

УДК 539.3

В.И.ЛАВИНСКИЙ, докт.техн.наук; **П.А.ЛАРИН**; НТУ «ХПИ»

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Запропонована робота присвячена розв'язанню модельної задачі про пружне-пластичне деформування круглої пластини під дією імпульсного поперечного та дотичного пондермоторного, розподіленого по поверхні, навантаження. Отримано вираз з розподілу прогинів у радіальному напрямку при поздовжньо-поперечному вигині пластинки. З'ясовано вплив згинальних моментів від дотичних сил на характер розподілів прогинів.

The present work is devoted to the decision of a modelling problem on elastic-plastic deformation of a round plate, under action pulse cross-section and, allocated on a surface, a tangent pondermotorной loadings. Expressions of distribution of deflections in a radial direction are received at a longitudinal - cross-section bend of a plate. Influence of the bending moments from tangents of forces on character of distributions of deflections is found out.

Введение. Практические использования магнитно-импульсных методов, их достоинства и промышленные применения достаточно полно описаны авторами монографии [1]. Несмотря на широкий спектр проблем, решаемых с использованием энергии электромагнитных полей, современное производство требует дальнейшего расширения перечня технологических процессов, в которых магнитно-импульсные методы позволят реализовать неоспоримые преимущества в сравнении с известными механическими или химическими способами [2].

Как указано в работе [3], существует принципиальная возможность создания условий для эффективного силового действия для обработки стальных листовых заготовок. При электродинамическом анализе такого подхода оказалось, что тра-

диционные представления теории магнитно-импульсной обработки [4] не отражают характер возникающих пондеромоторных сил. Так, использование нового индуктора, разработанного в НТУ «ХПИ» на основе эффекта цилиндро-конического витка [5], приводят к возникновению качественно новых сил, действующих на плоскую заготовку. Наряду с естественной, нормальной к плоскости листовой заготовки компонентой давления, возникает достаточно большая по величине распределенная по поверхности пластинчатой заготовки продольная сила (рис. 1). Несмотря на относительно малые поперечные размеры заготовки, продольные усилия приводят к возникновению дополнительных изгибающих моментов. Изгибающие моменты от продольных пондеромоторных сил могут в значительной степени исказить характерную картину формоизменения листовой заготовки при магнитно-импульсном воздействии.

Настоящая работа посвящена решению модельной задачи об упругопластическом деформировании круглой пластины, под действием импульсной поперечной нагрузки и распределенной по поверхности касательной пондеромоторной нагрузки.

2. Постановка задачи и построение математической модели. Примем в первом приближении, что в качестве матрицы для образования вмятины в плоской заготовке достаточно ввести кольцо диаметром как у формируемой вмятины. Кольцо можно принять абсолютно жестким, так как его деформация ничтожно мала по сравнению с деформацией заготовки. Крепление исходной заготовки на кольцо матрицы осуществляется с помощью кольцевого банджа, жесткостные свойства которого позволяют принять жесткую заделку заготовки по контуру вмятины. Поэтому в дальнейшем рассмотрим тонкую круглую пластинку толщиной h , жестко зашпеленную по внешнему радиусу R как изображено на рис. 1.

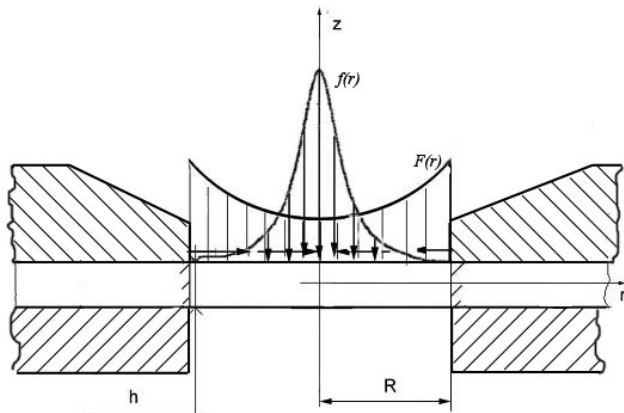


Рисунок 1 – Расчетная схема круглой пластинки

На пластинку действует два вида нагружения: распределенная поперечная импульсная нагрузка, заданная функцией $f(r,t)$ (1) и распределенная по поверхности касательная нагрузка, заданная функцией $F(r,t)$ (2). При статически эквива-

лентном переносе касательных сил к срединной плоскости пластинки наряду с продольными силами возникают распределенные изгибающие моменты.

