = \\ &= \int_a^b [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) dr - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r) \times \\ &\times N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] \Big|_{r=a}^b - \\ &- \int_a^b r \frac{\partial}{\partial z} T_k(r, z) \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r) \times \\ &\times N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = b [I_k(\beta_{sk}b) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}b)] \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) \Big|_{r=b} - \\ &- a [I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}a)] \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) \Big|_{r=a} - \int_a^b [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] \times \\ &\times N_k(\beta_{sk}r) \frac{1}{r} dr T_k(r, z) - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = \\ &= - \left\{ r [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] \frac{1}{r} T_k(r, z) \Big|_{r=a}^b - \int_a^b T_k(r, z) \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r) \times \right. \\ &\left. \times N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr \right\} - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
&= -\left\{ \left[I_k^1(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k^1(\beta_{sk}b) \right] \beta_{sk} T_k(b, z) - a \left[I_k^1(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) \right] \times \right. \\
&\times N_k^1(\beta_{sk}a) \left. \right] \beta_{sk} T_k(a, z) \left. \right\} + \int_a^b T_k(r, z) \left\{ \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r) \right] + \right. \\
&+ \left(r\beta_{sk}^2 - \frac{k^2}{r} \right) \left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r) \right] - r\beta_{sk}^2 \left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - \right. \\
&\left. - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r) \right] \left. \right\} dr
\end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в фигурной скобке, тождественно равно нулю в соответствии с дифференциальным уравнением для цилиндрических функций [6]. Используя выражение для вронскиана функций Бесселя [7] зависимость (17) представится в виде:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{sk}^a(z) - \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} T_{sk}^a(z) - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^a(z) = \frac{2}{\pi} \left[T_k(a, z) - \frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)} T_k(b, z) \right], \quad (17, a)$$

$$\text{где} \quad T_{sk}^a(z) = \int_a^b T_k(r, z) U_{sk}^a(r) r dr.$$

Найдем выражение для $T_k(b, z)$, из (8) имеем:

$$T_k(b, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi_0/2}^{\varphi_0/2} T^b \chi(\theta) \chi(z) e^{-ki\theta} d\theta, \quad (18)$$

где φ_0 – угловой размер области Γ^b , центр которой расположен в точке $(b, 0, 0)$. Считая температуру T^b в области Γ^b постоянной, получим:

$$T_k(b, z) = \frac{1}{2\pi} T^b \frac{1}{-ik} \left(e^{-ik\frac{\varphi_0}{2}} - e^{ik\frac{\varphi_0}{2}} \right) = \frac{1}{\pi} T^b \chi(z) \frac{1}{k} \frac{e^{ik\frac{\varphi_0}{2}} - e^{-ik\frac{\varphi_0}{2}}}{2i} = \frac{1}{\pi} \chi(z) T^b \frac{\text{sink}\varphi_0/2}{k}, \quad (19)$$

Из (19) и (17) имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{sk}^a(z) - \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} T_{sk}^a(z) - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^a(z) = \frac{2}{\pi} \left[T_k(a, z) - \frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)} \frac{1}{\pi} \chi(z) \frac{\text{sink}|\varphi_0|/2}{k} T^b \right], \quad (20)$$

Аналогичным образом может быть преобразовано уравнение (9), но уже применительно к функциям $T_{sk}^b(z)$ и $U_{sk}^b(r)$. С помощью зависимости (21):

$$U_{sk}^b(r) = I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r), \quad (21)$$

имеем:

$$\begin{aligned}
L_k T_{sk}^b(z) &\equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^b(z) = \int_a^b \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} T_k(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r, z) \right] \times \\
&\times U_{sk}^b(r) r dr = \int_a^b \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r, z) \right] \left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r) \right] \times \\
&\times r dr = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r} T_k(r, z) \right] \left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r) \right] dr =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) dr - k^2 \int_a^b T_k(r, z) [I_k(\beta_{sk}r) \times \\
&\times N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr = r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] \Big|_{r=a}^b - \\
&- \int_a^b r \frac{\partial}{\partial z} T_k(r, z) \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r) \times \\
&\times N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr = b [I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}b)] \frac{\partial}{\partial r} T_{sk}(r, z) \Big|_{r=b} - \\
&- a [I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}a)] \frac{\partial}{\partial r} T_{sk}(r, z) \Big|_{r=a} - \int_a^b r [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b) \times \\
&\times N_k(\beta_{sk}r)] \frac{1}{r} dr T_k(r, z) - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr
\end{aligned} \tag{21, a}$$

Выражение в первой квадратной скобке в 21,а тождественно равно нулю, функция во второй квадратной скобке равна нулю в соответствии с (11). Таким образом, предыдущее соотношение (после еще одного интегрирования по частям) преобразуется в:

$$\begin{aligned}
&- \left\{ r [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] \frac{1}{r} T_k(r, z) \Big|_{r=a}^b - \int_a^b T_k(r, z) \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - \right. \\
&- I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr \Big\} - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr = - \{ b I_k \times \\
&\times [I_k'(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}b) - (\beta_{sk}b)N_k'(\beta_{sk}b)] \beta_{sk} T_k(b, z) - a [I_k'(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k'(\beta_{sk}a)] \times \\
&\times \beta_{sk} T_k(a, z) \} + \int_a^b T_k(r, z) \left[\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] + \left(r \beta_{sk}^2 - \frac{k^2}{r} \right) \times \right. \\
&\times [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] - r \beta_{sk}^2 [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] \Big\} dr
\end{aligned} \tag{21, б}$$

Подынтегральное выражение в фигурной скобке тождественно равно нулю в связи с тем, что цилиндрические функции первого, второго и третьего рода, либо их линейные комбинации удовлетворяют дифференциальному

уравнению [115] $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} U + \left(\beta_{sk}^2 - \frac{k^2}{r^2} \right) U = 0$, где $U = z_k(\beta_{sk}r)$; $z_k(\beta_{sk}r)$ – любая

из перечисленных цилиндрических функций.

Выражения в квадратных скобках вне интегралов могут быть преобразованы с помощью вронскианов функций Бесселя и Неймана [116] в выражения для вронскиана W функций U_1, U_2 : $W(U_1, U_2) = U_1 U_2' - U_1' U_2$; подставив функции Бесселя и Неймана, найдем: $W(I_k, N_k) = 2/\pi z$, отсюда для соотношения в первой квадратной скобке в (21,б) находим его значение: $-2/\pi r_{sk} b$.

