тод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с. **3.** *А.Г.Андрєєв, Ю.М.Добровенський, С.В.Романов, О.В.Щепкін* Раціональне технологічне нагрівання при зборці колісних пар залізничного рухомого складу // Вісник НТУ «ХПІ». – Вип. 31. – 2004. – С. 179-186. **4.** *Андреев А.Г., Щепкин А.В.* Оптимизация технологических нагревов бандажного колеса при сборке колесной пары тепловоза // Інформація по 2-й міжнародній науково-технічній конференції «Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве» Вісник інженерної академії України, Київ, 2000. – С. 415-418. **5.** *А.Г.Андреев, Г.Н.Багацкая, В.О.Галета, А.В.Щепкин* Исследование напряженно-деформированного состояния колеса тепловоза ТУ-7 при торможении // Отчет по х/т 21674, д.с. 986, N гос. регистрации 80052977, ВИНИТИ N 0282.0062729, Харьков, 1982. – 149 с.

Поступила в редколлегию 18.04.2005

УДК (531.36+539.3):534.1

И.В.АНДРИАНОВ, докт.физ.-мат.наук,
А.О.ИВАНКОВ, канд.техн.наук, Приднепроская Академия строительства и архитектуры, Днепропетровск;
М.В.МАТЯШ, канд.техн.наук, Днепропетровский национальный университет

АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ И КОНТИНУАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ МАСС

Розглядаються різні континуальні моделі (КМ) для одномірного середовища. Як приклад вибрано диференційно-різницеве рівняння, що описує систему зв'язаних осциляторів. Звичайна континуальна апроксимація (КА) дає гарні результати для нижньої частини спектра, але для змушених коливань погрішність може бути дуже великою. Ми розглядаємо три можливих узагальнення КА: проміжні КМ отримані при заміні різницевого оператора (РО) диференціальним порядку 2k, k > 1; квазі-КМ, що дають більш точне наближення РО за допомогою апроксимації Паде; двохточечні апроксимації Паде, які дають найбільш точні результати. Обговорено можливі додатки й узагальнення.

Various continuous models (CM) for 1D discrete media are under consideration. As example the difference-differential equation, describing a system of connected oscillators, is chosen. String-type approximation shows excellent results for low part of frequency spectra, but for forced oscillations the corresponding mistake can be very big. So, the more appropriate CM should be found. We analyze three following models: the intermediate CM are obtained by replacing the difference operator (DO) for the derivative operator of the order 2k, k > 1; the quasi-CM are more accurate approximations of the DO via Padé approximates (PA); the two-point PA give the most precise results. Possibilities of the approach generalization and application are discussed.

Введение. Учет микроструктурных эффектов важен при моделировании кристаллических, полимерных и композитных материалов [1-3], в механике трещин [4,5], при описании эффектов гистерезиса [6], упрочнения и ослабления [9], в механике разрушения [5,9], молекулярной динамике [7], теории пластичности [8], теории фазовых переходов [12]. Дисперсия волн в гранулированных материалах, особенно в грунтах, керамических материалах [5,9,13], также представляет пример влияния микроструктуры. Микроструктуру нужно учитывать при определении локальной деформации материалов [9]. Нельзя не упомянуть моделирование наноэффектов, таких как наноосцилляции и распространение трещин [10]. Наконец, построение теории упругости на основе атомарной теории – одна из важнейших задач физики твердого тела [11].

Указанные эффекты можно исследовать в рамках дискретных моделей, однако при этом даже современные компьютеры не всегда позволяют быстро и дешево получить искомый результат. Поэтому континуальное описание микро- и наноэффектов представляет большой интерес. Это тем более верно, что возможно построение смешанных дискретно-континуальных моделей, когда большая часть системы заменяется континуальной моделью, а некоторая локальная часть рассматривается дискретно [10].

При построении континуальных моделей можно выделить три основных подхода.

Феноменологический подход, когда некоторые дополнительные члены вводятся в функционал энергии или определяющие соотношения, причем структура и характер этих членов постулируются заранее [3], исходя из некоторых априорных соображений. Феноменологический подход удобен в некоторых приложениях, когда нужно быстро решить практически важную задачу. Однако прогресс механики требует построения соответствующих моделей, исходя из «первых принципов».

