

УДК 539.3; 681.586.773

***И.В.ЯНЧЕВСКИЙ***, канд.техн.наук, ХНАДУ, Харьков

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ,  
ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА АСИММЕТРИЧНЫЙ БИМОРФ**

В статті представлено рішення оберненої задачі динамічної теорії електропружності з ідентифікації залежності від часу рівномірно розподіленого механічного навантаження, що діє на зовнішню поверхню металевого шару асиметричної біморфної балки, яка працює у режимі прямого п'єзоелектричного ефекту. Вихідними даними є різниця потенціалів, яка виникає на суцільних електродах п'єзокерамічного шару біморфу у результаті його деформування.

Solution of inverse problem of dynamical theory of electroelasticity is presented in the article. The purpose of the investigation is time dependence identification of uniformly distributed mechanical load, acting on external surface of metal layer of asymmetric bimorph beam which is working in direct piezoelectric effect mode. Voltage generated on solid electrodes of beam' piezoelectric layer as a result of its deformation is taken for the initial data.

Асимметричные биморфные преобразователи прямоугольного поперечного сечения, состоящие из металлического и поляризованного по толщине пьезокерамического слоев, в настоящее время находят широкое распространение в различных технических устройствах [1]. Например, в качестве датчиков давления, когда на основе присущего им прямого пьезоэффекта внешнее механическое воздействие преобразуется в пропорциональную разность потенциалов на электродированных поверхностях электроупругого слоя, возникающей в результате его деформирования. Поэтому исследования, посвященные решению обратных задач по восстановлению механического нагружения биморфа по регистрируемому электрическому сигналу, являются актуальными. Особый интерес представляют задачи нестационарной электроупругости, поскольку эти результаты позволяют значительно расширить функциональные возможности преобразователей.

Известные из литературы аналитические решения задач по указанному научному направлению весьма немногочисленны. В работах [2, 3] получены исходные уравнения движения для преобразователей упомянутого конструктивного исполнения и представлены решения некоторых задач по оценке их поведения при механическом и электрическом нагружениях. В монографии [4] приведены решения динамических задач для кусочно-однородных составных пьезокерамических пластин. В статье [5] рассмотрена нестационарная задача о колебаниях тонкоблочной биморфной прямоугольной пластины при равномерно распределенном на внешней поверхности механическом ее нагружении. Отметим, что в [4] также имеется обстоятельный обзор работ из области динамической теории электроупругости. Решения обратных задач по идентификации внешнего механического нагружения в литературе практически отсутствуют. К этой проблеме и относится настоящая работа. При этом в качестве исходных данных выступает разность потенциалов, генерируемая на сплошных электродах пьезоэлемента.

Исследуемая механическая система представляет собой биморфную балку длиной  $2l$  и шириной  $b$ , слои которой имеют постоянные толщины  $h_m$  и  $h_p$  (через индексы  $m$  и  $p$  обозначены геометрические и физические характеристики соответственно металлического и пьезокерамического элементов двухслойного пакета). Граничные условия соответствуют шарнирному закреплению торцов, но с подвижностью в продольном направлении, начальные условия – нулевые. Предполагается, что электроды невесомы и имеют пренебрежимо малую жесткость, толщина клеявого соединения также не влияет на поведение биморфа.

Введем декартову систему координат, ось  $Ox$  которой направлена вдоль балки, а  $Oz$  равноудалена от ее торцов и перпендикулярна плоскости контакта слоев. Не умаляя общности разработанного метода решения обратной задачи, ограничимся случаем симметричной относительно центральной точки постановки задачи. То есть предполагается, что действующая на биморф нормальная нагрузка описывается выражением

$$P(x,t) = p(t) \cdot H(x_0 - x); \quad (0 \leq x \leq l),$$

где  $H$  – единичная функция Хевисайда (рис. 1).

