

УДК 531

Н.В.ПЕРЕПЕЛКИН; Ю.В.МИХЛИН, докт.физ.-мат.наук; НТУ «ХПИ»

**О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМ
ВОЗБУЖДЕНИЕМ**

Розглянуто стаціонарні режими у неідеальній системі, в якій відбувається взаємодія між джерелом енергії (двигуном) та лінійною пружною підсистемою, досліджено стійкість цих режимів. Чисельно-аналітичними методами досліджується ефект Зоммерфельда. Аналізується вплив нелінійного гасителя на динамічну поведінку системи.

Stationary regimes in a non-ideal system, where an interaction of source of energy (the engine) and linear elastic subsystem takes place, is considered, and the regimes stability is investigated. The Zommerfeld effect is studied by numerical-analytical methods. The influence of nonlinear absorber to the system dynamical behavior is analyzed.

1. Системы с ограниченным возбуждением. Обзор литературы. Как правило, при исследовании динамики упругих элементов машин и механизмов предполагается, что влияние вынуждающих колебания устройств и элементов есть односторонним – связь, вносящая энергию в систему, не допускает обратного влияния исследуемой системы на источник энергии. Однако часто пренебрежение обратной связью ведет к упущению ряда весьма важных свойств поведения системы.

Системы, имеющие источник энергии, обратным влиянием на который со стороны прочих звеньев механической системы нельзя пренебречь из-за его конечной мощности, называются системами с ограниченным возбуждением (или неидеальными системами) [3]. Как показывает практика, в ряде случаев резкий рост амплитуд колебаний упругих элементов неидеальной системы, возникающий при попадании рабочего режима в область резонанса, может приводить к качественно новым и нежелательным режимам колебаний. Впервые данное явление было обнаружено в начале прошлого века немецким инженером А.Зоммерфельдом при проведении опытов с несбалансированными роторными системами, приводимыми в движение электродвигателем малой мощности, закрепленным на податливом основании. По подсчетам Зоммерфельда на нежелательные значительные колебания статора и ротора в резонансном режиме виброактивность в таком случае могло уходить до 60% мощности двигателя.

Аналитическое описание эффекта Зоммерфельда было впервые дано В.О.Кононенко [3]. В дальнейшем исследование неидеальных систем было продолжено в работах Кононенко [3], Голоскокова, Алифова [1], Бальтазара [7] и др.

Целью настоящей работы является детальное исследование стационарных режимов в системе с двумя степенями свободы, содержащей источник энергии с ограниченной мощностью, включая исследование устойчивости этих режимов. Анализируется также влияние на поведение системы существенно нелинейного гасителя колебаний.

2. Постановка задачи. Рассмотрим, следуя Кононенко и Голоскокову [3], колебания системы с ограниченным возбуждением, которая содержит линейную упругую подсистему с одной степенью свободы, получающую возбуждение от двигателя, и, в свою очередь, оказывающую влияние на источник энергии (рис. 1). Для простоты описания примем, что механическая характеристика двигателя представляет зависимость крутящего момента только от угловой скорости вращения. Полагаем, что характеристика двигателя, $L(\dot{\varphi})$, известна. Во время вращения двигателя D кривошип, радиус которого r , деформирует упругую связь c_1 благодаря чему появляются сила $c_1 r \sin(\varphi)$ и ее момент $c_1 r \sin(\varphi) r \cos(\varphi)$.

Уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = c_1 r \sin(\varphi); \\ I\ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi}) + c_1 r (x - r \sin(\varphi)) \cos(\varphi), \end{cases} \quad (1)$$

где m — масса упругой подсистемы, $c = c_0 + c_1$ — ее жесткость, I — момент инерции вращающихся масс, момент сил сопротивления вращению ротора задан в виде линейной функции $H(\dot{\varphi}) = d\dot{\varphi}$, а движущий момент источника энергии — как функция $L(\dot{\varphi})$ (характеристика двигателя). Приняв в качестве источника энергии электродвигатель постоянного тока с параллельным возбуждением, получим, что его механическая характеристика имеет вид прямой линии $L = a + b\dot{\varphi}$ (a, b некоторые известные постоянные).