Преобразуем выражение во второй квадратной скобке вне интеграла в

(21,б), используя соотношение, вытекающее из (11)

$$N_k(\beta_{sk} b) = N_k(\beta_{sk} a) \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)},$$

получим для второй квадратной скобки представление:

$$-\frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} W(I_k, N_k)(\beta_{sk} a)$$

В этом выражении указан условно аргумент функций, входящий в определитель Вронского [8]. При этом получаем соотношение:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{sk}^b(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{sk}^b(z) - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^b(z) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} T_k(a, z) - T_k(b, z) \right], \quad (22)$$

Рассмотрим частные случаи уравнений (20) и (22). Если на внешней поверхности температура равна нулю, то и $T_k(b, z) = 0$ тогда из (22) находим:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{skb}^b(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{skb}^b(z) - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{skb}^b(z) = \frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} T_k(a, z), \quad (23)$$

В случае равной нулю температуры поверхности $T_k(a, z) \equiv 0$ из выражения (20) при нулевой температуре на внутренней поверхности имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{ska}^a(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{ska}^a(z) - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{ska}^a(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} a)}{I_k(\beta_{sk} b)} T_k(b, z), \quad (24)$$

Вычислим $T_k(a, z)$ по аналогии с (19):

$$T_k(a, z) = \frac{1}{2\pi} T^a \chi(z) \frac{1}{-ik} (e^{-ik \frac{|\varphi_0|}{2}} - e^{ik \frac{|\varphi_0|}{2}}) = \frac{1}{\pi} T^a \chi(z) \frac{e^{ik \frac{\varphi_0}{2}} - e^{-ik \frac{\varphi_0}{2}}}{2i} = \frac{1}{\pi} T^a \chi(z) \frac{\text{sink}|\varphi_0|/2}{k}, \quad (25)$$

где T^a – температура (постоянная) на внутренней поверхности цилиндра при воздействии лазерного луча (то есть в области Γ^a). Из (24) и (25) имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{ska}^a(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{ska}^a(z) - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{ska}^a(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} a)}{I_k(\beta_{sk} b)} \frac{1}{\pi} T^b \chi(z) \frac{\text{sink}|\varphi_0|/2}{k}, T^b = 0, \quad (26)$$

а из (22) и (19) находим:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{skb}^b(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{skb}^b(z) - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{skb}^b(z) = \frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{1}{\pi} T^a \chi(z) \frac{\text{sink}|\varphi_0|/2}{k}, T^b = 0, \quad (27)$$

Нижние индексы "a" и "b" указывают на какой из поверхностей Γ^a или Γ^b температура равна нулю, верхние индексы в $T_{skb}^b(z)$, $T_{ska}^a(z)$ указывают какое из интегральных преобразований из $U_{sk}^a(r)$, (или $U_{sk}^b(r)$) было использовано. Из сопоставления (26) и (27) выходит следующее правило перехода от $T_{skb}^b(z)$ к $T_{ska}^a(z)$ для получения $T_{ska}^a(r)$: если известно выражение для $T_{skb}^b(r)$

следует функцию $T_{skb}^b(z)$ умножить на: $-\frac{I_k^2(\beta_{sk} a) \theta_k^b}{I_k^2(\beta_{sk} b) \theta_k^a}$ (28),

$$\text{где} \quad \theta_k^a = \frac{1}{\pi} \frac{\sin k|\varphi_0|/2}{k} T^a, \quad \theta_k^b = \frac{1}{\pi} \frac{\sin k|\varphi_0|/2}{k} T^b. \quad (29)$$

Предварительно решив уравнение для $T_{skb}^b(r)$ в соответствии с (22), (27) и (29) получим:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{skb}^b(r) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{skb}^b(z) - \left(\beta_{sk} + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{skb}^b(z) = \frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \chi(z) \theta_k^a, \quad (30)$$

а затем по указанному выше правилу перейдем к $T_{ska}^a(z)$.

Введем обозначения:

$$\eta^{sk}(z) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} T_k(a, z) - T_k(b, z) \right] = \frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \chi(z) \theta_k^a, \quad \text{при } T_k(b, z) = 0; \\ b^* = -V/\chi; \quad C^{sk} = -(\beta_{sk}^2 + i\omega/\chi), \quad (31)$$

Таким образом, из (30) находим:

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi^{sk}(z) + b^* \frac{d}{dz} \varphi^{sk}(z) + C^{sk} \varphi^{sk} = \eta^{sk}(z), \quad (32)$$

$$\text{где } -\varphi^{sk}(z) = T_{skb}^b(z), \quad (\text{либо } = T_{skb}^b(z), \text{ если } T_k(b, z) = 0) \quad (32, a)$$

Преобразуем (32) к виду не содержащему первой производной. Имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left\{ [\varphi^{sk}(z) e^{\alpha z}] e^{-\alpha z} \right\} + b^* \left\{ [\varphi^{sk}(z) e^{\alpha z}] e^{-\alpha z} \right\} + C^{sk} [\varphi^{sk}(z) e^{\alpha z}] e^{-\alpha z} = \eta^{sk}(z), \quad (33)$$

$$\text{полагая:} \quad \varphi_{sk}(z) = \varphi^{sk}(z) e^{\alpha z}, \quad (34)$$

(считаем α постоянным параметром) получим:

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi_{sk}(z) - 2\alpha \frac{d}{dz} \varphi_{sk}(z) + \alpha^2 \varphi_{sk}(z) + b^* \left[\frac{d}{dz} \varphi_{sk}(z) - \alpha \varphi_{sk}(z) \right] + C^{sk} \varphi_{sk}(z) = \eta^{sk}(z) e^{\alpha z}, \quad (35)$$

или:

