УДК 539.3

***О.К.МОРАЧКОВСЬКИЙ***, докт.техн.наук; ***О.О.ЗАМУЛА***; НТУ «ХПІ»

# МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПОВЗУЧОСТІ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

В роботі надано метод щодо розв'язання початково-крайових задач теорії повзучості оболонок обертання, що побудовані на базі методу скінченних елементів (МСЕ) та рівнянь стану з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. Розглянуто оболонки з деформацією поперечного зсуву та геометричною нелінійністю при скінченних нормальних переміщеннях. Надані вихідні рівняння та схеми їхньої лінеаризації. Розглянуто приклад, за яким встановлено збіжні властивості методу.

In article the method of the solution of the initial-boundary value problems of the creep theory of shells of revolution is given, which one are constructed on the basis of finite element method (FEM) and equations of state with allowance creep-damage process. The shells with deformation of transversal shift and geometrical nonlinearity are reviewed at final normal displacements. The input equations and schemes of their linearization are given. An example, in which one the properties of convergence of a method are established, is reviewed.

**Актуальність теми.** Методи розв'язування задач повзучості оболонок добре відомі з літератури, наприклад [1-3]. Разом з цим, за аналізом публікацій можна зробити висновок, що залишаються нез'ясованими такі питання, як врахування деформації поперечного зсуву та геометричної нелінійності в оболонках при повзучості, які пошкоджуються внаслідок повзучості. Ці питання є актуальними в механіці оболонок. В роботі запропоновано підхід щодо побудови визначальних рівнянь повзучості оболонок обертання з урахуванням пошкоджуваності матеріалу, деформації поперечного зсуву та геометричної нелінійності. Для даних рівнянь, побудованих із використанням МСЕ, надані схеми щодо їхньої лінеаризації та метод для розв'язування.

**Постановка проблеми.** Розглянемо довільну оболонку обертання, товщиною h, яку апроксимуємо конічними оболонками, що з'єднані вздовж твірної, яка утворює серединну поверхню оболонки. Елемент оболонки показано на рис.1.

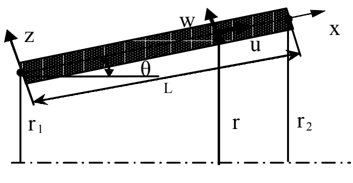


Рисунок 1 – Елемент оболонки обертання

Використовуючи загальновідомі, наприклад [4], означення для переміщень та деформацій серединної поверхні елемента оболонки, запишемо геометрично нелінійні рівняння оболонки, що згинається, у наступному вигляді:

$$\varepsilon_{11}=\Omega_{11}+z\chi_{11}; \qquad \varepsilon_{22}= \Omega_{22}+z\chi_{22}; \qquad \varepsilon_{13}=2\Omega_{13} \qquad (1)$$

де

$$\Omega_{11}=\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2,\qquad \Omega_{22}=\frac{1}{r}\left(u\sin\theta+w\cos\theta\right),\qquad 2\Omega_{13}=\gamma_1+\frac{dw}{dx},$$

$$\chi_{11}=\frac{d\gamma_1}{dx},\qquad \chi_{22}=\frac{1}{r}\left[\gamma_1\sin\theta+\frac{\cos\theta}{r}\left(u\sin\theta+w\cos\theta\right)\right].$$

Рівновага елемента оболонки в довільний час відбувається за умов мінімуму повної потенційної енергії за відомих для цього часу деформацій повзучості [1-3]. За цих умов невідомі переміщення серединної поверхні оболонки, що знаходиться під дією об'ємних та поверхневих сил, можна відшукати як точку стаціонарності варіаційного функціоналу типу Лагранжа:

$$U=\frac{1}{2}\int_V(\varepsilon_L^T D\varepsilon_L+\tilde{\varepsilon}^T D\tilde{\varepsilon}+c^T Dc)dV+$$

$$+\int_V(\tilde{\varepsilon}^T D\varepsilon_L-\varepsilon_L^T Dc-\tilde{\varepsilon}Dc)dV\ -\int_V u^T g dV-\int_S u^T p dS\ . \tag{2}$$