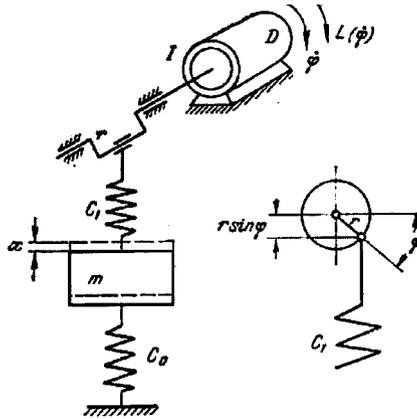


Рисунок 1 – Исследуемая модель системы с неидеальным источником энергии

Проведем обезразмеривание системы, выбрав характерные масштабы времени и перемещений, а также считая, что амплитуды осцилляционных составляющих в законе изменения угловой скорости от времени меньше постоянной составляющей угловой скорости. Полагаем также малой диссипацию в системе. Введя малый параметр ε , перепишем уравнения (1) в следующем виде (подробный вывод уравнений приведен в [6]):

$$\begin{cases} y'' + \varepsilon h y' + y = \varepsilon K \sin(\varphi); \\ \varphi'' = \varepsilon \left(M - N \omega \varphi' + q \left(y \cos(\varphi) - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right) \right). \end{cases} \quad (3)$$

3. Стационарные режимы колебаний неидеальной системы. Сделаю замену переменных типа «амплитуда-фаза»,

$$y = A \cos(\varphi + \Psi) ; \quad y' = -A \sin(\varphi + \Psi) ; \quad \varphi' = \Theta \quad (4)$$

вводя новую независимую переменную φ и используя равенства

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = \Theta \frac{d}{d\varphi}, \text{ получим:}$$

$$\begin{cases} A' = \frac{\varepsilon}{\Theta} [K \sin \varphi + hA \sin(\varphi + \Psi)] \sin(\varphi + \Psi); \\ \Psi' = -\frac{(\Theta - 1)}{\Theta} - \frac{\varepsilon}{A\Theta} [K \sin \varphi + hA \sin(\varphi + \Psi)] \cos(\varphi + \Psi); \\ \Theta' = \frac{\varepsilon}{\Theta} [M - N\Theta + q(A \cos(\varphi + \Psi) - \sin \varphi) \cos \varphi]. \end{cases} \quad (6)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной φ .

Для исследования резонансных режимов введем малую расстройку α угловой скорости вращения ротора Θ с собственной частотой упругой части, которая для системы (6) в нормированных переменных равна единице:

$$\Theta - 1 = \varepsilon \alpha. \quad (7)$$

Усредняя левые и правые части системы (6) по φ от 0 до 2π , получим систему уравнений относительно главных частей медленно меняющихся функций – амплитуды, фазы и угловой скорости:

$$\begin{cases} A' = \frac{\varepsilon}{2\Theta} [K \cos \Psi + hA]; \\ \Psi' = -\frac{\varepsilon \alpha}{\Theta} - \frac{\varepsilon K}{2A\Theta} \sin \Psi; \\ \Theta' = \frac{\varepsilon}{\Theta} \left[M - N\Theta + \frac{q}{2} A \cos \Psi \right]. \end{cases} \quad (8)$$

Приравняв затем левые части системы (8) нулю, получим уравнения, описывающие стационарные режимы работы исходной системы:

$$\begin{aligned} A &= -K/2 ((\Theta - 1)^2 + h^2/4)^{1/2}; \quad \operatorname{tg} \Psi = -2(\Theta - 1)/h; \\ M - N\Theta &= qhA^2/(2K). \end{aligned} \quad (9)$$

Первое равенство (9) представляет собой амплитудно-частотную характеристику системы. Проверочные числовые расчеты показывают, что решение, которое определяется соотношениями (4) и (9) не только неплохо описывает окolorезонансные режимы, но и пригодно к использованию на удалении от резонанса.

