

УДК 534.1

К.В.АВРАМОВ, докт.техн.наук, ИПМаш НАН України, Харків

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРОВ

У статті отримана математична модель нелінійних коливань ротора з одним диском з урахуванням гіроскопічних моментів діючих на диск. Запропоновано асимптотичну процедуру для дослідження нелінійних коливань цієї системи.

The mathematical model of nonlinear vibrations of one disk rotor accounting gyroscopic moment is considered. The asymptotic method for nonlinear vibrations analysis is suggested.

1. Введение. Е.Г.Голоскоков внес значительный вклад в исследования нестационарных механических процессов, нелинейные колебания роторов

[1–5]. Он провел одни из первых исследований по анализу автоколебаний, возникающих из-за взаимодействия масляного слоя с цапфами роторов [4, 5]. Ф.М.Диментберг [6] исследовал влияние внутреннего трения на устойчивость движения роторов. В.А.Гробов [7] предложил использовать асимптотические методы нелинейной механики для анализа динамики роторных систем. В.В.Болотин [8] предложил учитывать нелинейную инерционность в модели однодискового ротора. Различные модели колебаний роторов и анализ устойчивости их движений рассматриваются в книге А.Тондла [9].

В этой статье предлагается асимптотический метод анализа динамики роторов, которые описываются моделями с конечным числом степеней свободы и опираются на нелинейные опоры. Метод излагается на примере однодискового ротора. Предлагаемый подход может быть обобщен на ротора с несколькими дисками.

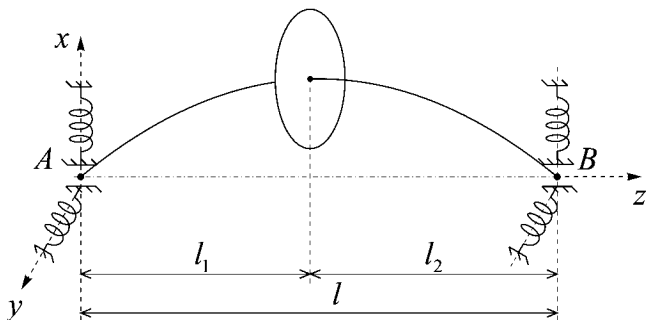


Рисунок 1 – Расчетная схема однодискового ротора

2. Уравнения движения ротора. Рассматривается дискретная модель ротора (рис. 1). Предполагается, что диск является абсолютно твердым телом, а вал – упругим. Масса вала не учитывается. Центр тяжести диска находится на расстоянии ϵ от оси вращения. Поэтому ротор совершает вынужденные колебания. Ротор вращается в подшипниках, установленных на нелинейных упругих опорах. Массы подшипников и опор не учитываются. При колебаниях диска, опоры A и B так же движутся. Эти движения описываются обобщенными координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Проекция на оси x и y силы, возникающей в опоре A , обозначим через

$$R_x^{(A)} = c_x^{(1)} x_1 + c_x^{(2)} x_1^3; R_y^{(A)} = c_y^{(1)} y_1 + c_y^{(2)} y_1^3.$$

Проекция силы в опоре B определим так:

$$R_x^{(B)} = k_x^{(1)} x_2 + k_x^{(2)} x_2^3; R_y^{(B)} = k_y^{(1)} y_2 + k_y^{(2)} y_2^3.$$

Предполагается, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью Ω . Динамика диска как твердого тела описывается тремя углами поворота $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Правило введения этих углов представлено в [10]. Угловая скорость вращения диска определяется так:

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3) \vec{e}_1 + (\dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \sin \theta_3 \cos \theta_2) \vec{e}_2 + (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2) \vec{e}_3, \quad (1)$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты системы координат, связанные с диском. Отметим, что справедливо следующее соотношение: $\Omega = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$. Тогда кинетическую энергию системы представим так:

$$T = \frac{I_e}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{I_p}{2} (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \varepsilon^2 \dot{\theta}_3^2 \sin^2 \theta_3 - 2\varepsilon \dot{x} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 + \dot{y}^2 + \varepsilon^2 \dot{\theta}_3^2 \cos^2 \theta_3 + 2\varepsilon \dot{y} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3],$$

где I_e, I_p – экваториальный и полярный моменты инерции диска. Если предположить, что опоры A и B неподвижны, то потенциальную энергию ротора можно представить так:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} c_{22} (\theta_2^2 + \theta_1^2) + c_{12} (x\theta_2 - y\theta_1).$$