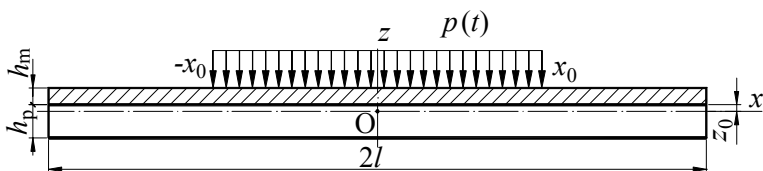


Рисунок 1 – Исследуемая механическая система

Уравнения движения биморфа и граничные условия имеют вид [3]:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} = 0; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial \chi^4} + \beta_0^4 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \gamma_0 P; \quad V = - \frac{e_{31}^* h_p}{e_{33}^* l} \left( u_0 - \frac{a}{l} \frac{\partial w}{\partial \chi} \right) \Bigg|_{\chi=l_0}, \quad (1)$$

$$w|_{\chi=l_0} = 0; \quad V = \frac{c_F}{e_{31}^* b l} \frac{\partial u_0}{\partial \chi} \Bigg|_{\chi=l_0}; \quad V = \frac{c_F}{\beta_0^4 e_{31}^* a b} \frac{\partial^2 w}{\partial \chi^2} \Bigg|_{\chi=l_0}, \quad (2)$$

где  $u_0$ ,  $w$  – продольные и нормальные перемещения точек поверхности приведения [2] биморфа ( $z = 0$ );  $\chi = x/l$ ,  $\tau = t/l\sqrt{\rho_F/c_F}$  – безразмерные координата и время;  $\beta_0^4 = c_F l^2 / (c_J + J_{p0}(e_{31}^{*2}/e_{33}^*))$ ;  $\gamma_0 = \beta_0^4 l^2 / c_F$ ;  $e_{31}^*$  и  $e_{33}^*$  – пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость керамики.

Значения прочих коэффициентов соответственно равны [3]:

$$\rho_F = \rho_p F_p + \rho_m F_m; \quad c_F = c_{11}^p F_p + c_{11}^m F_m; \quad c_J = c_{11}^p J_p + c_{11}^m J_m; \quad F_m = b h_m; \quad F_p = b h_p;$$

$$J_p = b \frac{z_0^3 - (z_0 - h_p)^3}{3}; \quad J_m = b \frac{(z_0 + h_m)^3 - z_0^3}{3}; \quad J_{p0} = b \frac{h_p^3}{12}; \quad z_0 = \frac{c_{11}^p h_p^2 - c_{11}^m h_m^2}{2(c_{11}^p h_p + c_{11}^m h_m)},$$

$\rho$ ,  $c_{11}$  – плотность и модуль упругости материалов слоев;  $b$  – ширина биморфа;  $z_0$  – расстояние от плоскости контакта слоев до плоскости приведения.

Укажем, что при выводе (1) и (2) были привлечены кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява и учтено условие непротекания тока в электроупругом слое при разомкнутых электродах.

Задача решается с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени. Тогда с учетом (1) и предварительного разложения функции  $P$  в тригонометрический ряд по четным функциям [3] искомые решения для продольного  $u_0$  и поперечного  $w$  смещений в пространстве изображений представим в виде:

$$u_0^L(\chi, s) = B^L \frac{1}{s} \left( e^{-s(l_0 - \lambda)} \right) \Bigg|_{-\chi}^{\chi}; \quad (3)$$

$$w^L(\chi, s) = A_i^L F_i^L(\chi, s) + \frac{\gamma_0}{\beta_0^4} P^L \left( \frac{\chi_0}{l_0} \frac{1}{s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(k\pi\chi_0/l_0) \cos(k\pi\chi/l_0)}{s^2 + k^4 \pi^4 / l_0^4 \beta_0^4} \right), \quad (i = 1, 2),$$

где

$$F_1^L(\chi, s) = f_1^L(\chi, s); \quad f_i^L(\chi, s) = \frac{1}{s} e^{-y_i(\chi, s)} \cos y_i(\chi, s); \quad y_i(\chi, s) = \beta_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{s} (l_0 + (-1)^i \chi);$$

$$F_2^L(\chi, s) = g_i^L(\chi, s); \quad g_i^L(\chi, s) = \frac{1}{s} e^{-\gamma_i(\chi, s)} \sin \gamma_i(\chi, s);$$

$\chi_0 = x_0/l$ ;  $A_i^L$ ,  $B^L$  и  $p^L$  – неизвестные функции параметра преобразования  $s$ .