Если исключить из зависимостей (9) амплитуду и фазу, то получится кубическое уравнение относительно угловой скорости вращения. Пусть механическая характеристика двигателя имеет вид $L = K_L(\Omega_0 - \dot{\varphi})$, а момент сопротивления на его валу $H = K_H \dot{\varphi}$, тогда схематически зависимость Θ от коэффициента K_L будет такой, какая изображена на рис 2. Здесь K_L – коэффициент, определяющий крутизну механической характеристики двигателя.

4. Устойчивость стационарных режимов. Для анализа устойчивости режимов работы рассмотрим уравнения в вариациях для системы (8), описывающей стационарные режимы. Если использовать преобразования

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= A + a; \\ \Theta_\varepsilon &= \Theta + \sigma; \\ \Psi_\varepsilon &= \Psi + \chi. \end{aligned} \quad (10)$$

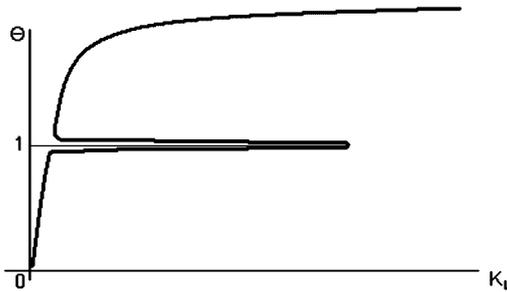


Рисунок 2 – Схематическое изображение зависимости угловой скорости ротора от крутизны механической характеристики, исходя из соотношений (9)

где A, Θ, Ψ – значения амплитуды, частоты и фазы для стационарного режима; a, σ, χ – малые их вариации, то соответствующие уравнения в вариациях для системы (8) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{da}{d\tau} \\ \frac{d\chi}{d\tau} \\ \frac{d\sigma}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon h}{2\Theta} & -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon K \sin(\Psi)}{\Theta} & -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon (K \cos(\Psi) + hA)}{\Theta^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\varepsilon K \sin(\Psi)}{A^2 \Theta} & -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon K \cos(\Psi)}{A\Theta} & \frac{1}{2} \frac{\varepsilon (2\alpha A + K \sin(\Psi))}{A\Theta^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\varepsilon q \cos(\Psi)}{\Theta} & -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon q A \sin(\Psi)}{\Theta} & -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon (2M + qA \cos(\Psi))}{\Theta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \chi \\ \sigma \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Эти уравнения можно несколько упростить, используя соотношения (9) между амплитудой, частотой и фазой стационарных состояний системы.

Об устойчивости движения по первому приближению можно судить по знаку действительной части корней характеристического полинома, записанного для системы уравнений в вариациях.

Если теперь обратиться к рассмотренной ранее зависимости угловой скорости вращения вала двигателя от одного из параметров системы (K_L) (рис. 2) и построить только точки, которые соответствуют устойчивым режимам работы, то картина будет иметь вид, представленный на рис. 3. (Собственная частота колебаний осциллятора, входящего в механическую систему, для которой строился изображенный на рис 3 график, равна 120.) (Прочие параметры, взятые при расчете, таковы: $m = 1$; $c1 = 5000$; $r = 0,08$; $\beta = 0,1$; $I = 8e-3$; $\Omega_0 = 200$; $K_H = 0,01$).

Если рассматривать двигатель как регулируемый, то изменение параметра K_L , крутизны механической характеристики, можно рассматривать как своего рода регулировку – перестройку рабочего режима. Если бы мощность двигателя была настолько велика, что он мог бы считаться идеальным источником энергии, то перестройка рабочего режима в результате изменения крутизны его характеристики происходила бы так, как показано на рис 4, а. Такой режим условно можно назвать номинальным. Обратным влиянием на двигатель в таком случае можно пренебречь. Именно для работы в номинальном режиме проектируется и изготавливается конкретная машина. Однако наличие

резонансных явлений в осцилляторе вместе с неидеальностью источника энергии коренным образом меняет поведение всей системы. Если вначале вывести систему на режим с невысокой угловой скоростью, а затем наращивать обороты, меняя с помощью органов управления двигателем его механическую характеристику (например, меняя ее крутизну – см. рис 4, б), то после достижения резонансной частоты упругой подсистемы дальнейшая перестройка двигателя не приведет к изменению среднего значения угловой скорости вращения, а лишь увеличит амплитуды осцилляционных процессов, происходящих в системе. Двигатель «зависает» в резонансном режиме. Это и есть так называемый эффект Зоммерфельда.