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi_{sk}(z) + (b^* - 2\alpha) \frac{d}{dz} \varphi_{sk}(z) + (\alpha^2 - b^* \alpha + C^{sk}) \varphi_{sk}(z) = \eta_{sk}(z), \quad (36)$$

$$\text{где} \quad \eta_{sk}(z) = \eta^{sk}(z) e^{\alpha z}, \quad (37)$$

$$\text{Далее выберем } \alpha, \text{ удовлетворяющее соотношению: } \alpha = b^*/2, \quad (38)$$

$$\text{тогда:} \quad \alpha^2 - b^* \alpha + C^{sk} = -(b^*)^2/4 + C^{sk} \equiv -\mu_{sk}^2, \quad (39)$$

$$\text{отсюда:} \quad \mu_{sk}^2 = (b^*)^2/4 - C^{sk} = (V/2\chi)^2 + \beta_{sk}^2 + i\omega/\chi, \quad (40)$$

Таким образом находим:

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi_{sk}(z) - \mu_{sk}^2 \varphi_{sk}(z) = \eta_{sk}(z), \quad (41)$$

Это уравнение решим методом вариации произвольных постоянных [6]. В качестве фундаментальной системы однородного уравнения (41) имеем:

$$\varphi_{sk}^{(1)}(z) = e^{\mu_{sk}z}, \quad \varphi_{sk}^{(2)}(z) = e^{-\mu_{sk}z}, \quad (42)$$

Представим $\varphi_{sk}(z)$ в виде:

$$\varphi_{sk}(z) = C_{sk}^{(1)}(z)\varphi_{sk}^{(1)}(z) + C_{sk}^{(2)}(z)\varphi_{sk}^{(2)}(z) = C_{sk}^{(1)}(z)e^{\mu_{sk}z} + C_{sk}^{(2)}(z)e^{-\mu_{sk}z}, \quad (43)$$

откуда находим в соответствии с методом Лагранжа:

$$\left[\frac{d}{dz} C_{sk}^{(1)}(z) \right] e^{\mu_{sk}z} + \left[\frac{d}{dz} C_{sk}^{(2)}(z) \right] e^{-\mu_{sk}z} = 0, \quad (44)$$

$$\left[\frac{d}{dz} C_{sk}^{(1)}(z) \right] e^{\mu_{sk}z} + \left[\frac{d}{dz} C_{sk}^{(2)}(z) \right] e^{-\mu_{sk}z} = \frac{1}{\mu_{sk}} \eta_{sk}(z), \quad (45)$$

тогда:

$$\frac{d}{dz} C_{sk}^{(1)}(z) = \frac{1}{2\mu_{sk}} e^{-\mu_{sk}z} \eta_{sk}(z) \quad (46), \quad \frac{d}{dz} C_{sk}^{(2)}(z) = -\frac{1}{2\mu_{sk}} e^{\mu_{sk}z} \eta_{sk}(z), \quad (47),$$

или после интегрирования:

$$C_{sk}^{(1)}(z) = C_{sk}^{(1)}(0) + \frac{1}{2\mu_{sk}} \int_0^z e^{-\mu_{sk}\bar{z}} \eta_{sk}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad (48)$$

$$C_{sk}^{(2)}(z) = C_{sk}^{(2)}(0) - \frac{1}{2\mu_{sk}} \int_0^z e^{\mu_{sk}\bar{z}} \eta_{sk}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad (49)$$

Исходя из (43) находим результат выражения:

$$\begin{aligned} \varphi_{sk}(z) &= C_{sk}^{(1)}(0)e^{\mu_{sk}z} + C_{sk}^{(2)}(0)e^{-\mu_{sk}z} + \frac{1}{2\mu_{sk}} \int_0^z \eta_{sk}(\bar{z}) \left[e^{\mu_{sk}(z-\bar{z})} - e^{-\mu_{sk}(z-\bar{z})} \right] d\bar{z} = \\ &= A_{sk} e^{\mu_{sk}z} + B_{sk} e^{-\mu_{sk}z} + \frac{1}{\mu_{sk}} \int_0^z \eta_{sk}(\bar{z}) \operatorname{sh}[\mu_{sk}(z-\bar{z})] \eta_{sk}(\bar{z}) e^{\alpha\bar{z}} d\bar{z} \end{aligned} \quad (50)$$

где A_{sk} , B_{sk} – произвольные постоянные (как и $C_{sk}^{(1)}(0)$, $C_{sk}^{(2)}(0)$).

Соотношение (50) есть общим решением однородного уравнения (41), так как является суммой частного решения неоднородного. Из (50) находим в соответствии с (34) и (37).

$$\varphi_{sk}(z) = e^{-\alpha z} \left\{ A_{sk} e^{-\mu_{sk}z} + B_{sk} e^{\mu_{sk}z} + \frac{1}{\mu_{sk}} \int_0^z \operatorname{sh}[\mu_{sk}(z-\bar{z})] e^{\alpha\bar{z}} \eta_{sk}(\bar{z}) d\bar{z} \right\}, \quad (51)$$

или используя (38) и (40) имеем:

$$\varphi_{sk}(z) = A_{sk} e^{\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi} + \frac{1}{2\chi}} \right] z} + B_{sk} e^{\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi} - \frac{1}{2\chi}} \right] z} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi}}} \times \quad (52)$$

$$\times \int_0^z \left[\frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} T_k(a, \bar{z}) - T_k(b, \bar{z}) \right] \operatorname{sh} \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z - \bar{z})} d\bar{z}$$

что соответствует "полному" уравнению (22) для $T_{sk}^b(z)$ (т.е. неравны нулю значения температуры на поверхности цилиндра при $r = a$, $r = b$). Из уравнения (52) при соотношении между $\Phi^{sk}(z)$ и $T_{sk}^b(z)$ имеем:

$$T_{sk}^b(z) = A_{sk} e^{\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + B_{sk} e^{-\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}}} \times$$

$$\times \int_0^z \left[\frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} T_k(a, \bar{z}) - T_k(b, \bar{z}) \right] \operatorname{sh} \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z - \bar{z})} d\bar{z} \quad (53)$$

В частном случае, когда температура на наружной поверхности равна нулю из (53) имеем:

$$T_{skb}^b(z) = A_{sk} e^{\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + B_{sk} e^{-\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}}} \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} \int_0^z T_k(a, \bar{z}) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z - \bar{z})} d\bar{z} \quad (54)$$

Если учитывать значение уравнения (25), слагаемое в (54), содержащее интеграл, запишем в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}}} \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} \frac{1}{\pi} T^a \frac{\operatorname{sinc} \left| \frac{\Phi_0}{2} \right|}{k} \int_0^z \chi(z) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z - \bar{z})} d\bar{z}, \quad (55)$$

отсюда на основании (29) представим это выражение в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}}} \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} \theta_k^a \int_0^z \chi(z) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i k \omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z - \bar{z})} d\bar{z}$$

Внося это выражение в (54) находим $T_{skb}^b(z)$:

$$T_{skb}^b(z) = A_{sk} e^{\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + B_{sk} e^{-\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi}}} \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} \Theta_k^a \int_0^z \chi(z) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z - \bar{z})} dz, \quad (56)$$

Таким образом, функция $T_{skb}^b(z)$ удовлетворяет уравнение (30).

