

И.В.ЯНЧЕВСКИЙ, канд.техн.наук, доц., ХНАДУ

УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СЛОЙНО-СТУПЕНЧАТОГО БИМОРФА

Розглянута задача управління нестационарними коливаннями шарово-ступінчастої електропружної балки в припущенні, що механічне навантаження і область її прикладання відомі. Управління здійснюється за рахунок різниці потенціалів на електродах п'єзокерамічного шару. Цільова функція управління визначена як мінімізація інтеграла від прогину по довжині балки, при цьому задоволення критерію кількісно виражається ваговим коефіцієнтом. Рішення для функції прогину представлено у вигляді суми квазістатичної і динамічної складових. Графічний матеріал ілюструє ефективність алгоритму формування керуючого сигналу та вплив вагового коефіцієнта на характеристики напружено-деформівного стану балки при спільній дії механічного і електричного навантажень.

The problem of non-stationary vibration control for a step-layered electroelastic beam is considered on the assumption that the mechanical load and its application area are known. The control is realized due to a potential difference on electrodes of a piezoceramic layer. The objective control function is assigned as minimization of length integral from a beam deflection. Meeting the criterion is quantified by a weight factor. The deflection function solution is presented as the sum of quasi-static and dynamic components. The graphic material illustrates the developing algorithm efficiency for control signal formation and weight factor influence on characteristics of the beam's deflected mode at joint action of mechanical and electric loads.

Введение. Пьезокерамические элементы, обладающие свойством электромеханического преобразования энергии, используются в широком диапазоне технических приложений [1, 2]. Особенно эффективно их применение в устройствах для контроля и управления деформированным состоянием механических систем, снижения вибраций, проч. Варианты постановок задач управления и возможности управления за счет пьезоэлементов рассмотрены в работах [3–7]. Для подавления вибраций механических систем используется в основном управление с обратной связью, в котором управляющий электрический сигнал, подводимый к электродам пьезопривода, формируется на основе принятого алгоритма управления и информации, поступающей с интегрированного в систему пьезодатчика. Но несмотря на очевидную практическую значимость метода, при его натурной реализации остаются окончательно не решенными ряд проблем, связанных с математической формулировкой критерия управления, трудоемкостью вычислительного процесса обработки информации, необходимостью сложной техники для согласования регистрирующего и управляющего сигналов, проч.

Большой эффективностью и точностью отличается управление без обратной связи [6], которое осуществляется при независимой работе приводов и датчиков. В работах [6, 7] рассмотрены частные примеры управления деформированным состоянием стержневых систем при ненулевых начальных

кинематических параметрах. Весьма немногочисленными являются исследования, посвященные управлению колебаниями механических систем при возбуждении импульсным механическим нагружением. В статье [8] решена задача управления для шарнирно-закрепленного асимметричного балочного биморфа. При этом управляющий электрический сигнал подводится к сплошным электродам пьезослоя, длина которого равна длине балки. Настоящая работа, в отличие от [8], посвящена управлению нестационарными колебаниями балки для более общего случая с несовпадающими длинами слоев при шарнирном закреплении упругого слоя. Предполагается, что механическая нагрузка, как функция времени, и область нагружения являются известными.

1. Постановка задачи. Исследуется балка прямоугольного поперечного сечения длиной $2l_m$, толщиной h_m и шириной b , которая шарнирно закреплена на торцах. На участке балки длиной $2x_0$ приложена нестационарная равномерно распределенная механическая нагрузка $p(t)$. К слою жестко соединен поляризованный по толщине пьезокерамический элемент со сплошными электродированными покрытиями. Длина и толщина электроупругого слоя обозначены через $2l_p$ и h_p (здесь и далее индексы «m» и «p» указывают на принадлежность физических и геометрических параметров соответствующему слою). Внутренний электрод пьезоэлемента заземлен, а на внешнем обеспечивается потенциал $V(t)$, значение которого приближает состояние преобразователя к недеформированному. Предполагается также, что толщины электродов и клеявого соединения пренебрежимо малы, длина пьезоэлемента удовлетворяет соотношению $x_0 \leq l_p < l_m$, а граничные условия, область приложения механической нагрузки и расположение пьезокерамического слоя симметричны относительно срединного сечения балки (рис. 1).