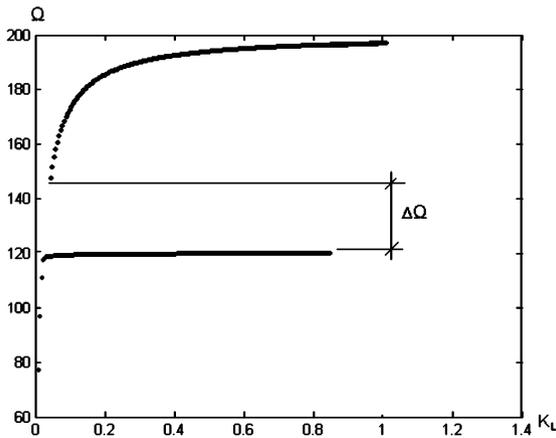


Рисунок 3 – Устойчивые режимы движения

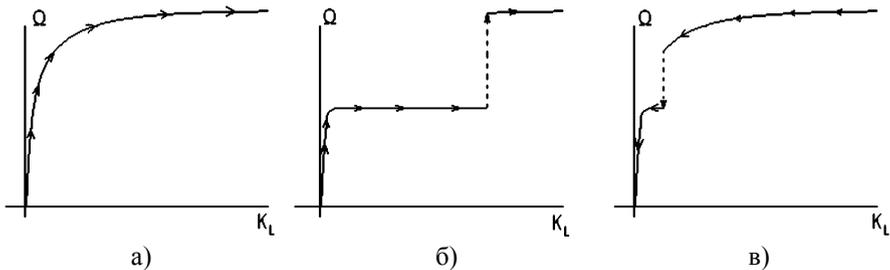


Рисунок 4 – Эффект Зоммерфельда при перестройке системы с ограниченным возбуждением через резонанс

Дальнейшая перестройка механической характеристики приведет через некоторое время к скачкообразной смене режима с резонансного на «номинальный» режим с малыми амплитудами (рис. 4, б). Обратная перестройка в сторону уменьшения оборотов также приведет к скачку, но уже из номинального в резонансный режим (рис 4, в).

Другой немаловажной особенностью поведения рассмотренной системы

есть то, что вследствие вышеописанных скачкообразных перестроек режимов работы имеет место диапазон рабочих оборотов, который принципиально не будет реализован ($\Delta\Omega$ на рис. 3). Верхняя граница этого диапазона не находится в непосредственной близости от опасных, резонансных значений, но, несмотря на это, номинальный режим с малыми амплитудами там не обнаруживается. В указанном диапазоне оборотов данный режим неустойчив, то есть, здесь происходит срыв в резонанс.

5. Результаты численного моделирования. На рис. 5 и 6 изображены результаты численного интегрирования системы уравнений (1) для таких параметров системы, когда ожидаемый номинальный режим оказывается в области неустойчивости. ($\Omega_0 = 220$; $K_L = 0,07$; $K_H = 0,015$).

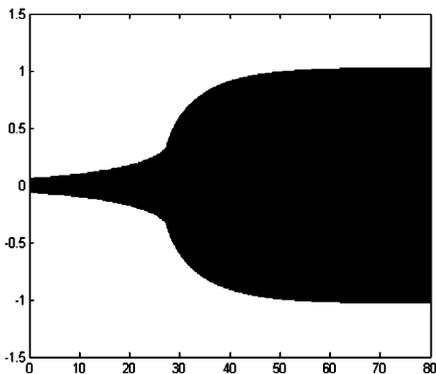


Рисунок 5 – Результаты численного интегрирования уравнений (1) для переменной $x(t)$

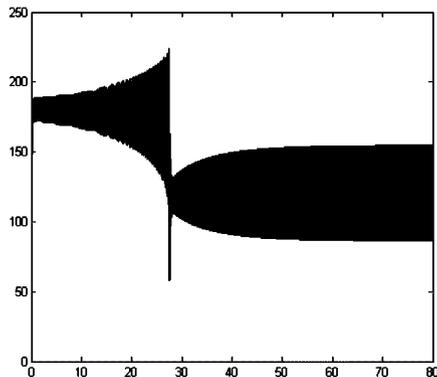


Рисунок 6 – Результаты численного интегрирования уравнений (1) для переменной $\dot{\varphi}(t)$