В случае упругих опор, потенциальная энергия принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{c_x^{(1)}}{2} x_1^2 + \frac{c_x^{(2)}}{4} x_1^4 + \frac{c_y^{(1)}}{2} y_1^2 + \frac{c_y^{(2)}}{4} y_1^4 + \frac{k_x^{(1)}}{2} x_2^2 + \frac{k_x^{(2)}}{4} x_2^4 + \frac{k_y^{(1)}}{2} y_2^2 + \frac{k_y^{(2)}}{4} y_2^4 + \\ & \frac{1}{2} c_{11} [(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1)^2 + (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2)^2] + \\ & \frac{1}{2} c_{22} \left[\left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2 \right] + \\ & + c_{12} \left[(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) - (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) \right]. \end{aligned}$$

где $\varsigma_1 = \frac{l_1}{l}$; $\varsigma_2 = \frac{l_2}{l}$. Тогда уравнения движения относительно обобщенных координат $(x, y, \theta_1, \theta_2, x_1, y_1, x_2, y_2)$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m[\ddot{x} + \varepsilon(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \sin \Omega t - \varepsilon(\dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_2 - 2\Omega \dot{\theta}_1 \sin \theta_2) \cos \Omega t] - \\ - \varepsilon \Omega^2 m \cos \Omega t + c_{11} (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + c_{12} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = 0; \\ m[\ddot{y} - \varepsilon(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \cos \Omega t - \varepsilon(\dot{\theta}_1 \sin^2 \theta_2 - 2\Omega \dot{\theta}_1 \sin \theta_2) \sin \Omega t] - \\ - \varepsilon \Omega^2 m \sin \Omega t + c_{11} (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) - c_{12} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) = 0; \\ I_e \ddot{\theta}_1 - I_e \ddot{\theta}_1 \theta_2^2 - 2I_e \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \theta_2 + I_p \ddot{\theta}_2 - \frac{1}{2} I_p \Omega \dot{\theta}_2 \theta_2^2 + c_{22} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - \\ - c_{12} (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) = 0; \\ I_e \ddot{\theta}_2 + I_e \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - I_p \Omega \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} I_p \Omega \dot{\theta}_1 \theta_2^2 + c_{22} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + c_{12} (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{c_{12}}{l} - \zeta_2 c_{11} \right) (x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1) + \left(\frac{c_{22}}{l} - \zeta_2 c_{12} \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + c_x^{(1)} x_1 + c_x^{(2)} x_1^3 = 0; \\
& \left(\frac{c_{12}}{l} - c_{11} \zeta_2 \right) (y - \zeta_2 y_1 - \zeta_1 y_2) + \left(c_{12} \zeta_2 - \frac{c_{22}}{l} \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) + c_y^{(1)} y_1 + c_y^{(2)} y_1^3 = 0; \\
& - \left(c_{11} \zeta_1 + \frac{c_{12}}{l} \right) (x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1) - \left(\frac{c_{22}}{l} + c_{12} \zeta_1 \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + k_x^{(1)} x_2 + k_x^{(2)} x_2^3 = 0; \quad (2) \\
& - \left(c_{11} \zeta_1 + \frac{c_{12}}{l} \right) (y - \zeta_2 y_1 - \zeta_1 y_2) + \left(\frac{c_{22}}{l} + c_{12} \zeta_1 \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) + k_y^{(1)} y_2 + k_y^{(2)} y_2^3 = 0.
\end{aligned}$$

Система (2) состоит из четырех дифференциальных уравнений и четырех нелинейных алгебраических уравнений. Решение нелинейных алгебраических уравнений представим так:

$$\begin{aligned}
x_1 &= A_1 x + A_2 \theta_2 + m_1 (A_1 x + A_2 \theta_2)^3 + m_2 (B_1 x + B_2 \theta_2)^3 + \dots; \\
x_2 &= B_1 x + B_2 \theta_2 + m_3 (A_1 x + A_2 \theta_2)^3 + m_4 (B_1 x + B_2 \theta_2)^3 + \dots; \\
y_1 &= A_3 y + A_4 \theta_1 + m_5 (A_3 y + A_4 \theta_1)^3 + m_6 (B_3 y + B_4 \theta_1)^3 + \dots; \\
y_2 &= B_3 y + B_4 \theta_1 + m_7 (A_3 y + A_4 \theta_1)^3 + m_8 (B_3 y + B_4 \theta_1)^3 + \dots
\end{aligned} \quad (3)$$