При расчете обжатие контура будем моделировать жестким защемлением.

$$f(r, t) = \frac{f_0}{1 + 0,4 \cdot r^2} \cdot |\sin(\omega t)| \cdot e^{(-8000t)}; \quad (1)$$

$$F(r, t) = F_0 \cdot ch(0,1 \cdot r) \cdot |\sin(\omega t)| \cdot e^{(-8000t)}. \quad (2)$$

При решении задачи о упругом деформировании применим принцип суперпозиции, позволяющий рассмотреть отдельно прогибы от действия поперечной и касательной сил, а значения изгибающих моментов и прогибов получить соответствующим суммированием.

Проведенные исследования показали, что продольными деформациями и соответствующими им напряжениями можно пренебречь т.к. они малы по сравнению с поперечными.

2 Результаты численного анализа. В качестве примера рассмотрим круглую пластину со следующими параметрами.

Исходные данные:

Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2$;

коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$;

радиус пластины $R = 20 \text{ мм}$;

толщина пластины $h = 1 \text{ мм}$;

$f_0 = 60 \text{ Н}$;

$F_0 = 20 \text{ Н}$.

Решение упругой задачи. На пластинку действует распределенная поперечная сила, заданная функцией $f(r, t)$ (1) Так как конструкция представляет собой сплошную круглую пластину, жестко защемленную по краю, то граничные условия будут выглядеть так

$$\begin{aligned} r = 0; & & r = R; \\ C_1 = C_3 = 0; & & \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \\ & & w = 0. \end{aligned}$$

Начальные условия выглядят так:

$$w|_{t=0} = 0; \quad \dot{w}|_{t=0} = 0.$$

Так как действующая на круглую пластину нагрузка распределена симметрично относительно оси z , перпендикулярной к срединной плоскости и проходящей через ее центр, то изогнутая поверхность также останется симметричной. Во всех точках, равно удаленных от центра пластины прогибы и усилия будут одинаковы (условия осесимметричной задачи). Поэтому достаточно рассмотреть эти величины лишь вдоль одного диаметрального сечения, проходящего через ось симметрии.

Основное дифференциальное уравнение симметричного изгиба круглой пластины постоянной толщины имеет вид

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw(r,t)}{dr} \right) \right] \right\} = q(r,t) + \beta \frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где w – прогиб пластины, зависящий от полярной координаты r и времени t ; $q(r,t)$ – интенсивность нагрузки, перпендикулярной к срединной плоскости пластины, D – цилиндрическая жесткость пластины, которая определяется по формуле

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad (4)$$

E – модуль упругости материала пластины, ν – его коэффициент Пуассона.

Определение прогиба от действия поперечных моментов. Для определения прогибов от действия поперечных моментов используем полученное решение для радиальных моментов, равномерно распределенных по окружности, концентрической к опорному контуру [7].

Для внутренней части пластины ($0 \leq \rho \leq \beta$)

$$w = -\frac{Mr^2}{4D} \left[2\beta^2 \ln \beta + (1 - \beta^2)\rho^2 \right]. \quad (5)$$

где $\beta = r_i/R$; r_i – координата приложения момента, ρ – относительная координата.

Напряжения, возникающие при изгибе пластины. Зная выражение для прогиба, мы можем получить и соответствующие значения моментов, получаем

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \quad (6)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right). \quad (7)$$

Подставив найденные выше выражения в формулы для напряжений, получим

$$\sigma_r = \frac{12 \cdot M_r}{h^3} \cdot z; \quad \sigma_\theta = \frac{12 \cdot M_\theta}{h^3} \cdot z. \quad (8)$$

Результаты решения упругой задачи. Для получения уравнения полного прогиба сложим уравнение прогиба от действия поперечной силы и уравнение прогиба от действия поперечных моментов.