Как видно из графиков, система выходит на обороты, близкие к номинальным, но амплитуда колебаний растет, что приводит к срыву скорости вращения к околорезонансным значениям. Данный режим сопровождается значительной вибрационной активностью и для реальных механизмов может заканчиваться разрушением системы. На рис. 7 изображен проход этой же системы через резонансные обороты, осуществляемый изменением механической характеристики двигателя.

Как видно из зависимости мгновенного значения угловой скорости от времени, после того, как обороты подходят к значению резонансной частоты, заметный рост угловой скорости прекращается, а вместо этого начинаются интенсивные осцилляционные процессы. При дальнейшей перестройке характеристики двигателя система снова входит в номинальный режим.

В области, где номинальный режим, согласно полученным результатам, является устойчивым, переходный процесс практически сразу выходит в окрестность номинального режима, который и станет конечным итогом развития переходного процесса ($\Omega_0 = 220$; $K_L = 0,2$; $K_H = 0,04$) (рис. 8, 9).

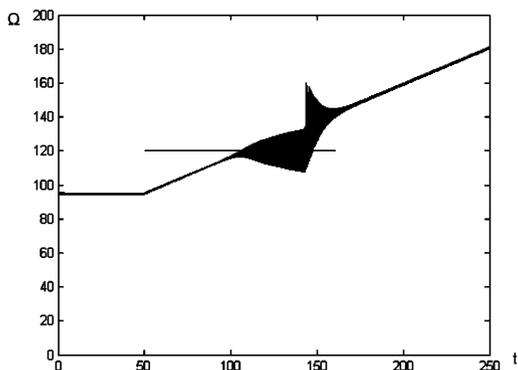


Рисунок 7 – Результаты численного интегрирования уравнений движения при перестройке через резонанс для переменной $\dot{\phi}(t)$

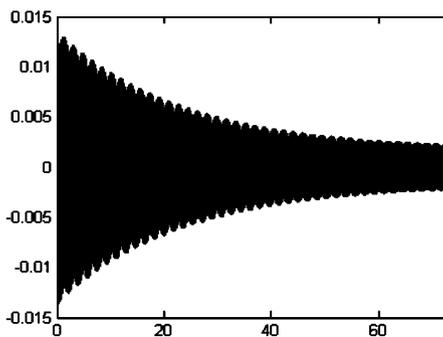


Рисунок 8 – Результаты численного интегрирования уравнений (3) для переменной $x(t)$

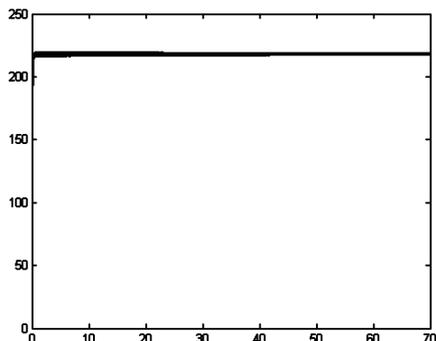


Рисунок 9 – Результаты численного интегрирования уравнений (3) для переменной $\dot{\phi}(t)$

6. Неидеальная система с гасителем. Результаты предыдущего раздела приводят к выводу о том, что возможность появления режимов с активным энергетическим взаимодействием двигателя и колебательной системы, представляющей остальные звенья машины, ставит под вопрос ее эксплуатационную пригодность.

Интересным представляется поиск такой конструктивной доработки, которая устранила бы или существенно уменьшила обе указанные проблемы. Таким конструктивным решением представляется установка нелинейного динамического гасителя. С одной стороны, как следует из [4], использование нелинейного гасителя существенно расширяет диапазон гашения колебаний, а с другой стороны введение нелинейности может благотворно сказаться на свойствах устойчивости номинального режима работы машины.