В (2) враховано, що згинання оболонки відбувається при скінченних нормальних прогинах її серединної поверхні та у векторі повної деформації $\varepsilon = e + c$ відокремлено лінійну та нелінійну складові:

$$\varepsilon_L^T=\left\{\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{13}\right\},\ \tilde{\varepsilon}^T=\left\{\frac{1}{2}\left(w'\right)^2\quad 0\quad 0\right\}, \tag{3}$$

де $u^T = \{u,w,\psi = \gamma_1\}$ – вектори переміщень в серединній поверхні, що пов'язані з $\varepsilon^T$ співвідношеннями (1);

$c^T = \{c_{11},c_{22},c_{13},\}$ – вектор деформацій повзучості;

$g, p$ – вектори зовнішніх об'ємних та поверхневих сил.

Вектор напруження в оболонці $\sigma$ визначено за законом Гука: $\sigma = D\varepsilon$, де $D$ – матриця пружної жорсткості матеріалу, а $\varepsilon=\varepsilon_L+\tilde{\varepsilon}-c$ – вектор повної деформації. Рівняння стану матеріалу оболонки при повзучості з пошкоджуваністю прийнято у вигляді:

$$\dot{c}_{11}\left(\sigma_e,\omega\right)=\frac{B\sigma_i^{n-1}}{\left(1-\omega^r\right)^m}\left(\sigma_{11}-\frac{1}{2}\sigma_{22}\right),\ (1\leftrightarrow 2);$$

$$2\dot{c}_{13}\left(\sigma_e,\omega\right)=\frac{3B\sigma_i^{n-1}}{\left(1-\omega^r\right)^m}\sigma_{13}, \tag{4}$$

$$\dot{\omega}\left(\sigma_e,\omega\right)=\frac{D\left(\alpha\times max\left\{\sigma_I,\sigma_{II},\sigma_{III}\right\}+\left(1-\alpha\right)\sigma_i\right)^k}{\left(1-\omega^r\right)^p};\quad \omega(0)=0;\ \ \omega(t_*)=\omega_*,$$

де $c_{ij}$, $\sigma_{ij,}$ компоненти тензорів деформацій повзучості та напружень;

$\sigma_e$, $\sigma_{\mathrm{I}}$, $\sigma_{\mathrm{II}}$, $\sigma_{\mathrm{III}}$ – еквівалентні за Мізесом та головні напруження;

$\omega$, $t_*$ – параметр пошкоджуваності та час до руйнування.

Різні матеріали оболонки можна конкретизувати прийняттям значень для матеріальних сталих D, B, n, r, m, l, k, $\alpha$ щодо повзучості, та зазвичай, E, $\nu$ – модулем пружності та коефіцієнтом Пуассона – пружності.

Дискретизація оболонки здійснюється спочатку шляхом її поділу на послідовність елементів - конічних оболонок, а рівності (1) для кожного з цих елементів були перетворені за схемою методу скінченних елементів [4]. В локальній системі координат для елемента в його крайніх вузлах прийнято незалежними по шість наступних узагальнених координат $q_i$:

$$q_1^T = \{q_1, q_2, ..., q_6\} = \{u(0), u'(0), w(0), w'(0), \psi(0), \psi'(0)\} ,$$

$$q_2^T = \{q_7, q_8, ..., q_{12}\} = \{u(L), u'(L), w(L), w'(L), \psi(L), \psi'(L)\} .$$

Для переміщень $u$, $w$ та функції зсуву $\psi$ приймемо наступні поліноміальні апроксимації:

$$u = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3; \quad w = b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3; \quad \psi = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3.$$

Коефіцієнти для цих апроксимацій виразимо через прийняті узагальнені координати $q_i$, так що в (2) використовуватимемо наступні вирази для переміщень точок серединної поверхні оболонки та функції зсуву:

$$u = \sum_{i=1,2,7,8} q_i N_i , \quad w = \sum_{i=3,4,9,10} q_i N_i , \quad \psi = \sum_{i=5,6,11,12} q_i N_i . \tag{5}$$