В соответствии с рассмотренной в настоящей работе постановкой задачи, функция $p(t)$ является заданной, а $V(t)$ – искомой функцией.

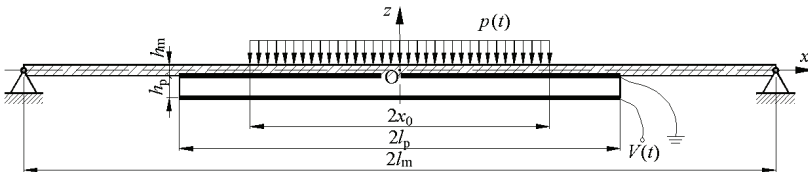


Рисунок 1 – Исследуемая механическая система

2. Уравнения движения биморфа. Используется декартова система координат, ось Oz которой равноудалена от торцов балки и перпендикулярна плоскости контакта слоев, а ось Ox совпадает со срединной поверхностью металлической подложки.

При построении математической модели в качестве кинематической ги-

потезы принимается гипотеза Кирхгофа и также предполагается, что для пьезокерамического слоя справедлива гипотеза о линейном изменении нормальной компоненты напряженности электрического поля по толщине [9, 10]:

$$u^j(x,z,t)=u_0^j(x,t)-z\frac{\partial w^j(x,t)}{\partial x}; \quad w^j(x,z,t)=w^j(x,t), \quad (j=I,II);$$

$$E_z(x,z,t)=\frac{V}{h_p}+\frac{12}{h_p^2}\left(z+\frac{h_m}{2}+\frac{h_p}{2}\right)\Phi(x,t), \quad (1)$$

где u^j и w^j – продольное и нормальное перемещения точек поверхности приведения ($z=0$) на соответствующих участках биморфа: $j=II$ (двухслойный участок) – $0 \leq x \leq l_p$; $j=I$ (однослойный участок) – $l_p < x \leq l_m$; E_z – нормальная составляющая напряженности электрического поля (форма записи для E_z предусматривает равенство нулю потенциала электрического поля на внутреннем электроде); $\Phi(x,t)$ – неизвестная функция.

На основании уравнений состояния упругой среды и поляризованной керамики [11], обобщенного принципа Гамильтона и с учетом принятых ранее гипотез (1), уравнения, описывающие нестационарное деформирование балки в форме прогибов, имеют вид [9]:

$$\frac{\partial^4 w^{II}}{\partial \chi^4} + \frac{\partial^2 w^{II}}{\partial \tau^2} = \gamma_0 p^{II};$$

$$\frac{\partial^4 w^I}{\partial \chi^4} + \xi_0^4 \frac{\partial^2 w^I}{\partial \tau^2} = \psi_0 p^I. \quad (2)$$

Здесь $\chi = x/l_p$; $\tau = t / \sqrt{\rho_F l_p^4 / c_J}$; $\gamma_0 = l_p^4 / c_J$; $\psi_0 = \gamma_0 / \xi_1$;

$\rho_F = \rho_p F_p + \rho_m F_m$; $\xi_1 = c_{11}^m J_{m0} / c_J$; $c_J = c_{11}^p J_p + c_{11}^m J_{m0} + (e_{31}^2 / \epsilon_{33}) J_{p0}$;

$J_p = b(4h_p^3 + 6h_p^2 h_m + 3h_p h_m^2) / 12$; $J_{p0} = b h_p^3 / 12$; $J_{m0} = b h_m^3 / 12$; $F_p = b h_p$; $F_m = b h_m$;

$\xi_0^4 = \rho_m F_m / \rho_F \xi_1$; p^j – механическая нагрузка, действующая на соответствующем участке; ρ , c_{11} – плотности и приведенные модули упругости материалов слоев; e_{31} , ϵ_{33} – пьезомодуль керамики и диэлектрическая проницаемость при нулевой деформации.

Следует подчеркнуть, что выбор поверхности приведения для двухслойного участка совпадающим со срединной поверхностью металлической подложки приводит к более сложным соотношениям между функциями продольного и нормального перемещений. Однако, ввиду симметрии нагружения, типа закрепления упругого слоя и малого влияния продольных перемещений на изгибные колебания биморфа [9], в системе уравнений (2) принято $u_0^j = 0$. Также опущены малые инерционные члены порядка квадрата и куба толщины слоев.