Статистический подход состоит в том, что отправляясь от исходной дискретной системы, в результате статистического осреднения получают некоторые континуальные модели [9]. К сожалению, большие математические трудности препятствуют пока последовательному применению этого метода.

Метод осреднения (гомогенизации) обычно основывается на так называемых Г- или G-осреднениях [7,11,12]. В этом направлении до настоящего времени получены, в основном, чисто математические результаты.

Применение всех описанных методов в динамике ограничено областью низких частот. Преодоление этой трудности возможно при помощи методов, основанных на аппроксимациях Паде.

Парадокс Курчанова-Мышкиса-Филимонова. Ограничимся одномерным случаем, а именно, рассмотрим цепочку из n материальных точек с одинаковыми массами m, расположенных в состоянии покоя в точках оси x с координатами jh ($j = 0,1,\ldots, n$-1) и соединенных упругими связями жесткости c (рис. 1,а). Исходные уравнения, описывающие движение цепочки, имеют такой вид:

$$m\ddot{y}_j(t) = \sigma_{j+1}(t) - \sigma_j(t)\,, \tag{1}$$

где $y_j(t)$ – продольное перемещение j-й точки; $\sigma_j(t)$ – сила взаимодействия (j-1)-й и j-й точек; $\sigma_j(t) = c(y_j(t) - y_{j-1}(t))$.

Пусть в момент времени $t = 0$ сила $f(t)$ приложена к нулевой точке:

$$\sigma_0(t) = -f(t)\,, \quad \sigma_n(t) = 0\,,\ j = 0,1,\ldots, n\text{-}1. \tag{2}$$

Систему (1) нетрудно привести к виду

$$m\sigma_{j_{tt}}(t) = c(\sigma_{j+1} - 2\sigma_j + \sigma_{j-1})\,,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\text{-}1, \tag{3}$$

которой мы и будем пользоваться в дальнейшем. Для определенности зададим нулевые начальные условия

$$\sigma_j(t) = \sigma_{jt}(t) = 0 \quad \text{при } t = 0. \tag{4}$$

Для больших значений n обычно используется непрерывная аппроксимация дискретной задачи (2)-(4):

$$m\sigma_{tt}(x,t) = ch^2\sigma_{xx}(x,t)\,, \tag{5}$$

$$\sigma(0,t) = -f(t)\,, \quad \sigma(l,t) = 0\,, \tag{6}$$

$$\sigma(x,0) = \sigma_t(x,0) = 0\,, \tag{7}$$

где $l = (n + 1)h$.

Имея решение краевой задачи (5)-(7), можно пересчитать решение для дискретной среды по формулам

$$\sigma_j(t) = \sigma(jh,t)\,, \quad j = 0,1,\ldots,n.$$

Полагая, без ограничения общности, $f(t) = -1$, нетрудно выписать точное решение указанной краевой задачи, используя метод Даламбера и операционное исчисление:

$$\sigma(x,t) = H\left(nh\arcsin\left|\sin\left(\frac{\pi}{2n}\sqrt{\frac{c}{m}}t\right)\right| - x\right), \tag{8}$$

где $H(\ldots)$ – функция Хевисайда.

Отсюда непосредственно следует, что $|\sigma(x,t)| \le 1$ для всех значений времени.

Подобная оценка, полученная, например, Н.Е. Жуковским, длительное время считалась сама собой разумеющейся. Однако в дальнейшем численные и аналитические исследования [14-16] показали, что нужно четко различать аппроксимацию глобальных и локальных характеристик дискретной системы. При исследовании нижней части спектра собственных частот дискретной системы переход к осредненной системе вполне оправдан, для вынужденных колебаний это может быть не так.

В исследованиях [14-16] численно показано, что для определенных значений масс в дискретной цепочке величина σ может существенно превысить значение 1. В частности, для некоторых значений n подобные превышения («всплески» или «пики») P_n таковы [16]:

П	8	16	32	64	128	256	$n \to \infty$
P_n	1,7561	2,0645	2,3468	2,6271	2,9078	3,1887	$P_n \to \infty$

С физической точки зрения в описанном явлении нет ничего удивительного. При вынужденных колебаниях в описании процесса участвуют как низкие, так и высокие гармоники, причем последние определяются осредненными соотношениями с большой погрешностью или даже принципиально не могут быть описаны уравнениями вида (5).

