

РФ – ЦНИИ «Электроприбор», 2005. – 404 с. 3. Мухачев Г.А., Щукин В.К. Термодинамика и теплопередача. – М.: Высш.шк.,1991. – 480 с. 4. Мяченков В.И., Мальцев В.П. и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с. 5. Smythsonian Physical Tables. Ninth Revised Edition. – New York, Norwich: Knovel, 2003. – 792 p.

*Поступила в редколлегию 25.04.2005*

УДК 539.3

**Э.А.СИМСОН**, докт.техн.наук; **С.А.НАЗАРЕНКО**, канд.техн.наук;  
**А.Ю.ЗЮЗИН**, НТУ «ХПИ»

### **АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ КВАРЦЕВЫХ РЕЗОНАТОРОВ**

У статті пропонуються методи аналізу чутливості та оптимізації скінченоелементних моделей кварцевих резонаторів з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності; орієнтовані на високі розмірності векторів перемінних стану і проектування. Розглянуто області застосування розробленого математичного апарата.

Complicated finite-element models of quartz resonators with high geometric and physical self-descriptiveness sensitivity analysis and optimization methods are given in this article. The methods have guiding to orientate on high dimensions of state and design variables. The developed mathematical apparatus application domains are examined.

Кварцевые резонаторы (фильтры, стабилизаторы частоты) являются базовым элементом многих устройств радиоэлектронной, микропроцессорной и измерительной техники. Основными требованиями на стадии проектирования к ним являются: обеспечение заданной резонансной частоты, максимально возможная отстройка от паразитных резонансов, минимальный уровень потерь в пьезоэлементе и системе крепления (максимизация добротности), слабая температурно-частотная зависимость, удовлетворение габаритным, компоновочным, конструктивным ограничениям и т.д. [1,2]. Часть этих требований может быть сформулирована в виде функциональных и геометрических ограничений, другие носят экстремальный характер.

Проектирование кварцевого резонатора связано с выбором геометрической формы пьезоэлемента и электродов. При этом первой задачей, возникающей при проектировании, является определение резонансных частот и форм колебаний. Для расчета спектра разработано несколько теорий, дающих решение для пьезоэлементов простой формы [3]. Изменение геометрической формы в широких пределах, необходимость вычисления функциональных производных делает трудоемким применение аналитических методов и накладывает жесткие требования к эффективности реализации конечноэлементного алгоритма. Большинство колебательных систем в зоне рабочих частот

имеют весьма плотный или кратный спектр, что в рабочем режиме приводит к переходу на нежелательные формы колебаний, как правило, неприемлемые с точки зрения эффективности, динамических и прочностных характеристик.

Число нежелательных резонансов и их близость к рабочей частоте в значительной мере определяют качество резонатора по частотной характеристике. Рассмотрим задачу увеличения полосы частот, свободной от «паразитных» резонансов, за счет оптимизации геометрической формы пьезоэлемента.

Задача оптимизации заключается в отыскании вектора  $\vec{h}$ , который принадлежит допустимой области  $U: h_i^- \leq h_i \leq h_i^+ \quad i = 1, N$  и обеспечивает максимум функционалу качества  $J = |\lambda^n - \lambda^P|$ , где  $\lambda^P$  – рабочая частота резонатора,  $\lambda^n$  – ближайшая к ней «паразитная».

Целью проведенных исследований была разработка методики анализа чувствительности и оптимизации сложных конечноэлементных моделей кварцевых резонаторов; ориентированной на большие размерности векторов переменных состояния и проектирования, минимальное число обращений к процедуре прямого расчета. Разработанная методика анализа чувствительности предполагает следующую последовательность вычислительных этапов: КЭ дискретизация задачи анализа; введение вектора сопряженных переменных; введение пространства проектных переменных; вычисление градиентов функционалов. Вычисление градиентов от критерия оптимизации (или критериев в Парето-постановке) и функциональных ограничений включает, во-первых, технику дифференцирования уравнений состояния[4], во-вторых, способ введения проектных переменных и связанные с ним соотношения для производных от конечноэлементных матриц системы.

Наибольшая эффективность описания поведения механических элементов резонансной вибрационной техники, работающих в области высоких частот с плотным или кратным спектром, достигается использованием объемных конечных элементов, позволяющих достаточно точно описывать геометрические особенности конструкции, поля динамических деформаций и напряжений. Рассмотрим дифференцирование матриц жесткости и масс объемного изопараметрического конечного элемента. В соответствии с правилами дифференцирования сложных функций можно записать следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d[K^e]}{dx_{il}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{dB^T}{dx_{il}} DB \det[J] + B^T D \frac{dB}{dx_{il}} \det[J] + B^T DB \frac{d \det[J]}{dx_{il}} \right) d\xi d\eta d\zeta \\ \frac{d[M^e]}{dx_{il}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \rho N \frac{d \det[J]}{dx_{il}} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (1)$$

где [D] содержит упругие модули, пьезоэлектрические и диэлектрические коэффициенты

$$[D] = \begin{bmatrix} C^E & -P \\ -P^T & E^s \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $C^E$  – матрица модулей упругости, измеренных при постоянной напряженности электрического поля;  $P$  – матрица пьезоэлектрических коэффициентов;  $E^S$  – матрица коэффициентов диэлектрической проницаемости, измеренных при постоянной механической деформации. Отметим что, матрицы жесткости, пьезоэлектрической и диэлектрической жесткости вычисляются одновременно как «обобщенная» матрица жесткости, при этом в каждом узле элемента считаются неизвестными три перемещения и потенциал электрического поля.