Для определения параметров $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4, m_1, \dots, m_8$ ряды (3) вводятся в нелинейные алгебраические уравнения (2) и приравниваются слагаемые при одинаковых степенях x, y, θ_1, θ_2 . Значения параметров рядов (3) здесь не приводятся для краткости. Ряды (3) введем в первые четыре уравнения системы (2). В результате получим следующую динамическую систему:

$$\begin{aligned}
& m \left[\ddot{x} + \varepsilon (\ddot{\theta}_1 \theta_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \sin(\Omega t) + \varepsilon 2\Omega \dot{\theta}_1 \theta_2 \cos(\Omega t) \right] + \alpha_{11}^{(1)} \dot{x} + \alpha_{12}^{(1)} \dot{\theta}_2 + r_{11} x + r_{12} \theta_2 + \\
& + P_1(x, \theta_2) = \varepsilon \Omega^2 m \cos(\Omega t); \\
& m \left[\ddot{y} - \varepsilon (\ddot{\theta}_1 \theta_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos(\Omega t) + \varepsilon 2\Omega \dot{\theta}_1 \theta_2 \sin(\Omega t) \right] + \alpha_{11}^{(2)} \dot{y} + \alpha_{12}^{(2)} \dot{\theta}_1 + r_{21} y + r_{22} \theta_1 + \\
& + P_2(y, \theta_1) = \varepsilon \Omega^2 m \sin(\Omega t); \\
& I_e \ddot{\theta}_1 - I_e \ddot{\theta}_1 \theta_2^2 - 2I_e \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \theta_2 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} I_p \Omega \dot{\theta}_2 \theta_2^2 + \alpha_{22}^{(1)} \dot{\theta}_1 + \alpha_{12}^{(2)} \dot{y} + r_{31} \theta_1 + r_{32} y + \\
& + P_3(y, \theta_1) = 0; \\
& I_e \ddot{\theta}_2 + I_e \theta_2 \dot{\theta}_1^2 - I_p \Omega \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} I_p \Omega \dot{\theta}_1 \theta_2^2 + \alpha_{22}^{(2)} \dot{\theta}_2 + \alpha_{12}^{(1)} \dot{x} + r_{41} \theta_2 + r_{42} x + P_4(x, \theta_2) = 0; \quad (4)
\end{aligned}$$

$$P_i = \delta_1^{(i)} x^3 + \delta_2^{(i)} x \theta_2^2 + \delta_3^{(i)} x^2 \theta_2 + \delta_4^{(i)} \theta_2^3; \quad i = 1, 4;$$

$$P_j = \delta_1^{(j)} y^3 + \delta_2^{(j)} y \theta_1^2 + \delta_3^{(j)} y^2 \theta_1 + \delta_4^{(j)} \theta_1^3; \quad j = 2, 3,$$

где $\alpha_{ij}^{(k)}$; $(i, j, k) = 1, 2$ – коэффициенты линейного демпфирования. Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tilde{x} = \frac{x}{r}; \tilde{y} = \frac{y}{r}; \tilde{\theta}_1 = \frac{\theta_1}{\theta_*}; \tilde{\theta}_2 = \frac{\theta_2}{\theta_*}; \tau = \Omega_{*1} t, \quad (5)$$

где Ω_{*1} – критическая скорость вращения ротора; r – радиус инерции поперечного сечения вала. Предполагая, что $l_1 = l_2$ система (4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + \mu \tilde{\alpha}_{11}^{(1)} \dot{\tilde{x}} + v_1^2 \tilde{x} + \mu (\tilde{\delta}_1^{(1)} \tilde{x}^3 + \tilde{\delta}_2^{(1)} \tilde{x} \tilde{\theta}_2^2) &= \mu \chi \bar{\Omega}^2 \cos(\bar{\Omega} \tau); \\ \ddot{\tilde{y}} + \mu \tilde{\alpha}_{11}^{(1)} \dot{\tilde{y}} + v_1^2 \tilde{y} + \mu (\tilde{\delta}_1^{(1)} \tilde{y}^3 + \tilde{\delta}_2^{(1)} \tilde{y} \tilde{\theta}_1^2) &= \mu \chi \bar{\Omega}^2 \sin(\bar{\Omega} \tau); \\ \ddot{\tilde{\theta}}_1 + I \bar{\Omega} \dot{\tilde{\theta}}_2 + \mu \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} \dot{\tilde{\theta}}_1 + v_2^2 \tilde{\theta}_1 + \mu (\tilde{\delta}_3^{(3)} \tilde{y}^2 \tilde{\theta}_1 + \tilde{\delta}_4^{(3)} \tilde{\theta}_1^3) &= 0; \\ \ddot{\tilde{\theta}}_2 - I \bar{\Omega} \dot{\tilde{\theta}}_1 + \mu \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} \dot{\tilde{\theta}}_2 + v_2^2 \tilde{\theta}_2 + \mu (\tilde{\delta}_3^{(3)} \tilde{x}^2 \tilde{\theta}_2 + \tilde{\delta}_4^{(3)} \tilde{\theta}_2^3) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mu \ll 1$; $I = \frac{I_p}{I_e}$; $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_{*1}}$; $\mu \chi = \frac{\varepsilon}{r}$.

