

Я.В.ПАВЛЮК, асп., інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

ДО РОЗРАХУНКУ ОБЕРНЕНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЗУЧОСТІ НЕЛІНІЙНО В'ЯЗКОПРУЖНИХ ПОЛІМЕРІВ ЗА УМОВ ПОВНОГО РОЗВАНТАЖЕННЯ

Розглянуто задачу визначення деформацій повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів у режимі стаціонарного навантаження та повного розвантаження. Розв'язок отримано на підставі гіпотези єдиної діаграми деформування виходячи із подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування. Режими навантаження задаються за допомогою функції Хевісайда. Результати розрахунків апробовано експериментально на задачах розрахунку деформацій нестационарної повзучості нейлону та фторопласту.

The problem of the calculation of creep strains of nonlinearly-viscoelastic materials under stationary loading and full unloading is considered. The solution is obtained based on the hypothesis of the unified deformation diagram proceeding from the similarity of isochronous creep diagrams and a stress-strain diagram. The nonstationary loading regimes are given by the Heviside's function. The calculation results have been approved experimentally on the problems of nonstationary creep strains calculation of nylon and polytetrafluorethylene.

Велика міцність, висока хімічна стійкість, хороша адгезія, мала вага та ряд інших переваг зумовили широке використання полімерних матеріалів у машинобудуванні та авіації, для виготовлення конструктивно складних і відповідальних деталей машин і механізмів, що піддаються тривалій дії змінних навантажень. Експериментально встановлено, що для більшості полімерів при тривалій дії розтягуючих і стискаючих напружень проявляються властивості нелінійного в'язкопружного деформування. Що зумовило інтенсивне дослідження процесів довготривалого деформування так, як воно дозволяє визначати терміни експлуатації, як елементів так і конструкції в цілому.

Для задання залежності між деформаціями, напруженнями і часом широкого поширення отримали теорії повзучості спадкового типу, що дозволяють врахувати історію навантаження [1-4]. Основні складності, що виникають при використанні спадкової теорії, пов'язані із вибором ядра інтегрального рівняння, пошуком відповідної резольвенти та визначення параметрів ядра. На даний час опубліковано багато робіт, присвячених побудові нелінійних моделей спадкового типу. Деякі із цих моделей, а також отримані на їх основі результати обговорюються в [5-8]. Більш перспективною вважається нелінійна модель основне рівняння якої побудоване виходячи із умови подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування, як ізохрони для нульового моменту часу. На основі цієї моделі розв'язується задача із розрахунку деформацій нелінійної повзучості нелінійно в'язкопружних полімерних матеріалів при стаціонарному навантаженні

та повному розвантаженні.

1 Постановка задачі дослідження. Об'єкт дослідження. Визначальне рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності із незалежною від часу не лінійністю задається інтегральним рівнянням [9,10]

$$\varphi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1.1)$$

де $\varepsilon(t)$ – повна деформація, що включає пружну складову ε^e і деформацію повзучості $\varepsilon^c(t)$ в моменти часу t ; $\sigma(t)$ – діюче напруження в моменти часу t ; $\varphi_0(\cdot)$ – функція, що задає діаграму миттєвого деформування, $K(t-\tau)$ – ядро повзучості; λ – реологічний параметр ($\lambda > 0$); t – час спостереження; τ – час, що передує моменту спостереження.

Функція $\varphi_0(\cdot)$ визначає вид нелінійності в (1.1), задається одночленною степеневою апроксимацією

$$\varphi_0(\varepsilon) = \frac{H}{q}(\varepsilon)^q, \quad (1.2)$$

Дробово-експоненційне ядро запропоноване в [2] задається співвідношенням

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.3)$$

для випадку повзучості. Де α і β – параметри дробово-експоненційного ядра причому $-1 < \alpha < 0$, а $\beta > 0$.

Параметри α і β дробово-експоненційного ядра, а також реологічний параметр λ у рівнянні (1.1) визначаються по результатах обробки експериментальних даних на одновісну повзучість при фіксованій температурі і при декількох рівнях постійних напружень. В цьому випадку величина напруження $\sigma(t)$ задається співвідношенням

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k h(t-\tau_k), \quad (1.4)$$

де $h(t-\tau_k)$ – одинична функція Хевісайда ($h(t) = 0$ при $t < \tau_k$ і $h(t) = 1$ при $t \geq \tau_k$), а $\sigma_k = \text{const}$.