Силовые граничные условия ($M^{\text{II}}|_{\chi=l_0}=M^{\text{I}}|_{\chi=l_0}$; $Q^{\text{II}}|_{\chi=l_0}=Q^{\text{I}}|_{\chi=l_0}$; $M^{\text{I}}|_{\chi=l_1}=0$, где $l_0=1$; $l_1=l_m/l_p$) совместно с кинематическими условиями представляют собой полную систему граничных условий и через функции w^j и V запишутся в виде:

$$\chi=l_0: \quad w^{\text{II}}=w^{\text{I}}; \quad \frac{\partial w^{\text{II}}}{\partial \chi}=\frac{\partial w^{\text{I}}}{\partial \chi}; \quad (3)$$

$$\frac{c_J}{l_p^2} \frac{\partial^2 w^{\text{II}}}{\partial \chi^2} - e_{31} \frac{F_m + F_p}{2} V = \frac{c_{11}^m J_{m0}}{l_p^2} \frac{\partial^2 w^{\text{I}}}{\partial \chi^2}; \quad c_J \frac{\partial^3 w^{\text{II}}}{\partial \chi^3} = c_{11}^m J_{m0} \frac{\partial^3 w^{\text{I}}}{\partial \chi^3};$$

$$\chi=l_1: \quad w^{\text{I}}=0; \quad \frac{\partial^2 w^{\text{I}}}{d\chi^2}=0. \quad (4)$$

Система уравнений (2) и граничные условия (3), (4) дополняются условием управления, которое в настоящей работе определяет равенство нулю интеграла от прогибов балки по ее длине

$$\int_0^{l_1} w(\chi, \tau) d\chi = \int_0^{l_0} w^{\text{II}}(\chi, \tau) d\chi + \int_{l_0}^{l_1} w^{\text{I}}(\chi, \tau) d\chi = 0, \quad (5)$$

что тождественно снижению динамической реакции балки на механическое нагружение.

В случае работы пьезоэлемента в режиме прямого пьезоэффекта на основании вариационного принципа выражение для разности потенциалов между электродами получено в виде

$$V_d(\tau) = \frac{e_{31} h_p (F_m + F_p)}{\varepsilon_{33} 2b l_p^2} \frac{\partial w^{\text{II}}}{\partial \chi} \Big|_{\chi=l_0} \quad (6)$$

и обеспечивает равенство нулю тока смещения через его поверхность.

Начальные условия нулевые (до момента $\tau=0$ биморф находится в состоянии покоя).

Таким образом, уравнения изгибных колебаний (2), краевые условия (3), (4), условие управления (5) или соотношение (6) представляют собой замкнутую систему уравнений колебаний слойно-ступенчатого асимметричного биморфа с высокой сдвиговой жесткостью слоев.

3. Построение решения. Известно, что преобразователи рассматриваемого конструктивного исполнения находят широкое распространение в области низкочастотных колебаний [10], поэтому справедливым будет представление функций поперечных прогибов в виде

$$w^j(\chi, \tau) = w_s^j(\chi, \tau) + w_d^j(\chi, \tau), \quad (j=\text{I, II}), \quad (7)$$

где w_s^j – квазистатические [12] решения (2), удовлетворяющие условию

$$\partial^2 w_s^j / \partial \tau^2 = 0.$$

С учетом (4) и четности функции прогиба w^j решения для w_s^j представим в виде

$$\begin{aligned} w_s^{\text{II}}(\chi, \tau) &= B_2(\tau)\chi^2 + B_0(\tau); \\ w_s^{\text{I}}(\chi, \tau) &= B_3(\tau)(l_1 - |\chi|)^3 + B_1(\tau)(l_1 - |\chi|). \end{aligned} \quad (8)$$