3. Асимптотическая процедура анализа колебаний. Для исследования динамики системы (6) воспользуемся методом многих масштабов [11, 12]. Решение системы представим так:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0(T_0, T_1, \dots) + \mu x_1(T_0, T_1, \dots) + \dots; \tilde{y} = y_0(T_0, T_1, \dots) + \mu y_1(T_0, T_1, \dots) + \dots; \quad (7) \\ \tilde{\theta}_1 &= \theta_{10}(T_0, T_1, \dots) + \mu \theta_{11}(T_0, T_1, \dots) + \dots; \tilde{\theta}_2 = \theta_{20}(T_0, T_1, \dots) + \mu \theta_{21}(T_0, T_1, \dots) + \dots \end{aligned}$$

Введем (7) в (6) и приравняем слагаемые при одинаковых степенях ε . В результате получим:

$$x_0 = A_1(T_1) \exp(i v_1 T_0) + \bar{A}_1(T_1) \exp(-i v_1 T_0); \quad (8a)$$

$$y_0 = A_2(T_1) \exp(i v_1 T_0) + \bar{A}_2(T_1) \exp(-i v_1 T_0); \quad (8b)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{10}}{\partial T_0^2} + I \bar{\Omega} \frac{\partial \theta_{20}}{\partial T_0} + v_2^2 \theta_{10} = 0; \quad (8c)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{20}}{\partial T_0^2} - I \bar{\Omega} \frac{\partial \theta_{10}}{\partial T_0} + v_2^2 \theta_{20} = 0; \quad (8d)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \tilde{\alpha}_{11}^{(1)} \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + v_1^2 x_1 + \tilde{\delta}_1^{(1)} x_0^3 + \tilde{\delta}_2^{(1)} x_0 \theta_{20}^2 = \chi \bar{\Omega}^2 \cos(\bar{\Omega} T_0); \quad (8e)$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \tilde{\alpha}_{11}^{(1)} \frac{\partial y_0}{\partial T_0} + v_1^2 y_1 + \tilde{\delta}_1^{(1)} y_0^3 + \tilde{\delta}_2^{(1)} y_0 \theta_{10}^2 = \chi \bar{\Omega}^2 \sin(\bar{\Omega} T_0); \quad (8f)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{11}}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 \theta_{10}}{\partial T_0 \partial T_1} + I \bar{\Omega} \left(\frac{\partial \theta_{21}}{\partial T_0} + \frac{\partial \theta_{20}}{\partial T_1} \right) + \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} \frac{\partial \theta_{10}}{\partial T_0} + v_2^2 \theta_{11} + \tilde{\delta}_3^{(3)} y_0^2 \theta_{10} + \tilde{\delta}_4^{(3)} \theta_{10}^3 = 0; \quad (8g)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{21}}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 \theta_{20}}{\partial T_0 \partial T_1} - I \bar{\Omega} \left(\frac{\partial \theta_{11}}{\partial T_0} + \frac{\partial \theta_{10}}{\partial T_1} \right) + \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} \frac{\partial \theta_{20}}{\partial T_0} + v_2^2 \theta_{21} + \tilde{\delta}_3^{(3)} x_0^2 \theta_{20} + \tilde{\delta}_4^{(3)} \theta_{20}^3 = 0, \quad (8h)$$

где \bar{A}_1 – величина комплексно- сопряженная к A_1 . Решение уравнений (8c,d)

представим так

$$[\theta_{10}, \theta_{20}] = [B_1, B_2] \exp(i\omega T_0). \quad (9)$$

Решение (9) введем в (8с,d) и получим следующее уравнение для определения ω :

$$\omega^4 - \omega^2 (2v_2^2 + I^2 \bar{\Omega}^2) + v_2^4 = 0. \quad (10)$$

Решение биквадратного уравнения (10) представим так:

$$\omega_{1,2}^2 = v_2^2 + I^2 \bar{\Omega}^2 \delta_{1,2}; \quad \delta_{1,2} = 0,5 \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4v_2^2}{I^2 \bar{\Omega}^2}} \right]. \quad (11)$$