В роботі в рамках рівняння (1.1) розв'язується задача із розрахунку деформацій повзучості для нейлонових волокон FM 10001 і фторопласту-4. Результати розрахунку порівнюються з експериментальними даними, запозиченими із [11,12]. Задача включає визначення параметрів дробово-експоненційних ядер спадковості та експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях та при повному розвантаженні.

2 Обґрунтування виду нелінійності вихідної моделі. Інтегральне визначальне рівняння (1.1) встановлює зв'язок між деформацією і напруженням для

нелінійно-в'язкопружних матеріалів із незалежною від часу нелінійністю. Нелінійність процесу повзучості визначається, як видно нелінійністю діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\cdot)$ і впливає із умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування. Єдина ізохронна діаграма відображає подібність ізохронних діаграм повзучості $\varphi(\varepsilon_i(t_j))$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon_i(0))$.

Узагальнена умова подібності ізохронних діаграм повзучості, включаючи і діаграму миттєвого деформування, як ізохрону для моменту часу $t = 0$, записується у вигляді

$$\varphi_0(\varepsilon_i(0)) = [1 + G(t_j)]\varphi_i(\varepsilon_i(t), t_j), \quad (2.1)$$

що задає подібність у площині (φ, ε) для кожного із фіксованих рівнів деформацій $\varepsilon_i(t)$ в інтервалі $i = \overline{1, \ell}$ по параметру t_j . Де $1 + G(t_j)$ ($j = \overline{1, n}$) – функція подібності, що визначається для кожної ізохронної діаграми повзучості; $\varphi_0(\cdot)$, $\varphi_i(\cdot)$ – функції, що задають напруження σ_i по діаграмі миттєвого деформування і по ізохронних діаграмах повзучості для кожного із моментів часу t_j .

Існування єдиної ізохронної діаграми деформування у відповідності із (2.1) може бути обґрунтовано поведінкою вихідних ізохронних діаграм повзучості до діаграми миттєвого деформування за допомогою усередненої функції подібності $\overline{1 + G(t_j)}$. Приведені ізохронні діаграми повзучості показані пунктирними лініями. Вважається, що єдина ізохронна діаграма деформування обґрунтована із похибкою δ , якщо приведені ізохронні діаграми не виходять за межі інтервалу, обмеженого величиною δ по відношенню до діаграми миттєвого деформування. З достатньою для практичних розрахунків точністю величина δ прийнята рівною $\pm 5\%$.

Величина $\overline{1 + G(t_j)}$ визначається із співвідношення

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^{\ell} (\varphi_0(\varepsilon_i, 0)\varphi_i(\varepsilon_i, t_j))}{\sum_{i=1}^{\ell} (\varphi_i(\varepsilon_i, t_j))^2}, \quad (2.2)$$

котре усереднює функцію подібності $1 + G(t_j)$, знайдене для кожної j -ї ізохронної діаграми повзучості, і дозволяє розраховувати дискретні значення функції подібності і відповідно дискретні значення приведених ізохронних діаграм повзучості.

Існування єдиної ізохронної діаграми деформування підтверджується на рис. 1 для нейлонових волокон FM 10001(а) і фторопласту-4 (б). Вихідні ізохронні діаграми повзучості задані квадратами, товстими суцільним лініями показані діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon)$. Приведені до діаграми миттєвого деформування (товста суцільна лінія) за допомогою усередненої функції подібності (2.2) вихідні ізохронні діаграми повзучості не виходять, як видно за межі інтервалу, обмеженого величиною похибки $\delta = \pm 5\%$ (штрихові лінії). Дискретні значення вихідних і приведених ізохронних діаграм

рам повзучості нанесені квадратиками. Для нейлонових волокон FM 10001(а) точки відповідають моментам часу $t_j = 1,5$ (□), 36 (■), 105 (▣), 340 (▤), 840 (▥), 960 (▧) годин, для фторопласту-4 (б) точки відповідають моментам часу $t_j = 234$ (□), 1849 (■), 4362 (▣), 6517 (▤), 8491 (▥), 10646 (▧), 13518 (▨) хвилин.