Проверим, что функция $T_{skb}^b(z)$, определяемая соотношением (54) удовлетворяет решению дифференциального уравнения (23). Функция $T_k(a, z)$ является разрывной в точке $z = \pm|z_0|/2$,

где z_0 – размер области Γ^a в направлении оси z .

В соответствии с (25) функция $T_k(a, z)$ имеет вид: $T_k(a, z) = \theta^a \chi(z)$,

где $\chi(z)$ – разрывная функция, которая может быть представлена, например, с помощью функции Хевисайда [8] соотношением:

$$\chi(z) = \theta(z + a) - \theta(z - a) \equiv \theta(a - |z|),$$

где $\chi(z)$ – характеристическая функция отрезка $[-a, a]$; $\theta(a)$ – функция Хевисайда (в нашем случае следует полагать $a = |z_0|/2$).

Находим последовательно для членов, содержащихся в выражении (54) произвольные постоянные (A_{sk} и B_{sk}), т.е. для однородного уравнения (30), используя сокращенное обозначение: $\sqrt{(V/2\chi)^2 + \beta_{sk}^2 + i\kappa\omega/\chi} = \sqrt{}$,

$$\text{получим: } (V/2\chi \pm \sqrt{})^2 - V/\chi(V/2\chi \pm \sqrt{}) - (\beta_{sk}^2 + i\kappa\omega/2) = 0.$$

Таким образом, содержащиеся в формуле (54) произвольные постоянные (A_{sk} и B_{sk}), удовлетворяют решение однородного выражения (23). Подставляя слагаемое, содержащее интеграл в (23) получим:

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{}} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \left\{ \frac{d}{dz} T_k(a, z_1) e^{\frac{1V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \left[\sqrt{}(z-z_1) \right] \Big|_{z_1=z} + \frac{d}{dz} \int_0^z T_k(a, z) \frac{d}{dz} e^{\frac{1V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \left[\sqrt{}(z-z_1) \right] dz_1 - \frac{V}{\chi} \left\langle T_k(a, z) e^{\frac{1V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \left[\sqrt{}(z-z_1) \right] \Big|_{z_1=z} + \int_0^z T_k(a, z_1) \frac{d}{dz} e^{\frac{1V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \left[\sqrt{}(z-z_1) \right] dz_1 \right\rangle - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi} \right) \right\}$$

Первые слагаемые в фигурной и угловой скобках равны нулю т.к. $\operatorname{sh}(0) = 0$. Тогда это выражение представим в виде:

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{}} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \left\{ \frac{d}{dz} \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \frac{V}{2\chi} \operatorname{sh} \left[\sqrt{}(z-z_1) \right] + \operatorname{ch} \left[\sqrt{}(z-z_1) \right] \sqrt{} \right\rangle e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} dz - \frac{V}{\chi} \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \frac{V}{2\chi} \times \right.$$

$$\times \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] + \text{ch}[\sqrt{(z-z_1)}] \sqrt{} \left. e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} dz_1 - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) \int_0^z T_{sk}(a, z_1) e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] dz_1 \right\},$$

или:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{}} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \left\{ \sqrt{} T_k(a, z) + \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \left(\frac{V}{2\chi} \right)^2 \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] + \frac{V}{2\chi} \sqrt{} \text{ch}[\sqrt{(z-z_1)}] \right\rangle dz_1 + \int_0^z T_k(a, z_1) \times \right. \\ & \times \frac{V}{2\chi} \sqrt{} \text{ch}[\sqrt{(z-z_1)}] + (\sqrt{})^2 \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] - \frac{V}{\chi} \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \frac{V}{2\chi} \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] + \text{ch}[\sqrt{(z-z_1)}] \sqrt{} \right\rangle \times \\ & \left. \times e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} dz_1 - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) \int_0^z T_{sk}(a, z_1) e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] dz_1 \right\} \end{aligned} \quad ,$$

отсюда и из выражения (23), приводя подобные члены получим:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{}} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \int_0^z T_k(a, z_1) \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] + \frac{V}{2\chi} \sqrt{} \text{ch}[\sqrt{(z-z_1)}] dz_1 + \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \frac{V}{2\chi} \sqrt{} \text{ch}[\sqrt{(z-z_1)}] + \right. \\ & \left. + \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] - \frac{V}{\chi} \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] + \sqrt{} \text{ch}[\sqrt{(z-z_1)}] \right\rangle e^{\frac{1}{2\chi}(z-z_1)} dz_1 \right. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $T_{skb}^b(z)$, определяемая соотношением (54), удовлетворяет уравнению (23). Перейдем к определению постоянных A_{sk} и B_{sk} , входящих в функцию $T_{skb}^b(z)$. В соответствии с (56) вычислим предварительно интеграл:

$$S = \int_0^z \chi(z_1) \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} dz_1, \quad (57)$$

Рассмотрим отдельно области изменения значений z : $-|z_0|/2 < z < |z_0|/2$, $z < -|z_0|/2$, $z > |z_0|/2$. В первой области $-|z_0|/2 < z < |z_0|/2$ имеем $\chi(z) \equiv 1$ и из (57) находим последовательно:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^z e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] dz_1 = \frac{1}{2} \int_0^z \left[e^{(\sqrt{+V/2\chi})(z-z_1)} - e^{(-\sqrt{+V/2\chi})(z-z_1)} \right] dz_1 = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[e^{(\sqrt{+V/2\chi})z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{(-\sqrt{-V/2\chi})z} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