Тогда решения уравнений (8 с,d) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \theta_{10} &= B_1 \exp(i\omega_1 T_0) + B_2 \exp(i\omega_2 T_0) + \bar{B}_1 \exp(-i\omega_1 T_0) + \bar{B}_2 \exp(-i\omega_2 T_0); \\ \theta_{20} &= -\gamma_1 B_1 i \exp(i\omega_1 T_0) - i\gamma_2 B_2 \exp(i\omega_2 T_0) + \gamma_1 \bar{B}_1 i \exp(i\omega_1 T_0) + i\gamma_2 \bar{B}_2 \exp(-i\omega_2 T_0); \\ \gamma_j &= \omega_j^{-1} I \bar{\Omega} \delta_j; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь исследуем динамику ротора в случае выполнения резонансного условия:

$$2v_1 + \omega_1 = \omega_2 + \mu \sigma_2, \quad (13)$$

где σ_2 – параметр расстройки. Используя уравнение (11), соотношение (13) можно представить так:

$$\bar{\Omega} = v_1 + \mu \sigma_1, \quad (14)$$

где σ_1 – параметр расстройки. В приложениях часто используется значение $I = 2$. В этом случае выполняется следующее соотношение: $2\sigma_1 = -\sigma_2$. Теперь уравнения (12) введем в (8g, h). В результате получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_{11}}{\partial T_0^2} + I \bar{\Omega} \frac{\partial \theta_{21}}{\partial T_0} + v_2^2 \theta_{11} &= R_{11} \exp(i\omega_1 T_0) + R_{12} \exp(i\omega_2 T_0) + \dots; \\ \frac{\partial^2 \theta_{21}}{\partial T_0^2} - I \bar{\Omega} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial T_0} + v_2^2 \theta_{21} &= R_{21} \exp(i\omega_1 T_0) + R_{22} \exp(i\omega_2 T_0) + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

где функции R_{11}, \dots, R_{22} не представлены для краткости изложения. Отметим, что в уравнениях (15) представлены только существенные для дальнейшего анализа члены. Решения уравнений (15) представим так:

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= Q_{11}(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + Q_{12}(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + \dots; \\ \theta_{21} &= Q_{21}(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + Q_{22}(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (16) введем в систему (15). В результате получим следующие две системы линейных алгебраических уравнений относительно Q_{11}, \dots, Q_{22} :

$$\begin{aligned} (v_2^2 - \omega_1^2) Q_{11} + I \bar{\Omega} i \omega_1 Q_{21} &= R_{11}; \quad (v_2^2 - \omega_1^2) Q_{21} - I \bar{\Omega} i \omega_1 Q_{11} = R_{21}; \\ (v_2^2 - \omega_2^2) Q_{12} + I \bar{\Omega} i \omega_2 Q_{22} &= R_{12}; \quad (v_2^2 - \omega_2^2) Q_{22} - I \bar{\Omega} i \omega_2 Q_{12} = R_{22}. \end{aligned} \quad (17)$$

Определители систем (17) имеют вид (10). Поэтому условие существования нетривиальных решений систем (17) представим так:

$$\begin{vmatrix} v_2^2 - \omega_1^2 & R_{11} \\ -I\Omega i\omega_1 & R_{21} \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} v_2^2 - \omega_2^2 & R_{12} \\ -I\Omega i\omega_2 & R_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Уравнения (18) эквивалентны двум комплексным модуляционным уравнениям, которые принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \pi_2 \frac{\partial B_1}{\partial T_1} + \pi_3 \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} B_1 + \pi_4 i B_1^2 \bar{B}_1 + \pi_5 i B_1 B_2 \bar{B}_2 + \pi_6 i A_1 \bar{A}_1 B_1 - \pi_7 i A_2 \bar{A}_2 B_1 - \\ - \pi_8 i \bar{A}_2^2 B_2 \exp(-i\sigma_2 T_1) = 0; \\ \pi_9 \frac{\partial B_2}{\partial T_1} - \pi_{10} B_2 + \pi_{11} i B_1^2 \bar{B}_2 + \pi_{12} i B_1 B_2 \bar{B}_1 + \pi_{13} i A_1^2 B_1 \exp(i\sigma_2 T_1) - \\ - \pi_{14} i A_2^2 B_1 \exp(i\sigma_2 T_1) - \pi_{15} i \bar{A}_2 A_2 B_2 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Параметры π_2, \dots, π_{15} не представлены для краткости изложения.

