

УДК 539.534.1

*С.В.ФИЛИПКОВСКИЙ*, канд.техн.наук; ИПМаш НАН Украины, Харьков

## **УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ АЛГОРИТМ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

Для оптимізації параметрів систем, які роблять коливальні рухи, актуальні малий час і висока точність рахування задачі аналізу. Цього потребує багатократне повторення розрахунків при визначенні екстремуму функції цілі. В статті запропонований алгоритм аналізу перехідних коливальних процесів, викликаних короткочасними або раптовими навантаженнями систем з гіроскопічними силами й нелінійним демпфюванням. Для рішення диференціальних рівнянь руху спільно використані методи Рунге-Кутта й Адамса. Визначено умови й розроблена процедура зміни методу інтегрування.

For optimization of parameters of the systems making oscillating motions low time and high accuracy of the analysis task account is an actual problem. It is required by multiply iterates during a determination of the objective function extremum. In the paper the analysis algorithm for the transient processes caused by short-term or sudden loadings of systems with gyroscopic forces and a nonlinear damping is offered. For the solution of movement differential equations Runge-Kutta and Adams methods are jointly used. Conditions of a change of the integration method are determined and the procedure is developed.

**Постановка проблеми.** Динамические процессы в нелинейных системах описываются дифференциальными уравнениями, которые чаще всего решают численными методами [1]. В настоящей работе рассмотрены численные методы анализа переходных колебательных процессов ударопоглощающих подвесок агрегатов самолетов. Обзор публикаций поданному вопросу дан в работах [2-4].

Решение рассматриваемой задачи используется в оптимизационных процедурах. Они предполагают многократное повторение этих решений при разных исходных данных. Поэтому процедура расчетов должна требовать небольших вычислительных затрат. В работе [5] проведен анализ численных методов решения рассматриваемой проблемы с точки зрения быстроты расчетов. В настоящей статье рассмотрен расчет авиационных конструкций. Они должны иметь минимальный вес, поэтому им не дают избыточных запасов прочности. Поскольку к надежности летательных аппаратов предъявляются особые требования, то точность расчета имеет такую же важность.

Целью работы является анализ точности решения нестационарных задач колебаний нелинейных подвесок авиационного оборудования различными численными методами и разработка рекомендаций по их выбору и применению.

**Интегрирование методами второго и высших порядков.** Погрешность решения задачи состоит из погрешности задания исходных данных, по-

грешности самого метода и погрешности округления арифметических операций. В настоящей работе проведена оценка двух последних погрешностей.

Существуют методы второго порядка для расчета динамики систем, это методы Ньюмарка, Вилсона, Хаболта и др. [6]. Их используют для решения задач методом конечных элементов с большим количеством уравнений. Эти методы отличаются экономичностью и устойчивостью. Точность вычислений при этом ограничивается аппроксимацией уравнений движения на каждом шаге вычислений формулами с линейным ускорением. В этих методах производится одно вычисление правой части системы уравнений на каждом шаге интегрирования по времени. В итоге накопленная погрешность округлений не превышает погрешности метода на достаточно большом количестве шагов. Обычно берут несколько сот шагов, а точность и сходимость результатов проверяют решением с вдвое меньшим шагом.

Методы более высокого порядка применяют для решения задач, описываемых системой из нескольких дифференциальных уравнений [1]. Преимущество этих методов в том, что они теоретически позволяют получить любую точность. Практически точность ограничивается хранящимся в компьютере количеством знаков числа [7]. Недостатком методов высокого порядка является необходимость понижать порядок системы дифференциальных уравнений до первого и большое количество вычислений.

Обычно используют одношаговые методы Рунге-Кутта потому, что вычисления на каждом шаге не зависят от предыдущих шагов. Это позволяет начинать решение системы уравнений без дополнительных процедур для первых шагов и интегрировать функции с разрывами. Однако по сравнению с многошаговыми методами они требуют большого количества вычислений правых частей системы уравнений на каждом шаге (большего, чем порядок метода). Это приводит к увеличению времени счета и нарастанию погрешности округления.

В часто применяемой подпрограмме метода Рунге-Кутта RKF45 [7] есть ограничение 3000 вычислений правой части. В этом случае при вычислениях с одинарной точностью погрешность округлений приближается к погрешности метода и подпрограмма передает управление пользователю, чтобы решить вопрос о целесообразности продолжения вычислений этим методом. В качестве альтернативы предлагается переход к многошаговому методу Адамса. Его преимущество заключается в том, что он использует результаты предыдущих шагов, чтобы экстраполировать решение на текущем шаге. Для явной схемы метода производится одно вычисление правой части на каждом шаге. Для неявной схемы добавляются итерации, уточняющие решение. Обычно делается одна итерация на шаге, то есть добавляется еще одно вычисление правой части. Недостаток метода Адамса в том, что он не может сам стартовать, то есть надо сделать первые шаги другим методом. При разрывных функциях рекомендуется тоже делать первые шаги другим методом.