В первом соотношении системы (3) и далее также введено обозначение  $f(\lambda)_{\chi_1}^{\chi_2} = f(\chi_2) - f(\chi_1)$ , а под выражением вида  $M = N_j$  подразумевается суммирование по переменному индексу.

После подстановки (3) в граничные условия (2) и соотношение (1) для разности потенциалов формируется система уравнений для отыскания функций  $A_i^L$ ,  $B^L$  и  $p^L$ . Обращение  $B^L$  из системы не вызывает затруднений:

$$H(\tau - \lambda) B(\tau - \lambda)^{0;2l_0} = \frac{e_{31}^* b l}{c_F} V(\tau), \quad (4)$$

где запись  $f(\lambda)_{\chi_1}^{\chi_2}$  обозначает  $f(\chi_2) + f(\chi_1)$ .

После исключения  $B^L$  производится строгая инверсия полученной системы, в результате чего задача сводится к решению следующей системы интегральных уравнений Вольтера I-го рода относительно  $A_i$  и  $p$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau A_1(\xi) [1 + K_1(\tau - \xi)] d\xi + \int_0^\tau A_2(\xi) K_2(\tau - \xi) d\xi + \\ & + \frac{\gamma_0}{\beta_0^4} \int_0^\tau p(\xi) \left[ \frac{\chi_0}{l_0} (\tau - \xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} (-1)^k \frac{\beta_0^2 l_0^2}{k^2 \pi^2} \sin\left(\frac{k\pi\chi_0}{l_0}\right) \sin\left(\frac{k^2 \pi^2}{\beta_0^2 l_0^2} (\tau - \xi)\right) \right] d\xi = 0; \\ & - \int_0^\tau A_1(\xi) K_2(\tau - \xi) d\xi + \int_0^\tau A_2(\xi) [1 + K_1(\tau - \xi)] d\xi + \\ & + \frac{\gamma_0}{\beta_0^4} \int_0^\tau p(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} (-1)^k \frac{\beta_0^2 l_0^2}{k^2 \pi^2} \sin\left(\frac{k\pi\chi_0}{l_0}\right) \left[ 1 - \cos\left(\frac{k^2 \pi^2}{\beta_0^2 l_0^2} (\tau - \xi)\right) \right] d\xi = \frac{\beta_0^2 e_{31}^* a b}{c_F} \int_0^\tau V(\xi) d\xi; \\ & \int_0^\tau A_1(\xi) [K_3(\tau - \xi) - K_4(\tau - \xi) - K_5(\tau - \xi)] d\xi - \int_0^\tau A_2(\xi) [K_3(\tau - \xi) - K_4(\tau - \xi) + K_5(\tau - \xi)] d\xi = \\ & = \frac{e_{33}^* l}{e_{31}^* h_p} V(\tau) - \left( H(\tau - \lambda) \int_0^{\tau - \lambda} B(\xi) d\xi \right)^{2l_0}, \end{aligned} \quad (5)$$

в которой ядра получены аналитически с использованием таблиц операционного исчисления [6] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= 1 - C \left( \frac{\beta_0^2 l_0^2}{\tau} \right) - S \left( \frac{\beta_0^2 l_0^2}{\tau} \right); \quad K_2(\tau) = C \left( \frac{\beta_0^2 l_0^2}{\tau} \right) - S \left( \frac{\beta_0^2 l_0^2}{\tau} \right); \\ K_3(\tau) &= \frac{a}{l} \beta_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}; \quad K_4(\tau) = \frac{a}{l} \beta_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \cos \left( \frac{\beta_0^2 l_0^2}{\tau} \right); \end{aligned}$$

$$K_5(\tau) = \frac{a}{l} \beta_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \sin\left(\frac{\beta_0^2 l_0^2}{\tau}\right),$$

где  $C(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_0}} \int_0^\tau \frac{\cos\xi}{\sqrt{\xi}} d\xi$  и  $S(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi_0}} \int_0^\tau \frac{\sin\xi}{\sqrt{\xi}} d\xi$  – интегралы Френеля.