2. Собственные частоты. Полагая $f(t) = 0$, исследуем соотношение между собственными частотами колебаний дискретной (2)-(4) и непрерывной (5)-(7) систем.

Дискретная система имеет $n + 1$ собственных частот, описываемых следующей формулой (формула Лагранжа)

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}, \qquad k = 1,2,\ldots,n+1. \tag{9}$$

Непрерывная система имеет дискретный бесконечный спектр

$$\alpha_k = \pi\sqrt{\frac{c}{m}}\frac{k}{n+1}, \qquad k = 1,2,\ldots. \tag{10}$$

Выражения (10) аппроксимируют частоты колебаний дискретной системы (9), для первых частот – хорошо, для больших значений k – плохо, а, скажем, ω_{n+1} определяется с погрешностью более 50% (числовой коэффициент π вместо 2). Точность аппроксимации (10) может быть повышена, об этом мы поговорим далее, а пока отметим следующее: частоты непрерывной системы ω_{n+2}, ω_{n+3} и т.д. никакого отношения к дискретной системе не имеют. Это – «паразитные частоты», и, если речь идет об исследовании дискретной системы (2)-(4), учитываться они не должны.

3. Вынужденные колебания. Перейдем к краевой задаче (5)-(7), полагая $f(t) = -1$. Решение будем разыскивать в виде

$$\sigma = 1 - \frac{x}{l} + u(x,t),$$

тогда функция $u(x,t)$ определяется соотношениями

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ch^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{11}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{12}$$

$$u(x,0) = -1 + \frac{x}{l}; \qquad u_t(x,0) = 0. \tag{13}$$

Решение краевой задачи (11)-(13) без труда находится методом Фурье:

$$u = \frac{-2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{k}\cos(\alpha_k t). \tag{14}$$

Окончательно,

$$\sigma = \frac{-x}{l} + 1 - \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{k}\cos(\alpha_k t)\,. \qquad (15)$$

Решение (15) описывает колебания струны или продольные колебания стержня. Если же мы хотим аппроксимировать движение цепочки частиц, то в бесконечной сумме нужно удерживать лишь (n + 1) гармонику – остальные не имеют к движению цепочки масс никакого отношения. Это, по сути, не что иное как приближение Дебая [1,9]. Иными словами, движение дискретной системы (2)-(4) может быть приближенно описано при помощи выражения

$$\sigma = \frac{-x}{l} + 1 - \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{k}\cos(\alpha_k t)\,. \qquad (16)$$

Численные расчеты с использованием выражения (16) показывают, что действительно имеют место обнаруженные в [14-16] «всплески», и σ может превосходить значение 1.

4. Промежуточные континуальные модели. Решение (16) качественно правильно описывает движение цепочки масс, однако количественно точность невысока, так как формы колебаний, близкие к (n + 1)-й, описываются аппроксимацией (5) плохо.

Перепишем систему (1) в виде псевдодифференциального уравнения

$$m\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + 4c\sin^2\left(-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma = 0\,. \qquad (17)$$

Разложение разностного оператора $\sin^2\left(-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в ряд Маклорена таково:

$$\sin^2\left(-\frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\left(\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h^4}{48}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{h^6}{1440}\frac{\partial^6}{\partial x^6} + \ldots\right). \qquad (18)$$

Удерживая в разложении (18) только первый член, получаем обычную континуальную аппроксимацию (5). Удерживая три члена, получаем аппроксимацию более высокого порядка

$$m\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = ch^2\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4\sigma}{\partial x^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6\sigma}{\partial x^6}\right). \qquad (19)$$

Для уравнения (19) должны быть поставлены следующие краевые условия:

$$\sigma = \sigma_{xx} = \sigma_{xxxx} = 0 \qquad \text{при } x = 0, l\,. \qquad (20)$$