Исключая секулярные члены из уравнений (8e,f), получаем еще два комплексных модуляционных уравнения, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 2i\nu_1 \frac{\partial A_1}{\partial T_1} + \tilde{\alpha}_{11}^{(1)} i\nu_1 A_1 + 3\tilde{\delta}_1^{(1)} A_1^2 \bar{A}_1 + 2\tilde{\delta}_2^{(1)} \gamma_1^2 A_1 B_1 \bar{B}_1 + 2\tilde{\delta}_2^{(1)} \gamma_2^2 A_1 B_2 \bar{B}_2 + \\ 2\tilde{\delta}_2^{(1)} \gamma_2 \gamma_1 \bar{A}_1 B_2 \bar{B}_1 \exp(-i\sigma_2 T_1) = 0, 5\chi\nu_1^2 \exp(i\sigma_1 T_1); \\ 2i\nu_1 \frac{\partial A_2}{\partial T_1} + \tilde{\alpha}_{11}^{(1)} i\nu_1 A_2 + 3\tilde{\delta}_1^{(1)} A_2^2 \bar{A}_2 + 2\tilde{\delta}_2^{(1)} A_2 B_1 \bar{B}_1 + 2\tilde{\delta}_2^{(1)} \bar{A}_2 B_2 \bar{B}_1 \exp(-i\sigma_2 T_1) + \\ 2\tilde{\delta}_2^{(1)} A_2 B_2 \bar{B}_2 = -i0,5\chi\nu_1^2 \exp(i\sigma_1 T_1). \end{aligned} \quad (20)$$

К уравнениям (19, 20) применим следующую замену переменных:

$$B_j = 0,5b_j \exp(i\psi_j); \quad A_j = 0,5a_j \exp(i\psi_j); \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

В результате приходим к системе из восьми модуляционных обыкновенных дифференциальных уравнений. К этим уравнениям применим следующую замену переменных:

$$(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, b_1, b_2, a_1, a_2) = (\psi_1 - \psi_2; \sigma_1 T_1 - \theta_1; \sigma_1 T_1 - \theta_2; b_1, b_2, a_1, a_2).$$

В результате получим такую систему модуляционных уравнений:

$$\begin{aligned} \pi_2 b_1' + \pi_3 \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} b_1 + 0,25\pi_8 a_2^2 b_2 \sin(2\tilde{\gamma}_3 - \tilde{\gamma}_1) = 0; \\ \pi_9 b_2' - \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} \pi_{10} b_2 - 0,25\pi_{13} b_1 a_1^2 \sin(\tilde{\gamma}_1 - 2\tilde{\gamma}_2) - 0,25\pi_{14} a_2^2 b_1 \sin(2\tilde{\gamma}_3 - \tilde{\gamma}_1) = 0; \\ \nu_1 a_1' + 0,5\tilde{\alpha}_{11}^{(1)} \nu_1 a_1 - 0,25\tilde{\delta}_2^{(1)} \gamma_2 \gamma_1 b_1 a_1 b_2 \sin(\tilde{\gamma}_1 - 2\tilde{\gamma}_2) = 0,5\chi\nu_1^2 \sin \tilde{\gamma}_2; \\ \nu_1 a_2' + 0,5\tilde{\alpha}_{11}^{(1)} \nu_1 a_2 + 0,25\tilde{\delta}_2^{(1)} b_1 a_2 b_2 \sin(2\tilde{\gamma}_3 - \tilde{\gamma}_1) = -0,5\chi\nu_1^2 \cos \tilde{\gamma}_3; \\ \tilde{\gamma}_1' = \frac{a_2^2 (\pi_8 \pi_9 b_2^2 - \pi_{14} \pi_2 b_1^2)}{4\pi_2 \pi_9 b_1 b_2} \cos(\tilde{\gamma}_1 - 2\tilde{\gamma}_3) + \chi_1 b_1^2 + \chi_2 b_2^2 + \chi_3 a_2^2 - \frac{\pi_6}{4\pi_2} a_1^2 + \\ + \frac{\pi_{13} b_1 a_1^2}{4\pi_9 b_2} \cos(\tilde{\gamma}_1 - 2\tilde{\gamma}_2); \\ \tilde{\gamma}_2' = \sigma_1 - \frac{3}{8\nu_1} \tilde{\delta}_1^{(1)} a_1^2 - \frac{\tilde{\delta}_2^{(1)} \gamma_1^2}{4\nu_1} b_1^2 - \frac{\tilde{\delta}_2^{(1)} \gamma_2^2}{4\nu_1} b_2^2 + \frac{\chi\nu_1}{2a_1} \cos \tilde{\gamma}_2 - \tilde{\delta}_2^{(1)} \frac{\gamma_2 \gamma_1}{4\nu_1} b_1 b_2 \cos(2\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1); \end{aligned}$$

$$\tilde{\gamma}'_3 = \sigma_1 - \frac{3\tilde{\delta}_1^{(1)}}{8\nu_1} a_2^2 - \frac{\tilde{\delta}_2^{(1)}}{4\nu_1} (b_1^2 + b_2^2) - \tilde{\delta}_2^{(1)} \frac{b_2 b_1}{4\nu_1} \cos(2\tilde{\gamma}_3 - \tilde{\gamma}_1) + \frac{\chi\nu_1}{2a_2} \sin \tilde{\gamma}_3. \quad (22)$$

Параметры χ_1, χ_2, χ_3 этой системы не приводятся для краткости.