Для отыскания динамических составляющих w_d^j привлекается принцип суперпозиции. В рассматриваемом случае его реализация заключается в задании каждому участку исследуемой слойно-ступенчатой балки граничных условий в виде шарнирного опирания. В результате при записи решений w_d^j применимы разложения по формам свободных колебаний

$$\begin{aligned} w_d^{\text{II}}(\chi, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\tau) \cos(\mu_k \chi), \quad \chi \in [0, l_0]; \\ w_d^{\text{I}}(\chi, \tau) &= 0, \quad \chi \in (l_0, l_1], \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mu_k = (2k-1)\pi/2l_0$; $a_k(\tau)$ – неизвестные коэффициенты разложения. Второе равенство (9) отражает отсутствие механического нагружения на однослойном участке ($p^{\text{I}} = 0$ поскольку $\chi_0 = x_0/l_p \leq l_0$).

Значения коэффициентов $a_k(\tau)$ находятся подстановкой разложения (9) в уравнение (2). Далее с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени и свойства ортогональности тригонометрических функций в пространстве изображений получим трансформанты искомых коэффициентов

$$a_k^{\text{I}}(s) = \gamma_0 \frac{2}{\mu_k} \sin(\mu_k \chi_0) \frac{p^{\text{I}}(s)}{s^2 + \mu_k^4},$$

где s – параметр преобразования; $p^{\text{I}}(s) = L[p]$. С использованием таблиц операционного исчисления в пространстве оригиналов

$$a_k(\tau) = \gamma_0 \frac{2}{\mu_k^3} \sin(\mu_k \chi_0) \int_0^{\tau} p(\zeta) \sin(\mu_k^2(\tau - \zeta)) d\zeta. \quad (10)$$

Неизвестные коэффициенты $B_j(\tau)$ ($j=0,3$) решений (8) и управляющий электрический сигнал $V_c(\tau)$, приложение к пьезоэлементу которого обеспечивает выполнение условия управления (5), определяются из системы уравнений, которая формируется из краевых условий состыковки участков (3) и условия (5). В результате получим

$$\begin{aligned} V_c(\tau) &= \frac{2c_j}{e_{31}(F_m + F_p)l_p^2} (2B_2(\tau) - 6\xi_1 B_3(\tau)(l_1 - l_0)); \\ B_j(\tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\tau) \sin(\mu_k l_0) b_{jk}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $b_{3k} = -\frac{1}{6\xi_1}\mu_k^3$; $b_{2k} = 3\left(\frac{1}{\mu_k} + \mu_k \frac{l_1^2 - l_0^2}{2} - b_{3k} \frac{(l_1 - l_0)^3(5l_1 + 3l_0)}{4}\right) / (l_0(3l_1^2 - l_0^2))$;

$$b_{1k} = 6\left(-\frac{1}{\mu_k} + \mu_k \frac{l_0^2}{3} - b_{3k} \frac{(l_1 - l_0)^2(l_1 + l_0)^2}{4}\right) / (3l_1^2 - l_0^2);$$

$$b_{0k} = b_{3k}(l_1 - l_0)^3 - b_{2k}l_0^2 + b_{1k}(l_1 - l_0).$$

В случае, когда пьезоэлемент выступает в качестве датчика, значения разности потенциалов $V_d(\tau)$ на его электродах определяются выражением

$$V_d(\tau) = \frac{e_{31}h_p(F_m + F_p)}{4l_p^2 b \epsilon_{33}} (2B_2(\tau)l_0 - B_4(\tau)),$$

в котором функции $B_j(\tau)$ определяются разложением (11) с коэффициентами

$$b_{4k} = \mu_k; \quad b_{3k} = \frac{1}{6\xi_1}\mu_k^3; \quad b_{2k} = \frac{\mu_k^3 c_J (l_1 - l_0) - \mu_k \xi_2}{2c_J + 2\xi_2 l_0}; \quad \xi_2 = \frac{e_{31}^2 h_p (F_m + F_p)^2}{4b \epsilon_{33}};$$

$$b_{1k} = \mu_k - 3b_{3k}(l_1 - l_0)^2 - 2b_{2k}l_0; \quad b_{0k} = \mu_k(l_1 - l_0) - 2b_{3k}(l_1 - l_0)^3 - b_{2k}l_0(2l_1 - l_0)$$

и получены на основании равенств (3) и соотношения (6).