Так как значение продольной деформации достаточно мало по сравнению с поперечными деформациями, то ей можно пренебречь.

$$w = 5,9619 + 0,0092r - 0,0347r^2 + 0,1402 \cdot 10^{-2} r^3 - 0,4361 \cdot 10^{-4} r^4 + 0,3258 \cdot 10^{-5} r^5 - 0,3859 \cdot 10^{-6} r^6 + 0,3067 \cdot 10^{-7} r^7 - 0,112 \cdot 10^{-8} r^8 - 0,8807 \cdot 10^{-11} r^9 + 0,2717 \cdot 10^{-11} r^{10} - 0,1191 \cdot 10^{-12} r^{11} + 0,2404 \cdot 10^{-14} r^{12} - 0,1954 \cdot 10^{-16} r^{13}.$$

Выражения радиальных и окружных напряжений запишутся в виде:

$$\sigma_r = 7384,6 - 804,6r + 50,21r^2 - 6,72r^3 + 1,21r^4 - 0,13r^5 + 0,6402 \cdot 10^{-2} r^6 + 0,79 \cdot 10^{-4} r^7 - 0,26 \cdot 10^{-4} r^8 + 0,14 \cdot 10^{-5} r^9 - 0,32 \cdot 10^{-7} r^{10} + 0,28 \cdot 10^{-9} r^{11} + 0,339 \cdot 10^{-12} r^{12};$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & 1800,4 - 145,6r + 8,47r^2 + 0,81r^3 - 0,22r^4 + 0,022r^5 + 0,53 \cdot 10^{-3}r^6 - \\ & - 0,65 \cdot 10^{-4}r^7 + 0,61 \cdot 10^{-5}r^8 - 0,2 \cdot 10^{-6}r^9 + 0,15 \cdot 10^{-8}r^{10} + 0,73 \cdot 10^{-10}r^{11} - \\ & - 0,13 \cdot 10^{-11}r^{12}. \end{aligned}$$

Решение задачи пластичности. Рассмотрим изгиб круглой пластинки постоянной толщины. Для этого будем использовать, предложенный И.А.Биргером, метод дополнительных нагрузок [6]. Суть метода состоит в приведение задачи об упругопластическом теле к задаче об упругом теле с дополнительными объемными и поверхностными нагрузками. Для решения упругопластической задачи нужно найти решение упругой задачи с дополнительными объемными силами и дополнительными поверхностными нагрузками.

Своеобразие такой задачи состоит в том, что дополнительные силовые факторы сами зависят от искомым напряжений. Однако можно применить процесс последовательных приближений, который обладает вполне удовлетворительной сходимостью.

В первом приближении считаем, что дополнительные объемные и поверхностные нагрузки отсутствуют. В результате решения определяются напряжения σ_{r1}^* , $\sigma_{\theta 1}^*$, касательными напряжениями можно пренебречь. Затем определяется величина интенсивности напряжений, которой соответствует интенсивность деформаций.

$$\begin{aligned} \sigma_{i1}^* &= \sqrt{\sigma_{r1}^{*2} + \sigma_{\theta 1}^{*2} - \sigma_{r1}^* \sigma_{\theta 1}^*}; \\ \varepsilon_{i1}^* &= \frac{2(1+\nu)}{3} \cdot \frac{\sigma_{i1}^*}{E}; \\ \psi &= \frac{\sigma_{i1}^*}{\sigma_{i1}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где ψ - параметр пластичности, а σ_{i1} - определяется по кривой деформирования.