де $N_i(\xi)$, $\xi \epsilon(-1; 1)$ – функції форми:

$$N_1 = (1-\xi)^2 (2+\xi)/4 , \qquad N_2 = (\xi-1)(\xi^2-1)/4 ,$$

$$N_3 = (1+\xi)^2 (2-\xi)/4 , \quad N_4 = \frac{1}{4}(\xi-1)(\xi+1)^2 /4 .$$

Виконавши перетворення в (2), шляхом підстановки туди виразів (3), (5) з урахуванням співвідношень (1), отримуємо варіацію за узагальненими незалежними координатами цього функціонала для оболонки в цілому. З умови рівності нулю варіації функціоналу (2) одержимо визначальне рівняння МСЕ відносно глобальних координат, яке буде нелінійним відносно вектора q, складеного з узагальнених координат в точках твірної оболонки, де елементи з'єднані. Представимо запис цього рівняння у вигляді неявної функції від координат вектора $q$:

$$\varphi(q,c) = 0. \tag{6}$$

Для розв'язування (6) застосуємо ітераційний алгоритм методу Ньютона-Канторовича [6]:

$$q^{(i+1)} = q^{(i)} + \Delta q, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \varphi(q^{(i)}, c)}{\partial q} \Delta q = -\varphi(q^{(i)}, c) . \tag{8}$$

Рівняння (8) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно прирощення вектора $q^i$ на наступній ($i$+1) ітерації. Для фіксованого моменту часу, з відомим вектором деформацій повзучості – с, цей процес закінчується при виконанні умови збіжності: $max\left\|\Delta q / q^{(i)}\right\| \le \varepsilon$ . Для початкового наближення приймається $q^0 = 0$. Вихідні рівняння виду (8) зводяться до наступного вигляду:

$$\left(K + \tilde{K}\right)\Delta q = P - \tilde{P} + P_c , \tag{9}$$

де $K$, $\tilde{K}(q^{(i)}, c)$ – глобальна матриця жорсткості оболонки, яка співпадає з тією, що має місце при геометрично лінійному деформуванні оболонки, та змінна матриця жорсткості, відповідно до геометричної нелінійності;

$P$ – вектор зведених до вузлів узагальнених сил, що діють на оболонку;

$\tilde{P}(q^{(i)}, c)$, $P_c$ – вектори фіктивних сил, зведених до вузлів, що пов'язані з геометричною нелінійністю та повзучістю.

До цих рівнянь додається система кінетичних за часом рівнянь стану (3) та крайові умови кріплення оболонки. Для розгляду процесу повзучості у запропонованому методі використано схему покрокового подовження у часі за параметром вектора деформацій повзучості, за допомогою чисельного інтегрування рівнянь стану на кроці методом Рунге-Кути-Мерсона [2,3,5].

**Приклад.** Розглянемо згинання круглої пластини, розрахункову схему якої надано на рис. 2. Як і в роботі [5], значення геометричних та механічних параметрів приймемо наступними: $R$ = 10 см; $h$ = 0,1 см; $r_0$ = 2см; $E$ = 200 ГПа; $\nu$ = 0,3.

За результатами розв'язування задачі про геометрично нелінійне згинання пластини в умовах пружного деформування вивчалася властивість зі збіжності методу за кількістю ітерацій N при різних рівнях тиску. Ці дослідження встановлюють важливу якісну характеристику зі збіжності запропонованого в статті методу, бо на кожному кроці у часі при повзучості задача зводиться за рахунок фіктивних сил від деформацій повзучості до аналогічної з тією різницею, що навантаження пластини набуває загального виду. Порівняння розрахункових даних з тими, що наведені в [5], для величини максимального прогину $w_{\max}$ при $q = 0{,}02$ МПа дозволило встановити, що в обох випадках $w_{\max} = 0{,}8$ мм. Цей рівень прогину мав місце на внутрішньому контурі вирізу пластинки. Залежність величини $w_{\max}$ від кількості ітерацій проілюстровано на рис. 3, де $\tilde{w} = w_{\max}(N) / w_{\max}$ при різних рівнях тиску.