Однако в ряде случаев строгое удовлетворение принятому условию управления связано с большими энергетическими затратами на формирование управляющего электрического воздействия. Поэтому альтернативным является подход, согласно которому при управлении деформированным состоянием преобразователя к электродам пьезопривода подводится разность потенциалов

$$V(\tau) = \zeta V_c(\tau) + (1 - \zeta)V_d(\tau), \quad (12)$$

где ζ ($0 \leq \zeta \leq 1$) – весовой коэффициент (при $\zeta = 0$ пьезоэлемент находится в режиме приема, $V(\tau) = V_d(\tau)$; при $\zeta = 1$ на электродах генерируется разность потенциалов $V(\tau) = V_c(\tau)$, обеспечивающая выполнение условия (5)).

Значения функций $B_j(\tau)$ ($j=0,3$) при заданном потенциале (12) на внешнем электроде вычисляются в соответствии с кинематическими и силовыми условиями сопряжения участков балки (3):

$$B_3(\tau) = -\frac{\xi_1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\tau) \mu_k^3 \sin(\mu_k l_0); \quad B_2(\tau) = \frac{e_{31}(F_m + F_p)l_p^2}{4c_J} V(\tau) + 3\xi_1 B_3(\tau)(l_1 - l_0);$$

$$B_1(\tau) = -3B_3(\tau)(l_1 - l_0)^2 - 2B_2(\tau)l_0 + B_4(\tau); \quad B_0(\tau) = B_3(\tau)(l_1 - l_0)^3 - B_2(\tau)l_0^2 + B_1(\tau)(l_1 - l_0).$$

На основании полученных уравнений несложно отыскать как прогиб балки

$$w(\chi, \tau) = w^{\text{II}}(\chi, \tau)H(l_0 - \chi) + w^{\text{I}}(\chi, \tau)[H(|\chi| - l_0) - H(l_1 - |\chi|)],$$

где составляющие w^j определяются соотношениями (7)–(10) и разложением

(11); $H(\chi)$ – функция Хевисайда;

так и другие характеристики, описывающие нестационарные процессы в слойно-ступенчатом биморфе. В частности, для вычисления механического напряжения в управляющем пьезоэлементе используется выражение

$$\sigma_p(\chi, z, \tau) = \frac{c_{11}^p}{l_p} \frac{\partial u^{\text{II}}}{\partial \chi} - e_{31} E_z, \quad z \in \left[\frac{h_m}{2} - h_p; \frac{h_m}{2} \right], \quad (13)$$

для которого справедливы соотношения (1) и полученное на основании вариационного принципа равенство $\Phi(\chi, \tau) = \frac{e_{31} h_p^2}{\varepsilon_{33} 12 l_p^2} \frac{\partial^2 w^{\text{II}}}{\partial \chi^2}$.

4. Численные результаты. Расчеты проводились при фиксированных значениях геометрических и физико-механических параметрах составляющих биморф слоев: металлическая подложка – титан ВТ-6 – $l_m = 50$ мм, $b = 10$ мм, $h_m = 0,5$ мм, $\rho_m = 4500$ кг/м³, $c_{11}^m = 11,3 \cdot 10^{10}$ Н/м²; электроупругий слой – пьезокерамика PZT-5 – $l_p = 25$ мм, $b = 10$ мм, $h_p = 1$ мм, $\rho_p = 7600$ кг/м³, $c_{11}^p = 13,6 \cdot 10^{10}$ Н/м², $e_{31} = -7,9$ Кл/м², $\varepsilon_{33} = 1280 \cdot \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Механическая нагрузка задана в виде $p(\tau) = H(3,81 - \tau)$, а длина области нагружения принята равной $2 \cdot x_0 = 25$ мм ($\chi_0 = 0,5$).

На рис. 2, а представлен отнесенный к l_p/γ_0 прогиб балки в центральной точке ($\chi = 0$) для различных значений ζ , а на рис. 2, б – форма поверхности приведения в момент $\tau = 1,27$.