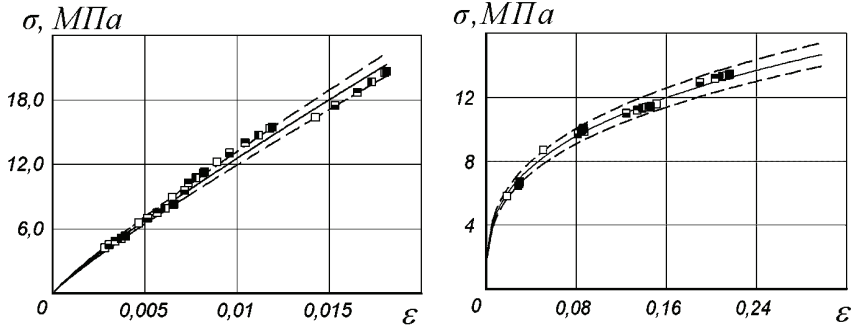


Рисунок 1

3 Визначення параметрів ядра. В роботі невідомі параметри α , β і λ визначаються із даних отриманих із умови існування єдиної ізохронної діаграми миттєвого деформування і представлених у вигляді усередненої функції подібності $\overline{1 + G(t_j)}$.

В якості критерію найкращого узгодження функції подібності (2.2) із експериментальними даними використовується умова мінімізації квадратичного відхилення розрахункових даних із експериментальними даними усередненої функції подібності $(\overline{1 + G(t_j)})_{\text{exp}}$. Задача зводиться до знаходження мінімуму функціоналу

$$F(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N \left\{ \overline{(1 + G(t_j))_{\text{exp}}} - \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha)]} \right] \right\}^2. \quad (3.1)$$

Мінімізація функціоналу (3.1) здійснюється із використанням ітераційного методу Лівенберга-Маркардта [13]. Значення знайдених таким чином параметрів α , β і λ для досліджуваних матеріалів приведені в табл. 1. Також тут приведені значення коефіцієнтів q і H у рівнянні (1.2), що задає діаграму миттєвого деформування $\varphi_0(\cdot)$

Таблиця 1

В'язкопружні матеріали	Параметри ядра			Параметри діаграми миттєвого деформування	
	α	β , год ^{-(1+α)}	λ , год ^{-(1+α)}	H , МПа	q
Нейлон FM 10001	-0,815	-0,127	0,254	665,24	0,8878
фторопласт-4	-0,703	-0,13	0,062	21,806	0,3264

4 Повзучість при постійних напруженнях. Найпростіша перевірка застосування дробово-експоненційного ядра (1.3) і параметрів ядра знайдених по значеннях усередненої функції подібності для розв'язку задач нелінійної теорії в'язкопружності може бути здійснена на прикладі розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях.

Умова навантаження постійними у часі напруженнями при варіюванні величини напруження σ_k задається співвідношенням

$$\sigma(t) = \sigma_k h(t) \quad (k = \overline{1, m}), \quad (4.1)$$

де $h(t)$ – одинична функція Хевісайда ($h(t) = 0$ при $t < 0$ і $h(t) = 1$ при $t > 0$), $\sigma_k = \text{const}$.

Розв'язавши рівняння (1.1) із врахуванням (1.2) і (4.1) відносно $\varepsilon(t)$, підставляючи ядро повзучості (1.3), отримуємо рівняння

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{q\sigma_k}{H} \right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (4.2)$$

де прийнято, що $\tau = 0$, $t - \tau = t$, а $h(0) = 1$.

Значення деформацій повзучості $\varepsilon(t)$ нелінійно в'язкопружних матеріалів розрахованих по рівнянню (4.2) із використанням значень параметрів α , β і λ , приведених у табл. 1, співставлені на рис. 2 із експериментальними даними для нейлонових волокон (а) і фторопласту-4 (б). Результати розрахунку нанесені штриховими лініями, а експериментальні дані показані точками. Експериментальні значення повзучості для нейлонових волокон FM 10001 отримані із даних випробувань на повзучість при напруженнях $\sigma_k = 3,2$ (○), 4,96 (⊖), 6,7 (⊙), 9,27 (⊕), 12,41 (●) МПа і для при напруженнях $\sigma_k = 3,2$ (○), 4,96 (⊖), 6,7 (⊙), 9,27 (⊕), 12,41 (●) МПа і для фторопласту – 4 – при напруженнях $\sigma_k = 5$ (○), 7,5 (⊖), 8,5 (⊙), 10 (●).