Напряжения в первом приближении в упругопластическом теле

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{1}{\psi_1} \sigma_{r1}^* + \left(1 - \frac{1}{\psi_1}\right) \sigma_1^*; \\ \sigma_{\theta 1} &= \frac{1}{\psi_1} \sigma_{\theta 1}^* + \left(1 - \frac{1}{\psi_1}\right) \sigma_1^*; \\ \sigma_1^* &= \frac{1}{3} (\sigma_{r1}^* + \sigma_{\theta 1}^*) \end{aligned} \quad (10)$$

Во втором приближении также решается обычная задача упругости, но с дополнительными объемными и поверхностными нагрузками. Эти нагрузки определяются напряжениями и параметром пластичности для предыдущего приближения. Отметим, что дополнительные нагрузки могут создавать объемное напряженное состояние, если даже при действительных нагрузках напряженное состояние было линейным или плоским.

Вычисление третьего приближения проводится точно таким же образом, как и второго. Расчет заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений.

Проведя вычисления для данных значений нагрузки, мы можем убедиться, что пластина находится в пластическом состоянии (как показано на рис. 2). Также на рисунке видно, что метод обладает достаточно хорошей сходимостью.

Посчитав по полученным результатам прогибы, получаем следующие выражения и графики (рис. 3).

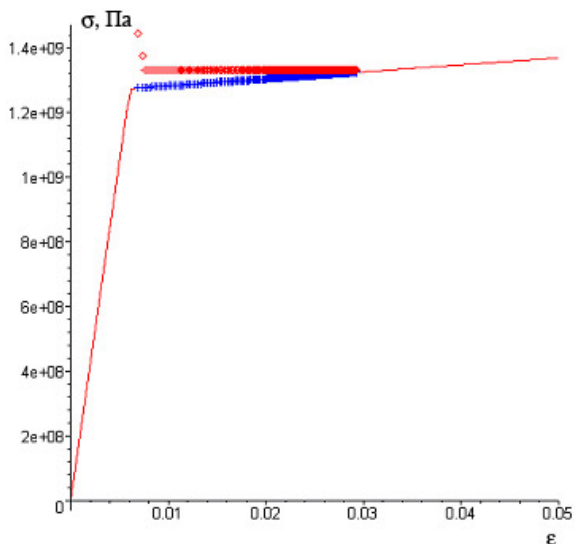


Рисунок 2 – Сходимость метода дополнительных нагрузок

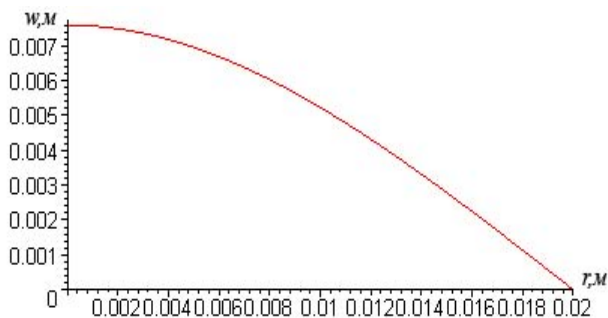


Рисунок 3 – Прогиб круглой пластинки

Полученные распределения приводят к максимальному прогибу пластинки - 7,6 мм. По результатам расчета можно сделать вывод, что максимальное напряжение возникает в жесткой заделке по внешнему радиусу R . Большая часть пластины находится в пластическом состоянии.

Заключение. Таким образом, получен алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния круглой пластинки при магнитно-импульсном нагружении. Получены выражения распределения прогибов в радиальном направлении при продольно-поперечном изгибе пластинки, зоны распределения пластических деформаций.

Список литературы: 1. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Том 1. – Харьков: Изд. НТУ «ХПИ», 2001. – 272 с. 2. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И. Магнитно-импульсная обработка тонкостенных металлов. Том 2. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Харьков: Изд. МОСТ-Торнадо, 2002. – 284 с. 3. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Хименко Л.Т. Физические основы возможных направлений развития магнитно-импульсной обработки тонкостенных металлов // Электротехніка і електромеханіка. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2004. – № 2. – С. 80-84. 4. Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. – Харьков: Вища школа, 1977. – 168 с. 5. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 466 с. 6. Биргер И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения. – М.: Оборонгиз, 1961. – 367 с. 7. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Пластины, диски, балки-стенки. – К.: Литература по строительству и архитектуре, 1959. – 1049 с.

Поступила в редакцию 02.07.2008.