Переменные модуляционных уравнений (22) и обобщенные координаты системы (6) связаны между собой так:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= a_1 \cos(\Omega t - \tilde{\gamma}_2); \quad \tilde{y} = a_2 \cos(\Omega t - \tilde{\gamma}_3); \\ \tilde{\theta}_1 &= b_1 \cos(\tilde{\gamma}_1 + \psi_2 + \omega_2 t - 2\bar{\Omega}t) + b_2 \cos(\psi_2 + \omega_2 t); \\ \tilde{\theta}_2 &= \gamma_1 b_1 \sin(\tilde{\gamma}_1 + \psi_2 + \omega_2 t - 2\bar{\Omega}t) + \gamma_2 b_2 \sin(\psi_2 + \omega_2 t). \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь введем следующую замену переменных:

$$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) = [a_1 \cos(\theta_1 - \sigma_1 T_1); a_1 \sin(\theta_1 - \sigma_1 T_1); a_2 \cos(\theta_2 - \sigma_1 T_1); a_2 \sin(\theta_2 - \sigma_1 T_1); b_1 \cos\psi_1; b_1 \sin\psi_1; b_2 \cos\psi_2; b_2 \sin\psi_2]. \quad (24)$$

Тогда динамическую систему (22) представим так:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 - \sigma_1 y_1 + \frac{\tilde{\alpha}_{11}^{(1)}}{2} x_1 + \frac{\tilde{\delta}_2^{(1)} \gamma_1 \gamma_2}{4\nu_1} (x_1 y_4 x_3 - x_1 x_4 y_3 - y_1 x_4 x_3 - y_1 y_4 y_3) + \\ + y_1 R_1(x_1, y_1, x_3, y_3, x_4, y_4) &= 0; \\ \dot{y}_1 + \sigma_1 x_1 + \frac{\tilde{\alpha}_{11}^{(1)}}{2} y_1 - \frac{\tilde{\delta}_2^{(1)} \gamma_1 \gamma_2}{4\nu_1} (x_1 x_4 x_3 + x_1 y_4 y_3 + y_1 y_4 x_3 - y_1 x_4 y_3) - \\ - x_1 R_1(x_1, y_1, x_3, y_3, x_4, y_4) &= -0.5\chi\nu_1; \\ \dot{x}_2 - \sigma_1 y_2 + \frac{\tilde{\alpha}_{11}^{(1)}}{2} x_2 - \frac{\tilde{\delta}_2^{(1)}}{4\nu_1} (x_2 y_3 x_4 - x_2 x_3 y_4 + y_2 x_4 x_3 + y_2 y_4 y_3) + \\ + y_2 R_2(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) &= -0.5\chi\nu_1; \\ \dot{y}_2 + \sigma_1 x_2 + \frac{\tilde{\alpha}_{11}^{(1)}}{2} y_2 - \frac{\tilde{\delta}_2^{(1)}}{4\nu_1} (x_2 x_4 x_3 + x_2 y_4 y_3 - y_2 y_3 x_4 + y_2 x_3 y_4) - \\ - x_2 R_2(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) &= 0; \\ \dot{x}_3 + \frac{\pi_3}{\pi_2} \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} x_3 + \frac{\pi_8}{4\pi_2} (y_4 x_2^2 - y_4 y_2^2 - 2x_4 x_2 y_2) - y_3 R_3(x_3, y_3, x_4, y_4, x_1, y_1, x_2, y_2) &= 0; \\ \dot{y}_3 + \frac{\pi_3}{\pi_2} \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} y_3 - \frac{\pi_8}{4\pi_2} (x_4 (x_2^2 - y_2^2) + 2y_4 x_2 y_2) + x_3 R_3(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) &= 0; \\ \dot{x}_4 - \frac{\pi_{10}}{\pi_9} \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} x_4 - \frac{\pi_{13}}{4\pi_9} (y_3 x_1^2 - y_3 y_1^2 + 2x_3 x_1 y_1) + \frac{\pi_{14}}{4\pi_9} (y_3 x_2^2 - y_3 y_2^2 + 2x_3 x_2 y_2) - \\ - y_4 R_4(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) &= 0; \\ \dot{y}_4 - \frac{\pi_{10}}{\pi_9} \tilde{\alpha}_{22}^{(1)} y_4 + \frac{\pi_{13}}{4\pi_9} (x_3 x_1^2 - x_3 y_1^2 - 2y_3 x_1 y_1) - \frac{\pi_{14}}{4\pi_9} (x_3 x_2^2 - x_3 y_2^2 - 2y_3 x_2 y_2) + \\ + x_4 R_4(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) &= 0. \end{aligned}$$