Правые части системы (5) также являются табличными.

Решение уравнения (4) осуществляется численно с привлечением метода [7], который прост в реализации и обеспечивает устойчивый к вычислительным погрешностям и погрешностям в исходных данных результат.

В свою очередь решение системы интегральных уравнений (5) относится к классу некорректных задач математической физики [8], поэтому для нахождения  $A_i$  и  $p$  необходимо применять специальные, приближенные методы. В настоящей работе для решения (5) использован подход, заключающийся в предварительном ее представлении в виде конечно-разностного аналога с использованием квадратурных формул (при этом изменением шага по времени  $\Delta\tau$  как параметра дискретизации можно обеспечить требуемую точность преобразования). Такой подход позволяет заменить запись (5) системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицей блочной структуры [9]. Дальнейшее построение приближенного решения заключается в последовательной реализации обобщенного метода Крамера (для выделения из СЛАУ векторов  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  и  $\mathbf{p}$ ) и метода регуляризации А. Н. Тихонова [8].

Найденные значения  $A_i$  и  $B$  в узлах дискретизации после инверсии равенств (3) использовались при вычислении продольных  $u_0$  и поперечных  $w$  перемещений поверхности приведения биморфной балки:

$$u_0(\chi, \tau) = \left( H(\tau - (l_0 - \lambda)) \int_0^{\tau - (l_0 - \lambda)} B(\xi - (l_0 - \lambda)) d\xi \right)_{-\chi}^{\chi};$$

$$w(\chi, \tau) = \int_0^\tau A_1(\xi) K_1 \left( \frac{\beta_0^2 (l_0 - \lambda)^2}{4(\tau - \xi)} \right)^{\chi; -\chi} d\xi + \int_0^\tau A_2(\xi) K_2 \left( \frac{\beta_0^2 (l_0 - \lambda)^2}{4(\tau - \xi)} \right)^{\chi; -\chi} d\xi +$$

$$+ \frac{\gamma_0}{\beta_0^4} \int_0^\tau p(\xi) \left[ \frac{\chi_0}{l_0} (\tau - \xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi\chi}{l_0}\right) \sin\left(\frac{k\pi\chi_0}{l_0}\right) \frac{\beta_0^2 l_0^2}{k^2 \pi^2} \sin\left(\frac{k^2 \pi^2}{\beta_0^2 l_0^2} (\tau - \xi)\right) \right] d\xi.$$

Расчеты проводились при следующих исходных данных:  $b = 10$  мм;  $l = 25$  мм;  $h_p = 1$  мм;  $h_m = 0,5$  мм;  $x_0 = 0,5 \cdot l$ ; материал пьезокерамического слоя – PZT-5:  $\rho_p = 7600$  кг/м<sup>3</sup>;  $s_{11}^E = 15,4 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/Н;  $d_{31} = -178 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н;  $\epsilon_{33}^T = 1750 \cdot \epsilon_0$ ;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м; материал металлического слоя – титан ВТ-6:  $\rho_m = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_{11}^m = 11,3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. Время исследования  $\tau_{inv} = 3 \cdot T$ ;  $T = 140$ ;  $\Delta\tau = 0,05$ ;  $x_0 = 0,5 \cdot l$ .

Отметим, что входящий в метод А. Н. Тихонова параметр регуляризации вычислялся на основании принципа невязки [8, 9], в котором коэффициент относительной невязки был принят равным 0,05. При численном решении системы (5) учтена также специфика его ядер, что позволило существенно снизить затраты машинного времени и вычислительные погрешности.