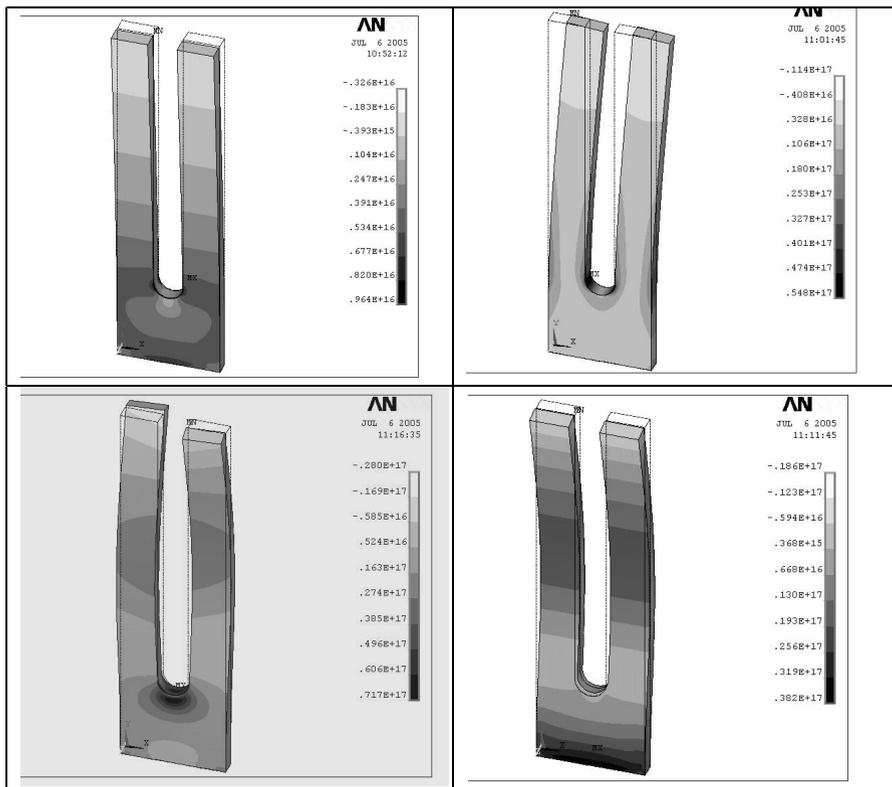
Заметим что вычисление  $\frac{dB}{dx_{il}}$  требует вычисления  $\frac{dJ^{-1}}{dx_{il}}$ , которое может быть осуществлено в соответствии с представлением  $\frac{dJ^{-1}}{dx_{il}} = J^{-1} \frac{dJ}{dx_{il}} J^{-1}$ , где  $\frac{dJ}{dx_{il}}$  – матрица с нулевыми элементами, за исключением  $i$ -ого столбца, который имеет вид  $\left[ \frac{dN_l}{d\xi}, \frac{dN_l}{d\eta}, \frac{dN_l}{d\zeta} \right]^T$ .

Производная от определителя матрицы Якоби может быть получена как  $\frac{d \det[J]}{dx_{il}} = \det[\bar{J}]$ , где  $[\bar{J}]$  – матрица, совпадающая с матрицей Якоби, за исключением  $i$ -ого столбца.

С целью демонстрации эффективности предлагаемого подхода приведем примеры решенных задач управления спектром колебаний. Распределение полей коэффициентов чувствительностей собственных частот высокочастотного кварцевого резонатора к нормальным перемещениям точек поверхности взаимодействующих конструктивных элементов приведено на рисунке. Показаны соответствующие формы колебаний.

Наименьшей зависимостью частоты от температуры обладают резонаторы АТ-среза, совершающие сдвиговые колебания по толщине. Использование в задачах оптимальной отстройки специализированного конечного элемента с линейной аппроксимацией для перемещений в плоскости элемента, квадратичной для изгибных и тригонометрической – для аппроксимации перемещений по толщине позволил выделить из общего плотного спектра только интересующие изгибно-сдвиговые частоты и формы, которые возбуждались переменным электрическим полем. Ближайшими к рабочей являлись частоты ангармоник (1,1,2) и (1,2,1) а наиболее интенсивными – (1,1,3) и (1,3,1). Функционалы отстройки записывались в дифференцируемой форме, используя предельное свойство степенной нормы  $\max \{ J_j = (\lambda_{11j}^{-n} + \lambda_{1j1}^{-n})^{-1/n} - \lambda_{111} \}$ . Характер проектных переменных (толщины специализированных элементов  $h_j$ ), учитывающий  $K_e^i = h_i^e K_1^e + h_i^{-1} K_2^e$  и аддитивность гамильтониана, позволил приме-

нить вычислительную технологию выпуклых аппроксимаций и дискретного принципа максимума. «Чистая» от ангармоник окрестность рабочей частоты расширена в 3 раза. Точность модели подтверждена экспериментально.



Анализ чувствительности 1, 3, 5, 6-ой собственных частот

В статье приводятся результаты анализа чувствительности и оптимизации высокочастотных кварцевых резонаторов. Дальнейшие перспективы исследований состоят в создании системы оптимального проектирования, позволяющей учесть механические, электромагнитные, температурные и другие характеристики.

**Список литературы:** 1. *Аронов Б.С.* Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 272 с. 2. *Зеленка И.* Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах. – М.: Мир, 1990.– 584 с. 3. *Lerch R.* Finite element analysis of piezoelectric transducers // IEEE Ultrasonic Symp. – 1988. – P. 643-654. 4. *Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин А.Ю., В.Б. Любецкая В.Б.* Анализ чувствительности к конечноэлементных моделей конструкций // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 77-82.

*Поступила в редколлегию 25.06.2005.*