В области $z > |z_0|/2$ имеем:

$$S = \int_0^{|z_0|/2} e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \text{sh}[\sqrt{(z-z_1)}] dz_1 = \frac{1}{2} \int_0^{|z_0|/2} \left[e^{(\sqrt{+V/2\chi})(z-z_1)} - e^{(-\sqrt{-V/2\chi})(z-z_1)} \right] dz_1 = -\frac{1}{2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z - \frac{|z_0|}{2}} - e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{\left(-\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z - \frac{|z_0|}{2}} - e^{\left(-\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right] \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left[1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left[1 - e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \right\} \quad (59) \end{aligned}$$

Для области $z < -|z_0|/2$ находим:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+z_0/2} e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \sqrt{(z-z_1)} dz_1 = \frac{1}{2} \int_0^{-|z_0|/2} \left[e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)(z-z_1)} - e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)(z-z_1)} \right] dz_1 = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left[1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left[1 - e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \right\}, \quad (60) \end{aligned}$$

Из (56), (58) – (60) находим представления для $T_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z)$ при $z > |z_0|/2$; $T_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z)$ при $z < |z_0|/2$; $T_{\text{skb}}^{\text{b}-}(z)$ при $z > -|z_0|/2$ и $T_{\text{skb}}^{\text{b}-}(z)$ при $z < -|z_0|/2$;

I. В области $z > |z_0|/2$

$$\begin{aligned} T_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z) &= A_{\text{sk}}^+ e^{\left(\sqrt{+V/2\chi}\right)z} + B_{\text{sk}}^+ e^{\left(-\sqrt{-V/2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{\dots}} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[1 - e^{\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right\}, \quad (61) \end{aligned}$$

II. При $z < -|z_0|/2$

$$\begin{aligned} T_{\text{skb}}^{\text{b}-}(z) &= A_{\text{sk}}^- e^{\left(\sqrt{+V/2\chi}\right)z} + B_{\text{sk}}^- e^{\left(-\sqrt{-V/2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{\dots}} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[1 - e^{\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right\}, \quad (62) \end{aligned}$$

III. В области $-|z_0|/2 < z < |z_0|/2$

$$\begin{aligned} T_{\text{skb}}^{\text{b}\pm}(z) &= A_{\text{sk}}^{\pm} e^{\left(\sqrt{+V/2\chi}\right)z} + B_{\text{sk}}^{\pm} e^{\left(-\sqrt{-V/2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{\dots}} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] \right\}, \quad (63) \end{aligned}$$

Здесь верхние индексы "+", "-" соответствуют принадлежности перемен-

ной z областям $z > 0$ и $z < 0$ соответственно. Для определения значений постоянных, A_{sk}^+ , B_{sk}^+ , A_{sk}^- , B_{sk}^- воспользуемся условиями ограниченности $T_{skb}^b(z)$ в областях $z > 0$ и $z < 0$, а также условиями сопряжения в точке $z = 0$ (аналогичные условия использовались в [5] при решении других задач). Рассмотрим условие ограниченности $T_{skb}^{b+}(z)$ в области $z > |z_0|/2$. Из (61) имеем:

$$T_{skb}^{b+}(z) = \left\{ A_{sk}^+ + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] \right\} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + B_{sk}^+ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[1 - e^{\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) z}, \quad (64)$$

Исходя из (64) и условия ограниченности при $z > |z_0|/2$ имеем:

$$A_{sk}^+ = -\frac{1}{\pi} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right], \quad (65)$$

Откуда следует, что при $z > |z_0|/2$:

$$T_{skb}^{b+}(z) = B_{sk}^+ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[1 - e^{\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) z}, \quad (66)$$

При $z < -|z_0|/2$ условие ограниченности $A_{skb}^{b-}(z)$, вытекающее из (62), будет записано в виде:

$$T_{skb}^{b-}(z) = A_{sk}^- e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \left\{ B_{sk}^- - \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] \right\} \times e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} \quad (67)$$

Откуда условие ограниченности примет вид:

$$B_{sk}^- = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right], \quad (68)$$

При этом для $T_{skb}^{b-}(z)$ имеем представление: при $z < -|z_0|/2$;

$$T_{skb}^{b-}(z) = A_{sk}^- e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z}, \quad (69)$$

Используя (63) и (65) находим $T_{skb}^{b+}(z)$ при $0 < z < |z_0|/2$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z) = & -\frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{V+2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \mathbf{B}_{\text{sk}}^+ e^{-\left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{V+2\chi}} \left[e^{\left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}}\right) z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{V-2\chi}} \left[e^{-\left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}}\right) z} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (70)$$

Принимая во внимание (63) и (68), получим при $-|z_0|/2 < z < 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{skb}}^{\text{b}-}(z) = & \mathbf{A}_{\text{sk}}^- e^{\left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{V-2\chi}} \left[e^{-\left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] e^{-\left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{V+2\chi}} \left[e^{\left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}}\right) z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{V-2\chi}} \left[e^{-\left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}}\right) z} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (71)$$

Условиями сопряжения при $z = 0$ будут:

$$\Gamma_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z) \Big|_{z=0+0} = \Gamma_{\text{skb}}^{\text{b}-}(z) \Big|_{z=0-0}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Gamma_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z) \Big|_{z=0+0} = \frac{\partial}{\partial z} \Gamma_{\text{skb}}^{\text{b}-}(z) \Big|_{z=0-0} \quad (73)$$

Из (70), (71), (72) имеем:

$$-\frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{V+2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] + \mathbf{B}_{\text{sk}}^+ = \mathbf{A}_{\text{sk}}^- + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \times \frac{1}{\sqrt{V-2\chi}} \left[e^{-\left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right]$$

отсюда;

$$\mathbf{A}_{\text{sk}}^- - \mathbf{B}_{\text{sk}}^+ = -\frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{V+2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] - \frac{1}{\sqrt{V-2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] \right\},$$

или;

$$\mathbf{A}_{\text{sk}}^- - \mathbf{B}_{\text{sk}}^+ = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{V-2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] - \frac{1}{\sqrt{V+2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] \right\}, \quad (74)$$

используя (70), (71) и (73) находим;