Сравнение (n + 1)-й частоты континуальной системы (19), (20) с соответствующей частотой дискретной системы показывает существенное увеличение точности (численный коэффициент 2,11 вместо 2 в точном решении, погрешность 5,5 %). Поэтому целесообразно использовать для описания движения цепочки масс решение (16), где, в соответствии с аппроксимацией (19),

$$\alpha_k = \pi\sqrt{\frac{c}{M}}\,\frac{k}{n+1}\sqrt{1-\frac{\pi^2 k^2}{12(n+1)^2}+\frac{\pi^4 k^4}{360(n+1)^4}}\,. \tag{21}$$

Отметим, что оценка погрешности континуальной аппроксимации по погрешности определения максимальной для дискретной цепочки частоты весьма условна, однако наиболее проста. В общем случае подобная модель, названная в [16] промежуточной континуальной моделью, имеет вид

$$m\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = 2c\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}h^{2k}}{(2k)!}\frac{\partial^{2k}\sigma}{\partial x^{2k}} \tag{22}$$

$$\frac{\partial^{2k}\sigma}{\partial x^{2k}} = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0,l; \qquad k = 0,1,\ldots,N-1. \tag{23}$$

Для получения краевых условий (23) можно использовать вариационный принцип [16], либо следующие соображения. Уравнение (22) должно удовлетворяться для каждой степени $(h^2)^k$, начиная с нулевой (последнее – в силу исходных условий на концах цепочки (2)). Полагая $k = 0,1,\ldots,N-1$, приходим к граничным условиям (23).

Нетрудно убедиться, что корректность постановки краевой задачи требует, чтобы было выбрано $N = 2p + 1$ [16].

Применение промежуточных континуальных аппроксимаций позволяет уловить эффект всплесков [41].

5. Применение аппроксимаций Паде. Построение промежуточных континуальных моделей основано на разложении разностного оператора в ряд Тейлора. Между тем, более эффективной является аппроксимация по схеме Паде. По-видимому, впервые аппроксимации Паде были применены в теории цепочек (на интуитивном уровне, без употребления этого термина и теории аппроксимаций Паде) в [17]. В [18] предложено построение континуальных моделей (названных там квазиконтинуальной аппроксимацией) на основе одноточечных аппроксимаций Паде [19]. В частности по трем и пяти членам разложения (18) получаем выражения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Bigg/\left(1-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \quad \text{и} \quad \left(1+\frac{h^2}{20}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Bigg/\left(1-\frac{h^2}{30}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right).$$

Соответствующие модели квазиконтинуума таковы

$$m\left(1-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{tt} - ch^2\sigma_{xx} = 0\,; \tag{24}$$

$$m\left(1-\frac{h^2}{30}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{tt} - ch^2\left(1+\frac{h^2}{20}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{xx} = 0\,\cdot \tag{25}$$

Граничные условия для уравнения (24) имеют вид (6), для уравнения (25) следует задать

$$\sigma = \sigma_{xx} = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0,l\,.$$

Погрешность в определении (n + 1)-й частоты, по сравнению с дискретной цепочкой, составляет ~16,5 % для уравнения (24) и ~3 % для уравнения (25). Преимуществом уравнения (25) по сравнению с (19) является меньший порядок. Численное исследование подтверждает, что уравнения (24) и (25) улавливают эффект всплесков.

6. Применение двухточечных аппроксимаций Паде. Двухточечные аппроксимации Паде во многих случаях эффективнее одноточечных [19], поэтому естественно применить этот подход к построению континуальных аппроксимаций разностного оператора (18). Вторым предельным случаем при этом будут пилообразные колебания цепочки [20].

Построим двухточечную аппроксимацию разностного оператора, используя в качестве одного из предельных случаев первый член разложения (18) [21,22]. Кроме того, потребуем, чтобы $\alpha_{n+1} = 2\sqrt{c/m}$. Искомый оператор таков:

$$ch^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Bigg/ \left(1 - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),$$

где $\alpha^2 = 0{,}25 - \pi^{-2}$.

Тогда континуальное приближение описывается уравнением

$$m\left(1 - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{tt} - ch^2 \sigma_{xx} = 0 \qquad (26)$$

с граничными условиями (6).

Наибольшая погрешность в определении собственных частот при этом достигается при k = [0,5(n + 1)] и составляет менее 3 %. Существенно, что уравнение (26) имеет второй порядок по пространственной координате, то есть существенное повышение точности аппроксимации достигается не в результате повышения порядка дифференциального оператора, как это было в случае промежуточных континуальных моделей или для квазиконтинуальной аппроксимации. Уравнение (29) позволяет улавливать появление всплесков.