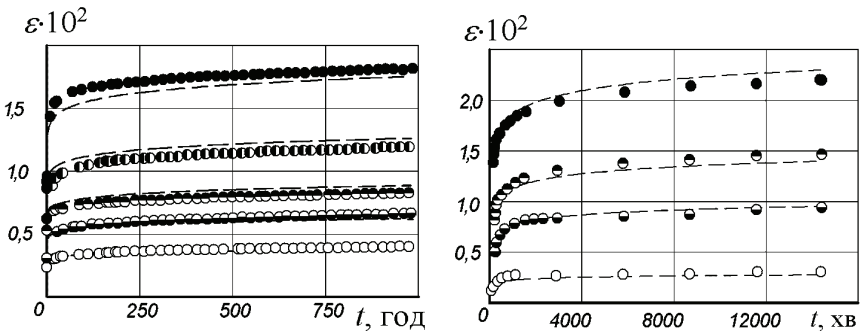


Рисунок 2

Експериментальні дані запозичені із [11] і [12]. Максимальна похибка між результатами розрахунку і експериментальними даними склала 7,5 % і

отримана для нейлонових волокон FM 10001.

6 Зворотня повзучість при повному розвантаженні. Процес зворотньої повзучості пов'язаний із зменшенням у часі деформацій повзучості, накопиченої до моменту розвантаження.

Умова навантаження (1.4) при реалізації режиму повного розвантаження записується у вигляді

$$\sigma(t) = \sigma_1 h(t) - \sigma_1 h(t - t_1), \quad (6.1)$$

де σ_1 – напруження, прикладене в момент часу $\tau = 0$; t_1 – момент повного розвантаження, $h(\cdot)$ – функція Хевісайда.

Розв'язуючи рівняння (1.1) із врахуванням (1.2) і (6.1) відносно $\varepsilon(t)$, підставляючи ядро повзучості (1.3), отримуємо рівняння

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{q\sigma_1 h(t)}{H} \left\{ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right\} - \frac{q\sigma_1 h(t-t_1)}{H} \left\{ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right\} \right]^{1/q}, \quad (6.2)$$

де всі позначення співпадають із прийнятими в (1.1), (1.3), (6.1).

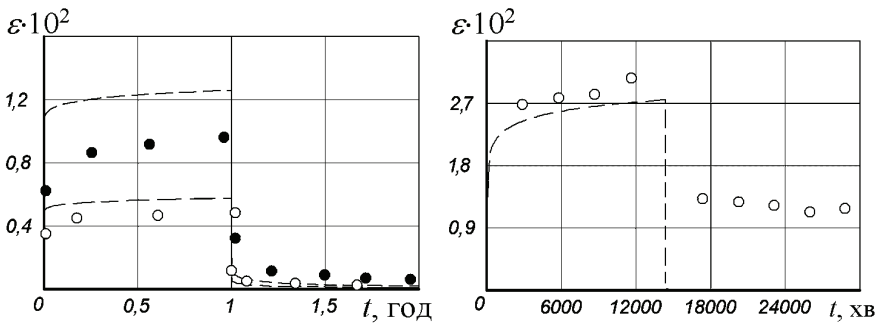


Рисунок 3

Таблиця 2

В'язкопружні матеріали	Параметри ядра			Параметри діаграми миттєвого деформування	
	α	$\beta, \text{ год}^{-(1+\alpha)}$	$\lambda, \text{ год}^{-(1+\alpha)}$	H, МПа	q
Нейлон FM 10001	-0,999	-1,007	0,146	954,58	0,8678

Значення деформацій зворотньої повзучості $\varepsilon(t)$, розрахованих по рівнянню (6.2) із використанням параметрів ядра (1.3), приведених в табл. 1, співставлені на рис. 3 для нейлонових волокон FM 10001 (а) і для фтороплас-