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] - \left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}} \right) \mathbf{B}_{\text{sk}}^+ = \left(\sqrt{V+\frac{V}{2\chi}} \right) \mathbf{A}_{\text{sk}}^- - \\ & -\frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \left[e^{-\left(\sqrt{V-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \mathbf{a}) \sqrt{V}} \{1-1\} \end{aligned}$$

отсюда;

$$\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)A_{sk}^- + \left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)B_{sk}^+ = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \left[e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} + e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2 \right], \quad (75)$$

Исключая A_{sk}^- из этого соотношения и (74) находим:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \left[B_{sk}^+ + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \left[\frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left\langle 1 - e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left\langle 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right\rangle \right] \right] + \\ & + \left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) B_{sk}^+ = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \left[e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} + e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2 \right] \end{aligned}$$

или;

$$\begin{aligned} & \left[\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) + \left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \right] B_{sk}^+ = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \left[\left[e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} + e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2 \right] \right] - \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] - \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \right] \end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{aligned} B_{sk}^+ 2\sqrt{} & = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \left\{ \left(1 + \frac{\sqrt{+V/2\chi}}{\sqrt{-V/2\chi}} \right) e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} + \left(1 - \frac{\sqrt{+V/2\chi}}{\sqrt{+V/2\chi}} \right) e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - \right. \\ & \left. - 2 + \left(\frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} - \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \right) \left(\sqrt{+V/2\chi} \right) \right\} \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} B_{sk}^+ & = \frac{1}{2\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{(\sqrt{})^2} \left[\frac{2}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2 - \frac{2\sqrt{+V/2\chi}}{(\sqrt{-V/2\chi})(\sqrt{+V/2\chi})} \left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{2\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{(\sqrt{})^2} 2 \left[\frac{\sqrt{} e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}}}{\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}} - \frac{\sqrt{}}{\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}} \times \left[e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right], \quad (76) \end{aligned}$$

отсюда и из (74):

$$A_{sk}^- = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{}} \left[\frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \right] -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \Bigg\} = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right], \quad (77)$$

Таким образом, для интервала $0 < z < |z_0|/2$ из (63), (65) и (76) имеем

$T_{skb}^{b+}(z)$:

$$\begin{aligned} T_{skb}^{b+}(z) &= -\frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[1 - e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} + B_{sk}^+ e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] \right\} = -\frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \times \\ &\times \left[1 - e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] \right\} = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \times \\ &\left[\frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\left(\frac{|z_0|-z}{2}\right)} + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\left(\frac{|z_0|+z}{2}\right)} - \left(\frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \times \\ &\times \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[\frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\left(\frac{|z_0|-z}{2}\right)} + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\left(\frac{|z_0|+z}{2}\right)} - \frac{2\sqrt{-V/2\chi}}{\left(\sqrt{-V/2\chi}\right)^2 - (V/2\chi)^2} \right]. \quad (78) \end{aligned}$$

Соответственно для области $z > |z_0|/2$ находим $T_{skb}^{b+}(z)$ из выражений (66) и (74):

$$\begin{aligned} T_{skb}^{b+}(z) &= \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left\{ \left[e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \left[1 - e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \times \right. \\ &\times \left. e^{\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right\} = -\frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \operatorname{sh} \left[\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}} - \frac{V}{2\chi} \right) \frac{|z_0|}{2} \right] e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z}, \quad (79) \end{aligned}$$

В случае $z < -|z_0|/2$ имеем из (69), (77):

$$T_{skb}^{b-}(z) = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left\{ \left[e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] e^{\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \left[1 - e^{-\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \times \right.$$

$$\times e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left\{ = -\frac{2 I_k(\beta_{sk}b) \theta_k^a}{\pi I_k(\beta_{sk}a) \sqrt{\chi}} \frac{1}{\sqrt{\chi + V/2\chi}} \operatorname{sh} \left[\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}} \right) \frac{|z_0|}{2} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z}, \quad (80) \right.$$

Таким образом, окончательное решение уравнения (30) при $-\infty < z < +\infty$ приобретает вид:

1) При $z \in (-\infty, -|z_0|/2)$ из (80):

$$T_{skb}^{b-}(z) = -\frac{2 I_k(\beta_{sk}b) \theta_k^a}{\pi I_k(\beta_{sk}a) \sqrt{\chi}} \frac{1}{\sqrt{\chi + V/2\chi}} \operatorname{sh} \left[\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}} \right) \frac{|z_0|}{2} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z}, \quad (81)$$

2) При $z \in (-|z_0|/2, |z_0|/2)$ из (78):

$$T_{skb}^{b\pm}(z) = \frac{1 I_k(\beta_{sk}b) \theta_k^a}{\pi I_k(\beta_{sk}a) \sqrt{\chi}} \left[\frac{1}{\sqrt{\chi + V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \frac{1}{\sqrt{\chi - V/2\chi}} \times e^{\left(\sqrt{\frac{V}{2\chi}}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} - \frac{2\sqrt{\chi}}{\left(\sqrt{\chi}\right)^2 - (V/2\chi)^2} \right], \quad (82)$$

3) При $z \in (|z_0|/2, +\infty)$ из (79):

$$T_{skb}^{b+}(z) = -\frac{2 I_k(\beta_{sk}b) \theta_k^a}{\pi I_k(\beta_{sk}a) \sqrt{\chi}} \frac{1}{\sqrt{\chi - V/2\chi}} \operatorname{sh} \left[\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}} \right) \frac{|z_0|}{2} \right] e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)z}, \quad (83)$$

В связи с тем, что характеристическая функция $\chi(z)$ разрывна в точках $z = \pm |z_0|/2$, проводилась проверка условия их сопряжения для (81); (82); (83).

Отметим, что условия соответствия относятся к распределению температурного поля [3, 4], т.е. к функции $T_b(r, \theta, z)$. Выше использовались условия сопряжения величин $T_{skb}^b(z)$, которые являются коэффициентами Фурье разложения функции $T_b(r, \theta, z)$ по составляющим $e^{ik\theta}$, $U_{sk}^b(r)$, образующих ортонормированный базис (с точностью до нормирующего множителя) в пространстве L^2 (пространстве Гильберта [8]).