В качестве основы для моделирования поведения системы с ограниченным возбуждением и динамическим гасителем колебаний возьмем систему,

изображенную на рис. 1, в которой в упругую подсистему добавлен нелинейный гаситель (рис. 10).

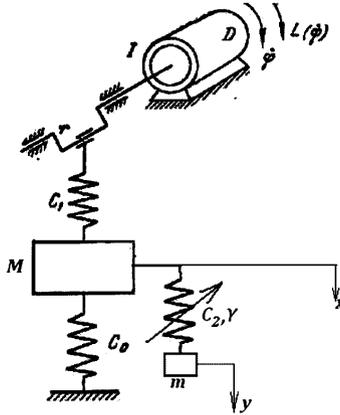


Рисунок 10 – Динамическая система с ограниченным возбуждением, оснащенная нелинейным гасителем

Нелинейная пружина гасителя предполагается имеющей зависимость упругой силы от разности перемещений ее краев Δx в виде (18):

$$f_{\text{нп}}(x) = C_2 \Delta x + \gamma \Delta x^3. \quad (18)$$

Дифференциальные уравнения движения данной системы имеют вид (19).

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = L(\varphi) - H(\varphi) + c_1 r(x - r \sin(\varphi)) \cos(\varphi); \\ M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx + c_2(x - y) + \gamma(x - y)^3 = c_1 r \sin(\varphi); \\ m\ddot{y} + \beta\dot{y} - c_2(x - y) - \gamma(x - y)^3 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Ограничиваясь исследованием стационарных режимов, принимаем, что значения угловой скорости близки к постоянным:

$$\varphi' = \theta + \varepsilon f(\tau). \quad (20)$$

Используя соотношение (20), а также конструктивные особенности системы, запишем систему (19) как

$$\begin{cases} \varphi'' = \varepsilon \psi(x, \varphi'); \\ x'' + \dots = \varepsilon K \sin \varphi; \\ y'' + \phi(x, y, y') = 0. \end{cases} \quad (21)$$

В таком случае можно осуществить разложение:

$$\varepsilon K \sin \varphi \approx \varepsilon K \sin(\varphi_0 + \theta\tau) + O(\varepsilon^2). \quad (22)$$

Если считать частоту Ω известной, то с точностью до слагаемых более высокого порядка малости можно считать, что на упругую подсистему осуществляется одночастотное воздействие, а следовательно имеет место одночастотный отклик: $x = A(\theta) \sin(\theta\tau + \xi(\theta))$.

При таких предположениях система уравнений (19) разделяется: отдельно

можно рассматривать динамику двигателя, а отдельно – движение масс M и m .

Первое уравнение системы (19) после процедуры обезразмеривания, аналогичной п.1.2, имеет вид:

$$\varphi'' = \varepsilon \left[\bar{M} - N\varphi' + qA \sin(\theta\tau + \xi) \cos \varphi - \frac{q}{2} \sin(2\varphi) \right]. \quad (23)$$

К последнему уравнению можно применить метод многих масштабов. Опуская вычисления, выпишем лишь условие отсутствия секулярных слагаемых в уравнении первого приближения по ε (в предположении, что $P_0 = \Omega$), как уравнение, определяющее значения главной части угловой скорости вращения ротора в стационарном режиме:

$$\bar{M} - N\theta + \frac{qA(\theta)}{2} \sin(\xi(\theta)) = 0, \quad (24)$$

или для ненормированных частоты и амплитуды:

$$a - b\Omega + \frac{c_1 r A(\Omega)}{2} \sin(\xi(\Omega)) = 0. \quad (25)$$

Для нахождения корней этого уравнения необходимо знать амплитудно-и фазочастотную характеристики для переменной x .

Для построения АЧХ и ФЧХ двух последних уравнений системы (19) используем нулевое приближение для переменной φ , а именно, $\varphi = \Omega t$.

Для нахождения решения используется метод гармонического баланса. Для переменных x и y вводятся следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} x(t) &:= A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t); \\ y(t) &:= B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя их в два последних уравнения системы (19) и приравнявая к нулю коэффициенты при $\sin(\Omega t)$ и $\cos(\Omega t)$, получим четыре нелинейных алгебраических уравнения относительно амплитуд A_i и B_i .