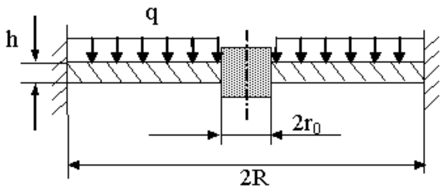

Рисунок 2

**Висновки.** В статті запропоновано метод щодо розв'язання початково-крайових задач теорії повзучості оболонок обертання. Метод базується на дискретизації оболонок конічними елементами з нелінійними функціями форм та рівняннях стану з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. Оболонки розглядаються за моделями, що відповідають теорії оболонок із поперечним зсувом та геометричною нелінійністю у квадратичному наближенні, що дозволяє враховувати нормальні прогини, які при згинанні стають більшими ніж товщина оболонки. Розглянуто дані зі збіжності методу, з яких випливає, що навіть для суттєвої по відношенню до товщини $w_{\max}/h > 1$ величини прогину для збіжності розв'язування достатньо невеликої кількості ітерацій N < 6. Зрозуміло, що, чим вищий рівень тиску, тим більша кількість ітерацій потрібна для отримання точного результату.

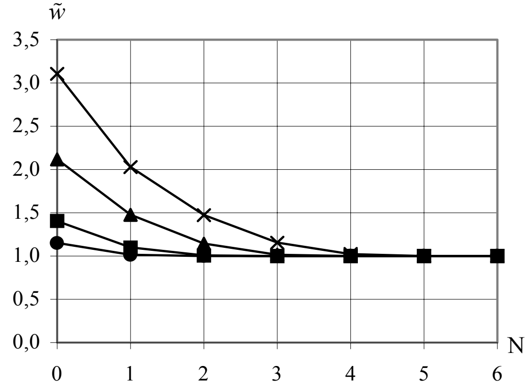

Рисунок 3 – Дані зі збіжності методу за кількістю ітерацій N:
q, МПа —●—0,01; —■— 0,02; —▲—0,05; —×—0,1;

**Список літератури: 1.** *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М., Наука, 1966. – 752 с. **2.** *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep life-time estimations. – Tech. Mech., 20, (2000). – P. 215-226. **3.** *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.*. Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep – damage conditions. Arch. Appl. Mech., 67, (1997). – P. 339-352. **4.** *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с. **5.** *Мяченков В.И., Фролов А.Н., Кармишин А.В. и др.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с. **6.** *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744с.

*Надійшла до редколегії 30.03.04*

УДК 621.891.031

***О.Г. ПРИЙМАКОВ***, канд.техн.наук, ХІ ВПС;
***Г.О. ПРИЙМАКОВ***, НТУ «ХПІ»;
***Ю.О. ГРАДИСЬКИЙ, О.В. БОБРОВИЦЬКИЙ***, ХІ ВПС

## ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗНОШУВАННЯ ТА ВИТРИВАЛОСТІ АВІАЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Експериментально визначено інтенсивність зношування (I) та коефіцієнт тертя (μ) найбільш типових авіаційних конструкційних високолегованих жаростійких сталей 40ХНМА, Х17Н2, 30ХГСНА (ДСТУ 4543 – 94). Показано, що інтенсивність зношування може бути інтегральним показником витривалості авіаційних конструкційних сталей, що дозволяє визначати параметри зносостійкості та витривалості одночасно.

Intensity of wear (I) and coefficient of friction (μ) of most typical aviation construction high-alloyed and heat-resistant steels 40ХНМА, Х17Н2, 30ХГСНА (DSTU 4543 – 94) are experimentally defined. It is shown, that intensity of wear can be integral index of endurance of aviation construction steels, that allows to determine simultaneously parameters of wearproof and endurance.