В связи с тем, что $T_b(r, \theta, z)$ принадлежит $L^2(a, b)$, указанные условия сопряжения для $T_{skb}^b(z)$ относятся также и к $T_b(r, \theta, z)$. Используя формулы обращения для тригонометрических рядов Фурье по угловой координате θ и задачи Штурма-Лиувилля – по радиальной координате r [6], получим представление для $T(r, \theta, z)$; имеем при $\theta, z \in \Gamma^b$.

$$T(r, \theta, z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{ka}^a(r, z) e^{ik\theta}, \quad (84)$$

индексы "a" вверху и внизу в $T_{ka}^a(r, z)$ соответствуют разложению $T_{ka}^a(r, z)$ по функциям $U_{sk}^a(\cdot)$ и условию равенства нулю температуры на внутренней стороне втулки. Таким образом, имеет место аналогия с (82).

Используем представления [6]

$$T_{ka}^a(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{sk} \frac{I_k^2(\beta_{sk} b)}{I_k^2(\beta_{sk} a) - I_k^2(\beta_{sk} b)} T_{ska}^a(z) U_{sk}^a(r), \quad (85)$$

или

$$T(r, \theta, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{sk}^2 \frac{I_k^2(\beta_{sk} b)}{I_k^2(\beta_{sk} a) - I_k^2(\beta_{sk} b)} \frac{1}{\pi} R^{sk} \Theta_k^b \frac{I_k(\gamma_{sk} b)}{I_k(\gamma_{sk} a)} \frac{1}{\sqrt{\cdot}} \left[\frac{1}{\sqrt{\cdot + 1/2 V/\chi}} \times \right. \\ \left. \times e^{-\left(\sqrt{\cdot + 1/2 V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \frac{1}{\sqrt{\cdot - 1/2 V/\chi}} e^{-\left(\sqrt{\cdot + 1/2 V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} - \frac{2\sqrt{\cdot}}{\sqrt{\cdot^2 - \left(1/2 V/\chi\right)^2}} \right] U_{sk}^a(r), \quad (86)$$

или:

$$T(r, \theta, z) = -\frac{1}{2} T^b \sum e^{ik\theta} \frac{\sin k \frac{\Phi_0}{2}}{k} \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s \frac{\beta_s^2}{\sqrt{\cdot}} \left[\frac{1}{\sqrt{\cdot + 1/2 V/\chi}} e^{-\left(\sqrt{\cdot + 1/2 V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\cdot - 1/2 V/\chi}} e^{-\left(\sqrt{\cdot - 1/2 V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} - \frac{2\sqrt{\cdot}}{\sqrt{\cdot^2 - \left(1/2 V/\chi\right)^2}} \right] U_{sk}^a(r), \quad (87)$$

где

$$I_s = \frac{1}{\frac{I_k(\beta_{sk} a)}{I_k(\beta_{sk} b)} - \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)}}, \quad (88)$$

Соотношение (87) может быть представлено в виде:

$$T_0 = \frac{T(r, \theta, z) - T_b(r, \theta, z)}{T^b \sqrt{ab}} (b-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \frac{\sin n \frac{\Phi_0}{2}}{n} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{\cdot}} \left[\frac{1}{\sqrt{\cdot + 1/2 V/\chi}} \times e^{-\left(\sqrt{\cdot + 1/2 V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\cdot - 1/2 V/\chi}} e^{-\left(\sqrt{\cdot - 1/2 V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} \right] U_{sk}^a(r) + \sum (-1)^{s-1} U_{sk}^a(r) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{sk} e^{in\theta} \frac{\sin \frac{\Phi_0}{2} k}{k}$$

где

$$M_{sk} = 1 - \frac{\beta_{sk}^2}{\beta_{sk}^2 + ikw/x} \quad (90)$$

Введем обозначения:

$$\Sigma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\theta k} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{r}} \left[\frac{1}{\sqrt{r + \left(\frac{1}{2} \frac{V}{\chi}\right)^2}} e^{-\left(\sqrt{r + \frac{1V}{2\chi}}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \frac{1}{\sqrt{r - \frac{1}{2} \frac{V}{\chi}}} e^{-\left(\sqrt{r + \frac{1V}{2\chi}}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} \right] U_{sk}^a(r)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} U_{sk}^a(r) \Sigma_2' ; \quad \Sigma_2' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{sk} e^{i\theta k} \frac{\sin \frac{\Phi_0}{2} k}{k}$$

После чего получим выражение:

$$\Sigma + \Sigma_2' = -\frac{2}{\pi^2} \frac{b-a}{\sqrt{ra}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\theta k} \frac{\sinh \frac{\Phi_0}{2}}{k} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{r}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{r - \frac{1}{2} \frac{V}{\chi}}} e^{\left(\sqrt{r + \frac{1V}{2\chi}}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \frac{1}{\sqrt{r - \frac{1}{2} \frac{V}{\chi}}} \times \right. \\ \left. \times e^{-\left(\sqrt{r + \frac{1V}{2\chi}}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} \right] \frac{1}{s} \sin \left(\frac{b-r}{b-a} \pi s \right) - \frac{2}{\pi} \frac{b-a}{\sqrt{ra}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{b-r}{b-a} \pi s \right)}{s} e^{-\theta a} \times \frac{\operatorname{sh} \left[\left(\frac{\pi - \Phi_0}{2} \right) s \right]}{\operatorname{sh} \pi a} \quad (91)$$

При получении (91) использовали равенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^2 + k^2} \sin kx = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(x - \pi) a \operatorname{cosech} \pi a ; \quad 0 < x < 2\pi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^2 + k^2} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi}{2a^2} \{1 - \operatorname{sh}[(\pi - x)a] \operatorname{cosech} \pi a\} - \frac{x}{2a^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx \cos ky = \frac{\pi - x}{2} , \quad y < x < \pi ,$$

получаемые разложением правых частей в ряды Фурье.

Из соотношения: $q = -\lambda \frac{\partial}{\partial r} T(r, \theta, z)$,

где

$$r = b; \quad -|\Phi_0|/2 \leq \theta \leq |\Phi_0|/2; \quad -|z_0|/2 \leq z \leq |z_0|/2;$$

q – мощность теплового потока, переносимого лазерным лучом через поверхность втулки; λ – коэффициент теплопроводности материала детали.