**Объект исследований.** В настоящей работе исследуются колебания амортизирующей подвески агрегата с быстровращающимся ротором. При пространственных колебаниях он имеет 6 степеней свободы. Если ротор внут-

ри агрегата установлен на податливых подшипниках, то поперечные колебания ротора относительно корпуса агрегата предполагают еще 4 степени свободы. В итоге надо рассматривать систему из 10-и уравнений второго порядка

$$[K]\{U\} + [G(U, \dot{U})] + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

где  $[M]$ ,  $[K]$ , – соответственно матрицы массы и жесткости, а  $\{U\}$  и  $\{F(t)\}$  – векторы перемещений и возмущающего усилия. Матрица нелинейного демпфирования и гироскопических сил  $[G(U, \dot{U})]$  зависит от перемещений и их производных.

После понижения порядка уравнений (1) до первого получится система из 20-ти уравнений.

$$\{\dot{Y}\} = \{R\} - [A]\{Y\}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \{Y\} &= \begin{Bmatrix} \{V\} \\ \{U\} \end{Bmatrix}; \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} [M]^{-1}\{F(t)\} \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ [A] &= \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[G(U, \dot{U})] & -[M]^{-1}[K] \\ [E] & 0 \end{bmatrix}; \quad \{V\} = \{\dot{U}\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$[E]$  – единичная матрица.

Как показали предыдущие исследования [3, 4], импульсная нагрузка эффективно гасится демпферами сухого трения с такой силой сопротивления, при которой происходит аperiodическое движение. Негладкость функций, которые описывают действующие силовые факторы, наличие гироскопических сил и небольшое количество уравнений в системе дают основание применить в этой задаче интегрирование численными методами высокого порядка.

**Расчет динамики объекта методами пятого порядка.** Первоначально была использована подпрограмма метода Рунге-Кутты RK45 [7]. В процессе исследований упруго-демпферной подвески с сухим трением оказалось, что при расчете аperiodического движения эта подпрограмма настолько измельчает шаг, что много раз превышает ограничение количества вычислений правых частей 3000 раз. В соответствии с рекомендациями [7] была разработана процедура метода Адамса 4–5-го порядка с постоянным шагом. Шаг постоянный в том смысле, что в формулы входят производные функций в равноотстоящих точках, но этот шаг может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от локальной погрешности на текущем шаге. В этом случае значения производных на пройденном участке должны браться в новых равноотстоящих точках.

На каждом шаге вычисляем значение функции по формуле пятого порядка и одновременно разницу между значениями по формулам четвертого и пятого порядка, которая характеризует погрешность вычислений. Эту разницу сравниваем с заданной погрешностью для определения необходимости изменения шага.

Формула явного метода Адамса четвертого порядка имеет вид [1]

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}), \quad (4)$$

добавка пятого порядка к ней

$$\Delta_5 y_n = \frac{251}{720} h (f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4}), \quad (5)$$

где  $y_n, y_{n+1}$  – значения функции в моменты  $n, n+1$ ,  $h$  – шаг по времени, а  $f_n, \dots, f_{n-4}$  – значения производных функции в соответствующие моменты. Прибавляя (5) к (4) и подставляя его в (2) и (3) получаем приближение явного метода. Далее делаем уточнение неявным методом.

Формула неявного метода Адамса четвертого порядка имеет вид [1]

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}), \quad (6)$$

добавка пятого порядка к ней

$$\Delta_5 y_n = -\frac{19}{720} h (f_{n+1} - 4f_n + 6f_{n-1} - 4f_{n-2} + f_{n-3}). \quad (7)$$

Суммируя (6) и (7) получаем искомое значение функции и далее по (2) и (3) значение производной в конце шага.

Если  $|\Delta_5 y_n|$  превышает заданную погрешность, то шаг уменьшается вдвое. Если  $|\Delta_5 y_n|$  меньше заданной погрешности в 100 или более раз, то шаг удваивается.

**Пример расчета подвески прибора.** Для оценки эффективности метода проведены расчеты подвески прибора самолета на амортизаторах с вязким демпфированием и с сухим трением. Анализировались погрешности методов Рунге-Кутта и Адамса и количество вычислений правых частей уравнений. В табл. 1 представлены значения величин заданной погрешности  $\varepsilon$ , количество вычислений правой части программой Рунге-Кутта  $N_{RK}$  и программой метода Адамса  $N_{AB}$ , а также соответствующих амплитудных перемещений  $U_{RK}$  и  $U_{AB}$  в случае быстрозатухающего аperiodического процесса колебаний с вязким демпфированием. Масса прибора равна 2 кг, он подвешен на четырех амортизаторах с жесткостью 200 Н/м и коэффициентом демпфирования 64 Н·с/м. Кратковременная возмущающая перегрузка задана зависимостью  $a(t) = 10g \sin 10t$ . Точное значение амплитудного перемещения, вычисленное разложением в ряд по собственным формам  $U = 0,062269$  м [8]. При заданной погрешности от  $10^{-3}$  до  $10^{-6}$  метод Адамса значительно экономичнее по количеству вычислений. При погрешности  $10^{-6}$  результат расчета ближе к точному решению за счет меньшей накопленной погрешности округлений.