Приведенный на рис. 2, а график иллюстрирует изменение во времени разности потенциалов  $V(\tau)$ , которая задавалась в качестве исходных данных для решения исследуемой задачи идентификации. Отметим, что  $V(\tau)$  получена при решении с помощью МКЭ прямой задачи, когда внешняя механическая нагрузка  $\bar{p}(\tau)$  была известной (рис. 2, б). На этом рисунке  $V_0$  – электрическое напряжение в случае статической постановки задачи, то есть когда  $P(x) = P_0 \cdot H(x_0 - x)$ . Представленный на рис. 2, б результат как функция  $p(\tau)$  свидетельствует о высокой эффективности описанной в настоящей работе методики решения обратной нестационарной задачи теории электроупругости по идентификации внешнего механического нагружения.

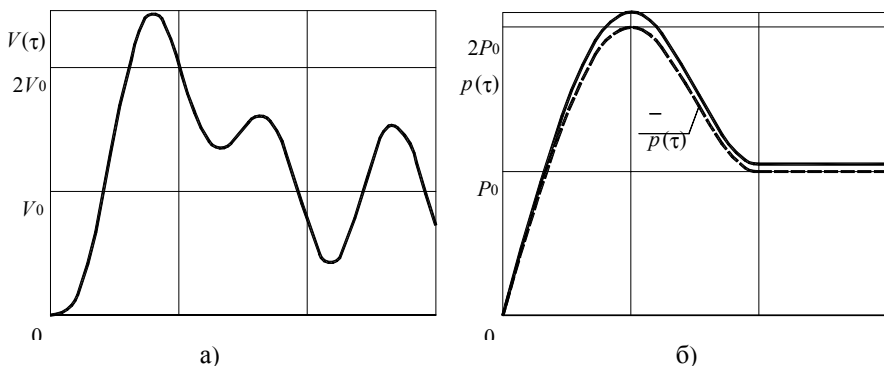


Рисунок 2 – Исходные данные к задаче (а) и результат идентификации (б)

В заключение отметим, что полученные в настоящей работе результаты могут быть в дальнейшем использованы при разработке методов управления напряженно-деформированным состоянием биморфной балки, работающей в режимах прямого и обратного пьезоэффекта. Представленная методика также указывает на возможность идентификации внешней нагрузки, которая произвольным образом распределена по длине биморфа. Для реализации решения задачи в такой постановке электрод на внешней поверхности пьезокерамического слоя выполняется разрезным, а в качестве исходных данных принимаются разности потенциалов с каждого участка.

**Список литературы:** 1. Hagenmuller P. Selection of intelligent materials used in practical applications. // Chemtronics. – 1989. – V. 4. № 4. – P. 254–258. 2. Бабаев А.Э., Мосеев Ю.Б. Нестационарные колебания тонкостенной электроупругой полосы // ДАН. Серия Математика, естественные науки, технические науки. – 1994. – № 12. – С. 54–58. 3. Бабаев А.Э., Бабаев А.А., Янчевский И.В. Нестационарные колебания биморфной балки в режимах прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта // Актуальные проблемы физико-механических исследований. Акустика и

волны. – 2007. – С. 16–27. **4.** Бардозкас Д.И., Зобнин А.И., Сенник Н.А., Фильштинский М.Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. II. Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел. – М.: КомКнига, 2005. – 376 с. **5.** Chen W.Q., Cai J.B., Ye G.R., Wang Y.F. Exact three-dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring interlaminar bonding imperfections modeled by a general spring layer // IJSS. – 2004. – V. 41. Iss. 12. – P. 5247–5263. **6.** Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с. **7.** Lamt P.K., Thomas L.Scofield. Sequential predictor-corrector methods for the variable regularization of Volterra inverse problems. // Inverse problems. – 2000. – V. 16. – P. 373–399. **8.** Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М., Наука, 1990. – 229 с. **9.** Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воронай А.В., Шарамата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.

*Поступила в редколлегию 14.04.2008.*