Подставляя сюда, выражение (91) получаем представление в виде:

$$\frac{T(r, \theta, z)}{T^b} = \frac{r-a}{b-a} \chi(\theta) \chi(z) + \sqrt{\frac{b}{r}} \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\theta k} \frac{\sin k \frac{\Phi_0}{2}}{k} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{r}} \left[\frac{1}{\sqrt{r + \frac{1}{2} \frac{V}{\chi}}} \times \right. \right.$$

$$\times e^{-\left(\sqrt{-\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}-z\right)} + \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}} e^{-\left(\sqrt{-\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}+z\right)} \left[\frac{1}{s} \sin\left(\frac{b-r}{b-a}\pi s\right) - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\frac{b-r}{b-a}\pi s\right) e^{-\theta a_s} \operatorname{sh}\left[\left(\pi - \frac{\Phi_0}{2}\right)a_s\right] \operatorname{cosec} ha_s \right], \quad (92)$$

где $a_s \equiv \beta_{sk} \chi/w$; T^b – температура в зоне Γ^b . Найдем:

$$T(r, \theta, z) = \frac{k|Q|}{\lambda S_{\text{пл}}} (b-a) \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \frac{1}{b} + \sqrt{2} \pi^{3/4} \sqrt{\frac{b}{D}} \sqrt{\frac{n}{\chi}} \right] (b-a)} - \frac{k|Q|}{\lambda S_{\text{пл}}} (b-r), \quad (93)$$

где $|Q|$ – тепловой поток, переносимый лазерным лучом; $S_{\text{пл}}$ – площадь лазерного следа на поверхности детали. Из (93) находим:

$$\Delta = b-r = \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \frac{1}{b} + \sqrt{2} \pi^{3/4} \sqrt{\frac{b}{D}} \sqrt{\frac{n}{\chi}} \right] (b-a)} - \frac{\pi \lambda D^2 T(r, \theta, z)}{4k\rho(b-a)} \right\} (b-a), \quad (94)$$

где $T(r, \theta, z)$ – температура (под следом лазерного луча на поверхности детали) на глубине $\Delta = b-r$ при принятом выше условии, что T_0 – температура окружающей среды (воздуха) равна нулю.

При $T_0 \neq 0$ очевидно имеем: $T_d(r, \theta, z) = T(r, \theta, z) + T_0$

где $T_d(r, \theta, z)$ – действительная температура внутри втулки, при температуре окружающей среды (воздуха) не равной нулю.

Таким образом, находим: $T(r, \theta, z) = T_d(r, \theta, z) - T_0$ (95). Полагая, что значение $T_d(r, \theta, z)$ является равным температуре разложения азотированного поверхностного слоя детали, т.е. $T_d(r, \theta, z) = 625^\circ \text{C}$ (96), и используя средние величины параметров разупрочнения при лазерной обработке, входящих в (94) и равные:

$$n = 0,29 \text{ л/с}; \quad D = 4 \times 10^{-3} \text{ м}; \quad P = 1,15 \times 10^3 \text{ Вт}; \quad k = 0,9; \quad \lambda = 24,7 \text{ Вт/мК}; \\ b = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad b-a = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad \chi = 5,96 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad \rho = 7,83 \text{ г/см}^3, \quad (97)$$

находим из него: $\Delta = b-r = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,52 \text{ мм}$ (98), где Δ – толщина слоя, разложившегося в результате лазерной термообработки на внешней поверхности детали.

Экспериментальная проверка подтвердила, что при таких параметрах обработки начинается диссоциация нитридов и карбонитридов на глубине до 0,50-0,54мм. Процесс лазерной обработки сопровождается потрескиванием и газо-

выделением. Качество обработанной поверхности хорошее и при диссоциации нитридов не требуется последующей механической обработки (точение, шлифовка). Использование лазерной обработки (перед восстанавливающей ЭИО) обеспечивает локальный нагрев и не приводит к разупрочнению сердцевины, что особенно важно для длинномерных деталей типа – шток, которые подвергаются сложной термической обработке. Эксперименты проводили на промышленной установке – "Комета - 2", образцами были детали узла парораспределения турбины, снятые после эксплуатации для ремонта.

Получены зависимости [9] уровня и однородности твердости от плотности мощности при лазерной обработке деталей (штоки и втулки узла парораспределения турбины, подвергнутые азотированию на глубину до 0,5 мм). Данные экспериментов представлены в виде таблицы.

Плотность мощности, КВт/см ²	Средний уровень твердости, HRC	Наличие дефектов (поры, трещины)
6,0	56,6±2,0	наличие пор и микротрещин
7,0	28,5±2,0	поверхность без видимых дефектов
8,0	26,8±1,8	то же
9,0	25,7±2,2	-//-
10,0	26,1±1,5	незначительное оплавление поверхности
11,0	26,1±1,2	видимое оплавление поверхности

Примечание: * – материал деталей – сталь 20Х1М1Ф1ТР; диаметр деталей 40мм; обороты – 16 мин⁻¹.

Список литературы: 1. А.с. №1722762, СССР, МКИ В23Р 6/00. Способ ремонта прокатных валков. / Скобло Т.С., Сидашенко А.И., Автухов А.К. и др. /БИ. №12, 1990. – 8 с. 2. А.с. №1468933, СССР, МКИ 4С21 ДЗ/02. Способ обезуглероживания стальных изделий. / Кандаловский И.П. и др. – 3 с. 3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 1986. – 480 с. 4. Морс Ф.М., Феибах Г.Н. Методы теоретической физики. Т.1. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 886 с. 5. Карслоу Г., Елгер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с. 6. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т.П. – М.: Наука, 1960. – 295 с. 7. Слоновский Н.В. Об одном классе интегральных представлений и некоторых оценках функций Бесселя. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – М.: АН СССР. – № 5. – 1968. 8. Функции математической физики. / Кампе де Фурье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т. – М.: Физматгиз, 1963. – 402 с. 9. Мартыненко А.Д., Скобло Т.С., Сидашенко А.И., Слоновский Н.В. Способ восстановления и упрочнения деталей лазерным лучом. //Сб. науч. тр.: Підвищення надійності відновлюємих деталей машин. Вып. 4: – Харьков: ХГТУСХ, 2000. – С. 82-87.

Поступила в редколлегию 16.07.02