ту – 4 (б). Режим навантаження для нейлонових волокон FM 10001 включав навантаження із початковим напруженням $\sigma_1 = 6,2$ (○) і $12,4$ (●) МПа і повне розвантаження в момент часу $t_1 = 1$ година, а для фторопласту – 4 початковим напруженням $\sigma_1 = 5$ МПа (○) (б) і повне розвантаження в момент часу $t_1 = 14400$ хвилин. Значне розходження експериментальних даних із розрахунковими для нейлонових волокон FM 10001 пов'язані із тим, що експеримент на розвантаження проводився на іншому обладнанні ніж базовий експеримент на повзучість. Тому для перевірки доцільності застосування нелінійної моделі для розрахунку деформацій повзучості при повному розвантаженні параметри для моделі визначались по кривих повзучості із експерименту на розвантаження. В табл. 2 представлені значення параметрів ядра та параметрів діаграми q і N . На рис. 4 представлено співставлення результатів розрахунку деформацій зворотної повзучості із експериментальними даними. У випадку фторопласту, як видно із рис. 3, результати розрахунків не узгоджуються. Це може пояснюватись тим, що матеріал є неповністю в'язкопружним. Після розвантаження виникають залишкові деформації, котрі нелінійною моделлю (1.1) не враховуються.

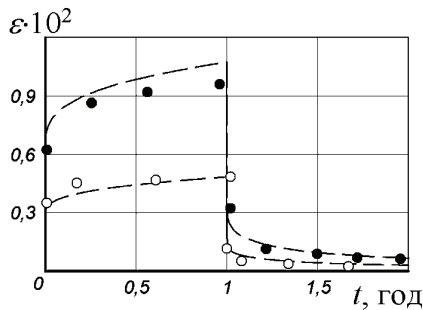


Рисунок 4

Висновки. Як видно із результатів розрахунку на рис. 2 отримано задовільне узгодження експериментальних даних із розрахунковими. Що підтверджує доцільність застосування нелінійної моделі, яка будується на підставі гіпотези єдиної діаграми деформування виходячи із подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування, для розрахунку деформацій повзучості при стаціонарному навантаженні та при повному розвантаженні. Найбільша похибка була отримана для фторопласту – 4 в режимі повного розвантаження. Значна похибка зумовлена тим, що матеріал не є повністю в'язкопружним, а відповідно після розвантаження в нього виникають залишкові деформації, тому при прогнозуванні процесів довготривалого деформування при нестационарних режимах навантаження, крім базового експерименту на повзучість потрібно проводити експеримент на повне розвантаження для визначення, чи є він повністю в'язкопружним.

Список літератури: 1. *Кристенсен Р.М.* Введение в теорию вязкоупругости: пер. с англ. под ред. Г.С.Шапиро. – М.: Мир, 1974. – 340 с. 2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с. 3. *Golub V.P., Romanov A.V., Romanova N.V.* Nonlinear creep and ductile creep rupture of perfectly elastoplastic rods under tension // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 459-470. 4. *Khoroshun L.P.* Fundamentals of viscoelastoplasticity and hardening theory revisited // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44, № 2. – P. 121-134. 5. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* К вопросу о нелинейной теории вязкоупругости // В сб.: Прочность и пластичность. – М.: Наука, 1971. – С. 270-276. 6. *Каминский А.А., Гаврилов Г.В.* Механика разрушения полимеров. – К.: Наукова думка, 1988. – 224 с. 7. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 278 с. 8. *Колтунов М.А., Николаевский А.С.* К вопросу исследования одномерной задачи нелинейной ползучести // *Механика полимеров*. – 1966. – № 5. – С. 678-687. 9. *Голуб В.П.* Длительная нелинейная ползучесть вязкоупругих волокнистых однонаправленных композитов при растяжении // *Вісн. Донец. ун-ту. Серія А, Природ. науки*. – 2006. – Вип. 1, ч. 1. – С. 97-101. 10. *Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В.* Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования // *Прикладная механика*. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 20-34. 11. *Marin J., Webber A.C., Weissmann G.F.* Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion // *Proc. ASTM*. – 1954. – Vol. 54. – P. 1313-1343. 12. *Павлов П.А., Кондакова О.Н., Белан-Гайко В.Н.* Ползучесть полиэтилена при плоском напряженном состоянии в условиях нестационарного нагружения // *Механика композитных материалов*. – 1980. – № 5. – С. 793-801. 13. *J.J. More, B.S. Garbow, K.E. Hillstrom, More J.J.* Users guide to minipack // *Argonne National Laboratory Publication ANL-80-74*. – 1980. – 238 p.

Надійшла до редколегії 18.11.2009