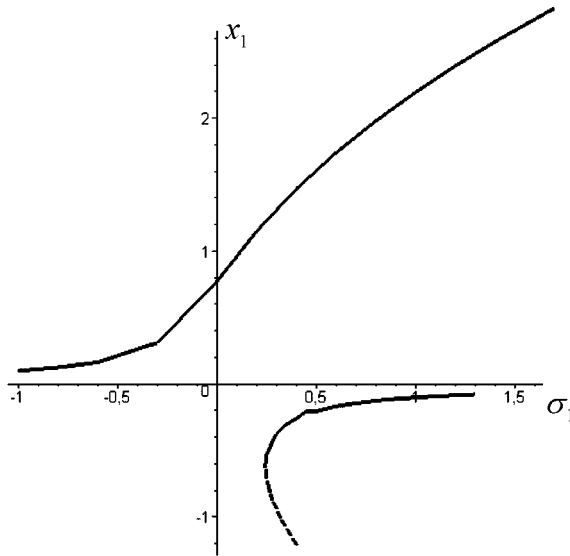


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика колебаний

4. Численный анализ колебаний. Рассмотрим стальной ротор с постоянным поперечным сечением диаметра $d_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ и параметрами:

$$m = 15,3 \text{ кг}; I_p = 0,441 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; I_e = 0,22 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; k_x^{(1)} = c_x^{(1)} = 9,8 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$c_x^{(2)} = c_y^{(2)} = k_x^{(2)} = k_y^{(2)} = 19,6 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^3}; l_1 = l_2 = 0,45 \text{ м}; l = 0,9 \text{ м}; \varepsilon = 0,01 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Изгибные собственные частоты колебаний ротора при $\Omega = 0$ таковы: $p_1 = 81,87 \text{ rad/s}$; $p_2 = 306,95 \text{ rad/s}$.

Теперь рассмотрим вынужденные колебания, которые описываются системой модуляционных уравнений (25). Неподвижные точки этой системы определяются из соотношений: $\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = \dots = \dot{y}_4 = 0$. Тогда получаем систему восьми нелинейных алгебраических уравнений. Рассмотрим движения при $x_3 = y_3 = 0$; $\chi = 0$. Для этого исследуем эволюцию неподвижных точек при изменении σ_1 . Результаты расчета представлены на рис. 2, где показана амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний.

Заключение. В статье предложен метод анализа вынужденных колебаний в нелинейных моделях роторов с гироскопическими силами. В результате применения этого метода динамика системы сводится к новой динамической системе, описывающей модуляцию колебаний.

Это исследование частично поддержано Фондом фундаментальных исследований Украины (грант Ф25.1/042).

Список литературы: **1.** *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 335 с. **2.** *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные изгибно-крутильные колебания системы двигатель-ротор // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 2. – С. 153-157. **3.** *Голоскоков Е.Г., Ольшанский В. П., Певцов В.М.* Переход через резонанс ротора центробежного насоса с учетом гидродинамических сил и сил трения // Прикладная механика. – 1969. – № 3. – С. 102-106. **4.** *Овчарова Д.К., Голоскокова Е.Г.* Автоколебания соосных роторов // Прикладная механика. – 1971. – № 7. – С. 85-90. **5.** *Овчарова Д.К., Голоскокова Е.Г.* Автоколебания ротора с учетом гироскопического момента диска // Динамика и прочность машин. – **16.** – Харьков, Изд-во ХГУ, 1972. – С. 31-36. **6.** *Диментберг Ф.М.* Изгибные колебания вращающихся валов. – М.: АН СССР, 1959. – 247 с. **7.** *Гробов В.А.* Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 166 с. **8.** *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с. **9.** *Тондл А.* Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 387 с. **10.** *Хронин Д.В.* Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. – М: Машиностроение, 1970. – 409 с. **11.** *Avramov K.V.* Nonlinear forced vibrations of a cylindrical shell with two internal resonances // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42. – No. 2. – P. 169-175. **12.** *Avramov K.V.* Chaotic friction vibrations excited by a quasiperiodic load // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42. – No. 9. – P. 1071-1076.

Поступила в редакцию 20.05.2008.