Искать аналитическое решение для этой системы не представляется возможным. Была построена сходящаяся итерационная процедура, которая позволяет эффективно получить численное решение системы. Этот алгоритм был реализован в программном комплексе Matlab.

На рис. 11, 12 представлены примеры АЧХ, полученных с помощью такого численного решателя АЧХ для переменных x и y соответственно (при этом $m = 1$; $c_1 = 5000$; $r = 0,08$; $\beta = 0,1$; $c_2 = 2000$; $\gamma = 900$; $m = 0,1$).

В результате можно утверждать, что динамический гаситель обеспечивает некоторый сдвиг частоты из области первого резонанса. Кроме того, как следует из результатов, полученных в [4], при определенных условиях движения подобной системы в области первого резонанса неустойчивы, а в области второго резонанса реализуется режим виброгашения, когда амплитуды колебаний упругой подсистемы малы, а амплитуды колебаний гасителя велики.

Выводы. Таким образом, по сравнению с вариантом, содержащим идеальный источник энергии, представленная система обладает качественно но-

выми свойствами:

- Вблизи резонансных частот упругой подсистемы наблюдается ее активное энергетическое взаимодействие с двигателем. Мощность, расходуемая на поддержание резонансного режима, может быть сравнима с полезной мощностью установки. Соответственно, данный режим крайне нежелателен, потому что в реальной машине он приведет к ее поломке или неправильному функционированию.
- Любой источник энергии имеет конечную мощность, а значит при определенных условиях может считаться неидеальным.
- Имеет место принципиально нереализуемый диапазон рабочих оборотов, в котором номинальный режим неустойчив. Наличие такого диапазона приводит к тому, что машина реализует не весь рабочий диапазон, а значит, работает неправильно.
- Определенный зарезонансный участок рабочих оборотов при плавном перестроении через резонанс может быть достигнут только после зарезонансного скачка и дальнейшего снижения оборотов.

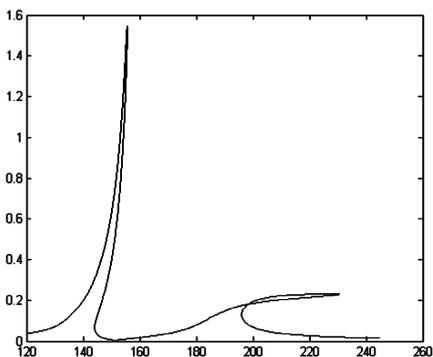


Рисунок 11 – АЧХ упругой подсистемы для переменной $x(t)$

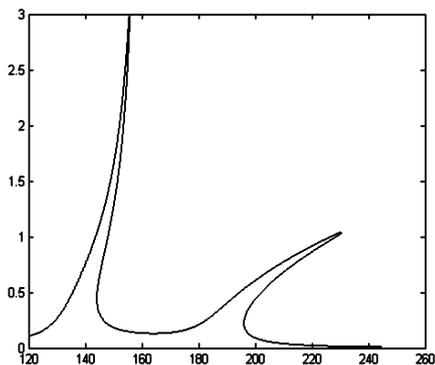


Рисунок 12 – АЧХ упругой подсистемы для переменной $y(t)$

Список литературы: 1. Алифов А. А., Фролов К. В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. – М.: Наука, 1989. – 328 с. 2. Вибрации в технике. Справочник в 6-и т. Том 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. Блехмана И.И. – М.: Машиностроение, 1979. 3. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 256 с. 4. Михлин Ю.В., Решетникова С.Н. Анализ динамического поведения двухмассовой системы при существенно нелинейном виброгашении // Прикладная механика. – Киев. – 2005. – Т. 41, № 1. 5. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М., Мир, 1984. 6. Перепелкин Н.В., Михлин Ю.В. Преходные и стационарные режимы в системе с ограниченным возбуждением // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Вып.38. – 2007. – С. 108-117. 7. Balthazar J.M., Mook D.T., Brasil R.M., Fenili A., Belato D., Felix J.L.P. An Overview on Non-Ideal Vibrations // Meccanica. – 2003. – Vol. 38. – P. 613-621.

Поступила в редколлегию 30.06.2008.