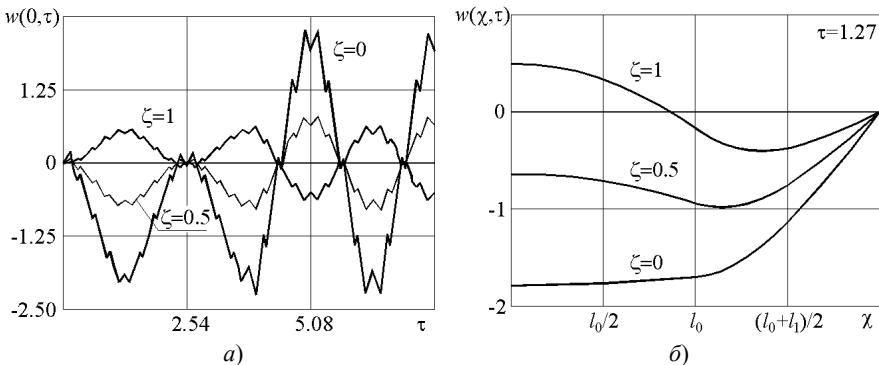


Рисунок 2 – Прогиб биморфа при $p(\tau) = H(3,81 - \tau)$

На рис. 3 изображены результаты решения задачи для различных весовых коэффициентов ζ (12), который определяет уровень удовлетворения условию управления (5). Для $\zeta = 1$ на внешнем покрытии пьезопривода следует обеспечить потенциал $V(\tau) = V_c(\tau)$ (рис. 3). При $\zeta = 0$ пьезоэлемент биморфа

работает в режиме приема и при действии нагрузки $p(\tau) = H(3,81-\tau)$ на его электродах генерируется разность потенциалов $V(\tau) = V_d(\tau)$, значения которой для наглядности увеличены в десять раз. Кривая $\zeta = 0,5$ (рис. 3) отображает альтернативный вариант формирования управляющего электрического сигнала. Отметим, что на этом рисунке значения $V(\tau)$ отнесены к нормирующему коэффициенту $e_{31}h_p(F_m + F_p)/2l_p b \epsilon_{33} \gamma_0$.

Рис. 4 отвечает анализу распределения максимальных значений механического напряжения в пьезоэлементе σ_p по его длине при различных значениях ζ . Расчеты выполнены согласно выражению (13) для момента времени $\tau = 1,27$ при возбуждении биморфа механической нагрузкой $p(\tau) = H(3,81-\tau)$.

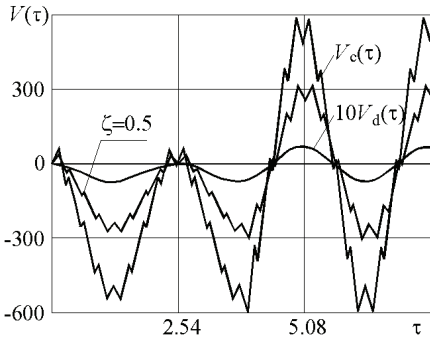


Рисунок 3 – Разность потенциалов на электродах пьезоэлемента

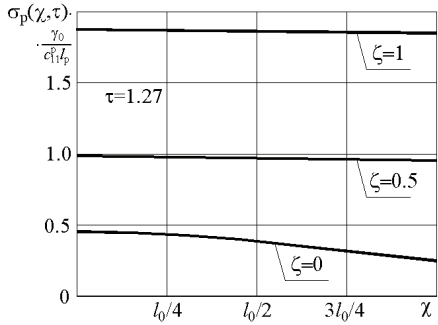


Рисунок 4 – Механическое напряжение в пьезокерамическом слое

Заключение. Представленный графический материал свидетельствует об эффективности изложенной методики формирования управляющего электрического сигнала $V(\tau)$. Полученные результаты были апробированы путем моделирования в программных пакетах, основанных на МКЭ. В общем случае, целевая функция управления может быть задана и в другом виде, например, обеспечивающем неподвижность некоторой точки биморфа. Введение весового коэффициента ζ позволяет количественно оценить возможности управления и в ряде случаев установить компромиссное значение. Незначительная осцилляция на рисунках обусловлена привлечением квазистатической формы решения (8) при скачкообразном характере изменения механического нагружения преобразователя. Применительно к нагрузке, график функции которой лишен разрывов первого рода, указанные осцилляции отсутствуют. В частности, при механическом возбуждении балки синусоидальным сигналом $p(\tau) = \sin(\omega\tau)$. Отметим, что при $\omega = 2\pi/2,54$, что соответствует частоте собственных изгибных колебаний биморфа с разомкнутыми электродами пьезоэлемента, наблюдается нарастание амплитуд $w(0, \tau)$ с ростом τ (рис. 5, а), а на электродах возбуждается разность потенциалов $V_d(\tau)$, норми-

рованный график которой показан на рис. 5, б. Действие электрического сигнала $V(\tau)$ приводит к уменьшению амплитуд прогибов асимметричного биморфа (рис. 5, б).