В табл. 2 представлены значения тех же величин для подвески того же прибора на демпферах с такой же жесткостью и с сухим трением сила, которого равна 16 Н. В этом случае вторая производная по времени от перемещений имеет разрывы потому, что сила сухого трения меняется скачком при изменении направления движения. Алгоритм расчета построен таким образом, что в точке разрыва происходит возврат к методу Рунге-Кутта, чтобы сделать

начальные шаги для метода Адамса.

Таблица 1

$\varepsilon$	$U_{RK}, \text{ м}$	$N_{RK}$	$U_{AB}, \text{ м}$	$N_{AB}$
$10^{-3}$	0,062255	110208	0,062465	1397
$10^{-4}$	0,062255	110208	0,062440	2114
$10^{-5}$	0,062255	117280	0,062287	5790
$10^{-6}$	0,062255	152933	0,062264	18534

Таблица 2

$\varepsilon$	$U_{RK}, \text{ м}$	$N_{RK}$	$U_{AB}, \text{ м}$	$N_{AB}$
$10^{-3}$	0,23022	300239	0,23855	16422
$10^{-4}$	0,23024	418689	0,23830	119060
$10^{-5}$	0,23025	1648872	0,23585	949318
$10^{-6}$	0,23025	13446246	0,23473	7608310

Экономичность многошагового метода в задаче с сухим трением еще более заметна. Точность метода, как следует из таблицы 2, такая же, как у одношагового метода того же порядка. Различия в третьем результате при заданной погрешности  $10^{-6}$  следует отнести к накопленной погрешности округлений.

На рис. 1 показан график зависимости от времени перемещения прибора в направлении действия возмущающей перегрузки. На рис. 2 показан график зависимости от времени абсолютной перегрузки  $P$  прибора на амортизаторах сухого трения. Видны разрывы этой функции в моменты изменения направления силы трения. Расчет переходного процесса выполнен рассмотренными методами пятого порядка.

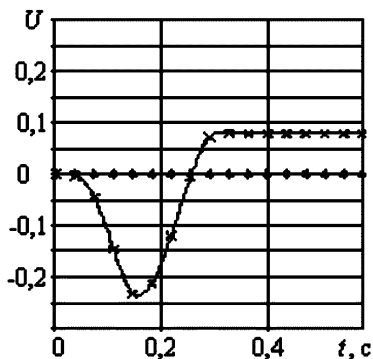


Рисунок 1

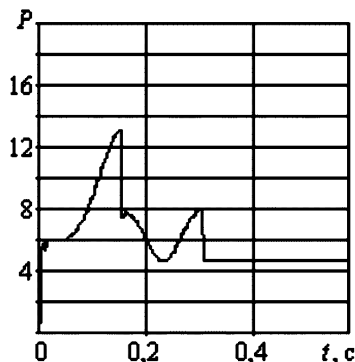


Рисунок 2

**Выводы.** Расчет колебаний упруго-демпферной подвески агрегатов на амортизаторах сухого трения на начальном этапе целесообразно производить одношаговым методом, например, Рунге-Кутты. При чрезмерно большом количестве вычислений правых частей уравнений растет время счета и накопи-

ваемая погрешность округлений. В этом случае целесообразно переходить к многошаговым методам, например, Адамса. В случае правых частей с разрывами в точках разрыва следует возвращаться к одношаговым методам. Разработан алгоритм с автоматической корректировкой шага и сменой метода интегрирования при выполнении отмеченных условий.

**Список литературы:** 1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1990. – 512 с. 2. Філіпковський С., Кантор Б. Оптимізація пружно-демпферних систем підвісок агрегатів устаткування літальних апаратів // *Машинознавство*. – 2001. – № 7. – С. 17–20. 3. Филиповский С.В., Шелудько Г.А. Виброзащита самолетных систем комбинированными демпферами // *Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ»*. – 2003. – Вып. 8. Т. 3. – С. 111–116. 4. Філіпковський С., Шелудько Г. Оптимізація елементів віброзахисту з демпферами сухого тертя // *Машинознавство*. – 2003. – № 5. – С. 30–33. 5. Филиповский С.В. Эффективная методика анализа динамических систем с нелинейным демпфированием // *Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ»*. – 2006. – № 32. – С. 167–171. 6. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с. 7. Форсайт Дж. Малькольм М., Моултер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с. 8. Филиповский С.В., Филиповская Л.А. Исследование колебаний систем с вращающимися частями методом модальной суперпозиции // *Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ»*. – 2005. – № 22. – С. 83–90.

*Поступила в редколлегию 27.06.2008*