7. Особенности задачи для вынужденных колебаний. Система (2) – (4) допускает при $f(t) = -1$ точное решение [14]

$$\sigma_j(t) = \frac{l}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi kj}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)} \left(1 - \cos \omega_k t\right), \qquad j = 1,2,\ldots,n \,. \quad (27)$$

Суммирование первой части отрезка ряда (27) позволяет перейти к такому выражению

$$\sigma_j = 1 - \frac{jl}{n+1} - \frac{l}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi kj}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)} \cos \omega_k t\,, \qquad j = 0,1,\ldots,n+1\,. \quad (28)$$

Сравним выражение (28) и (15). Если разложить $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi k}{2(n+1)}$ при малых k

($k << n + 1$), $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi k}{2(n+1)} = \dfrac{2(n+1)}{\pi k} - \dfrac{\pi k}{6(n+1)} - \ldots$, и ограничиться первым членом разложения, то из формулы (28) имеем

$$\sigma_j \approx 1 - \frac{jl}{n+1} - \frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi kj}{n+1}\,\frac{\cos\omega_k t}{k}\,, \qquad j = 0,1,\ldots,n+1\,. \tag{29}$$

Сравнение выражений (29) и (15) в точках $x = kl$ ($k = 0,1,\ldots,n + 1$) показывает, что мы имеем два источника погрешности континуальной аппроксимации. Первая связана с погрешностью определения частот колебаний, и пути преодоления ее описаны выше. Вторая обусловлена погрешностью определения коэффициентов разложения. А именно, тем обстоятельством, что, разыскивая решение в виде бесконечного ряда Фурье (14), мы в дальнейшем ограничиваемся лишь начальным отрезком этого ряда (см. (16)). Эта погрешность может быть преодолена при помощи следующей процедуры.

Ищем решение краевой задачи (11) – (13) в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k \sin\frac{k\pi x}{l}\,\cos(\alpha_k t)\,,$$

а для определения коэффициентов A_k используем метод коллокаций, точно удовлетворяя первому из начальных условий (13) в точках $x = kl$ ($k = 0,1,\ldots,n + 1$).

Возможные обобщения. Существуют широкие возможности обобщения полученных результатов. В первую очередь это двух- и трехмерные линейные решетки. Достаточно естественно выглядит обобщение на задачи, в которых параметры цепочки различаются на малую величину. При периодически меняющихся массах возникает явление фильтра частот, нашедшее широкое применение в современной технике.

Интересно обстоит дело с обобщениями на нелинейный случай. Как известно, в результате различных асимптотических упрощений можно получать различные приближенные нелинейные интегрируемые уравнения (КдВ, нелинейное уравнение Шредингера и т.д.) [23,24]. Далее эти уравнения интегрируются, что приводит к изящным солитонным решениям. Однако насколько обоснованы сами эти решения, в которых суммируются как низкие, так и высокие гармоники, заведомо чуждые для исходных уравнений, в настоящее время неясно.