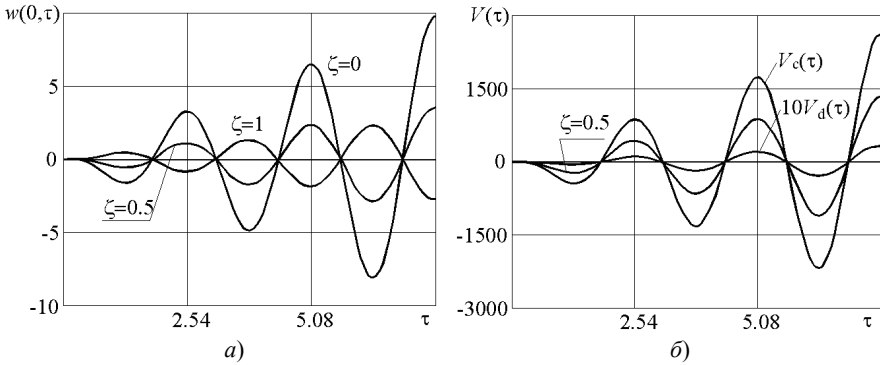


Рисунок 5 – Характеристики НДС биморфа при $p(\tau) = \sin(\omega\tau)$

Список литературы: 1. *Crawley E.F.* Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment. // *AIAA Journal*. – 1994. – № 32. – P. 1689-1699. 2. *Rao S.S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey // *Appl Mech Rev.* – 1994. – № 47. – P. 113-123. 3. *Ray M.C.* Optimal control of laminated plate with piezoelectric sensor and actuator layers // *AIAA Journal*. – 1998. – № 36. – P. 2204-2208. 4. *Baz A., Poh S.* Optimal vibration control with modal positive position feedback // *Optimal Control Applications and Methods*. – 1996. – № 17. – P. 141-149. 5. *Miu D.K.* *Mechatronics: Electromechanics and Contromechanics*. – Springer-Verlag, New York. Morgan Matroc, Inc., 1993. Guide to Modern Piezoelectric Ceramics. Electro Ceramics Division. 6. *Sloss J.M., Bruch Jr J.C., Adali S., Sadek I.S.* Piezoelectric patch control using an integral equation approach // *Thin-Walled Struct.* – 2001. – № 39. – P. 45-63. 7. *Hsu C.Y., Lin C.C., Gaul L.* Vibration and sound radiation controls of beams using layered modal sensors and actuators // *Smart Mater. Struct.* – 1998. – № 7. – P. 446-455. 8. *Бабаев А.Э., Бабаев А.А.* Совместное действие ударной нагрузки и электрического импульса на тонкую биморфную полосу с пьезокерамическим слоем // Thesis of conference repots. Int. conf. DSMSI, Kyiv – 2007. – С. 246. 9. *Бабаев А.Э., Бабаев А.А., Янчевский И.В.* Нестационарные колебания биморфной балки в режимах прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта // *Актуальные проблемы физико-механических исследований. Акустика и волны*. – 2007. – № 3. – С. 16-27. 10. *Евсейчик Ю.Б., Рудницкий С.И., Шаронов В.Л., Шульга Н.А.* Чувствительность биморфного преобразователя типа металл-керамика // *Прикладная механика*. – 1990. – V. 26. № 12. – С. 67-75. 11. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. 5. Электроупругость. – Киев: Наукова думка, 1989. – 280 с. 12. *Wang H.M., Ding H.J., Chen Y.M.* Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems // *Int. J. Sol. and Struct.* – 2005. – № 42. – P. 85-109.

Поступила в редколлегию 16.11.2009