Список литературы: **1.** *Борн М., Хуан Кунь* Динамическая теория кристаллических решеток. – М. ИЛ, 1958. **2.** *Aifantis E.C.* Gradient deformation models at nano, micro, and macro scales // ASME J. Engn. Mater. & Techn. 1999. – V. 121. – P. 189-202. **3.** *Askes H., Metrikine A.V.* One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation // Eur. J. Mech. A /Solids. 2002. – V. 21. – P. 555-572. **4.** *Askes H., Sluys L.J.* Explicit and implicit gradient series in damage mechanics // Eur. J. Mech. A /Solids. 2002. – V. 21. – P. 379-390. **5.** *Chang C.S., Askes H., Sluys L.J.* Higher-order strain/higher-order stress gradient models derived from a discrete microstructure, with application to fracture // Eng. Fracture Mech. 2002. – V. 69. – P. 1907-1924. **6.** *Rogers R.C., Truskinovsky L.* Discretization and hysteresis // Physica B. 1997. – V. 233. – P. 370-375. **7.** *Blanc X., Bris C. Le, Lions P.-L.* From molecular models to continuum mechanics // Archive for Rational Mech. Anal. 2002. – V. 164. – P. 341-381. **8.** *Fleck N.A.,* *Hutchinson J.W.* A phenomenological theory for gradient effects in plasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1993. – V. 41. – P. 1825-1857. **9.** *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой: нелокальная теория упругости. – М., Наука, 1975. – 415с. **10.** *Dowell E.H., Tang D.* Multiscale, multiphenomena modelling and simulation at the nanoscale: on constructing reduced-order models for nonlinear dynamical systems with many degrees-of-freedom // J. Appl. Mech. 2003. – V. 70. – P. 328-338. **11.** *Paroni R.* From discrete to continuum: a Young measure approach // ZAMP. 2003. – V. 54. № 2. – P. 328-348. **12.** *Pagano S., Paroni R.* A simple model for phase transition: from the discrete to the continuum problem // Quart. Appl. Math. 2003. – V. 61. – P. 89-109. **13.** *Лизина С.А., Потапов А.И., Нестеренко В.Ф.* Нелинейная гранулированная среда с вращающимися частицами: одномерная модель // Акустический журнал. 2001. – Т. 47. № 5. – С. 685-693. **14.** *Курчанов П.Ф., Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* Колебания железнодорожного состава и теорема Кронекера // ПММ. 1991. – Т. 55. № 6. – С. 989-995. **15.** *Filimonov A.* Some unexpected results on the classical problem of the string with N beads. The case of multiple frequencies // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. Serie 1. 1992. – V.315. – P.957-961. **16.** *Filimonov A.M.* Continuous approximations of difference operators // J.Difference Equations and Applications. 1996. – V.2. № 4. – P.411-422. **17.** *Rosenau Ph.* Dynamics of nonlinear mass-spring chains near the continuum limit // Physics Letters A. 1986. – V. 118. № 5. – P. 222-227. **18.** *Duncan D.B., Eilbeck J.C., Feddersen H., Wattis J.A.D.* Solitons on lattices // Physica D. 1993. – V. 68. – P. 1-11. **19.** *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М., Мир, 1986. – 502 с. **20.** *Косевич А.М., Ковалев А.С.* Введение в нелинейную физическую механику. – Киев, Наукова думка, 1989. – 304 с. **21.** *Андрианов И.В.*Континуальная аппроксимация для высокочастотных колебаний цепочки // ДАН УССР. Сер. А. 1991. – С. 13-15. **22.** *Андрианов И.В.* Об особенностях предельного перехода от дискретной упругой среды к непрерывной // ПММ. 2002. – Т. 66. № 2. – С. 271-275. **23.** *Калякин Л.А.* Длинноволновые асимптотики. Интегрируемые уравнения как асимптотический предел нелинейных систем // УМН. 1989. – Т. 44. № 1. – С. 5-33. **24.** *Manevitch L.I., Pervouchine V.P.* Transversal dynamics of one-dimensional chain on nonlinear asymmetric substrate // Meccanica. 2003. – V. 38. – P. 669-676.

Поступила в редколлегию 25.03.2005.

УДК 534.1:621.5

А.Е.БОЖКО, член-кор. НАНУ; ***В.И.БЕЛЫХ***, канд.техн.наук;
***О.А.ЗАЛИЗНЯК*,** ИПМаш НАН Украины, Харьков

ИСКЛЮЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ТУРБОАГРЕГАТОВ НА ПРОЦЕСС ДИАГНОСТИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

Показано необхідність комплексного аналізу коливань опорного та упорного підшипників і контролю моментів зміни швидкості обертання ротора турбомашин при вібраційній діагностиці. Приведено систему контролю зміни швидкості обертання ротора для застосування її при часовій селекції вібраційного сигналу.

The necessity of the complex analysis of fluctuations of basic and persistent bearings and control of the moments of change of speed the circulation of a rotor turbo-machines is shown at vibrating diagnostics. The monitoring system of change of speed the circulation of a rotor for application it is indicated at temporary selection of a vibrating signal.

Задача идентификации сигналов вибропреобразователей при контроле продольных колебаний турбомашин является весьма актуальной. Действительно, при работе турбины часть энергии пара расходуется на создание осевого усилия, кото-