

В.П.ОЛЬШАНСЬКИЙ, докт.фіз.-мат.наук, проф., ХНТУСГ;
С.В.ОЛЬШАНСЬКИЙ, асп., НТУ «ХП»

ПРО ШВИДКІСТЬ ПАДІННЯ КУЛІ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ ТА ЗМІНЮЄ МАСУ ЗА ПОКАЗНИКОВИМ ЗАКОНОМ

Знайдена розв'язка рівняння падіння однорідної кулі змінного радіусу із вертикальною віссю обертання з урахуванням лінійного опору зовнішнього середовища. При показовому законі зміни радіусу кулі в часі перші інтеграли рівнянь руху виражені в елементарних і відомих спеціальних функціях, а також досліджені особливості швидкості польоту при дії сили Магнуса.

The equations of fall of a homogeneous sphere of variable radius with a vertical axis of rotation are solved in view of linear resistance of external environment. At the indicative law of change radius of a sphere in time the first integrals of the equations of motion are expressed in elementary and known special functions, and also the features of velocity of flight are investigated at action of Magnus force.

Актуальність теми та постановка задачі. Рух тіл змінної маси, окрім ракетодинаміки, має місце в різноманітних технологічних процесах. Це політ часток рідких та твердих палив, що згорають [1,2], рух крапель диспергованих вогнегасних рідин, які випаровуються у високотемпературному середовищі [3], падіння коагулюючих часток в атмосфері [4,5]. Тому вивчення балістичних властивостей тіл, які зменшують або збільшують свої розміри і масу при польоті, є актуальною задачею, на що в свій час звертав увагу І.В.Мещерский [6]. Обертання тіл при польоті їх у газовому чи рідинному середовищі супроводжується дією сили Магнуса [7]. Ця сила викривляє траєкторію руху. Тому частка, що обертається, не може в загальному випадку рухатися прямолінійно навіть при падінні її в гравітаційному полі. Від дії сили Магнуса залежить швидкість руху. Її вплив на процес польоту досліджено переважно для тіла сталих розмірів і маси [8]. Менш вивченим залишається вплив названої сили на рух тіл змінних розмірів, чим змотивована мета цього дослідження.

Метою дослідження є вивчення впливу сили Магнуса на кінематичні характеристики польоту однорідної сферичної частки змінного радіусу в часі.

Розв'яжемо задачу з урахування сил лінійного опору зовнішнього середовища. Такій підхід дозволяє знайти аналітичні розв'язки, які з прийнятною точністю моделюють рух сферичних тіл, які швидко обертаються, в нерухомому газовому середовищі.

Вісь обертання сферичного тіла вважаємо вертикальною та спрямованою проти вісі **OZ** координатної системи, що показана на рис. 1.

За вказаної орієнтації вісі обертання проекції сили Магнуса на вісі координат можна обчислити за формулами

$$F_{mx} = \frac{8\pi}{3} \delta r^3 \omega \dot{y}; \quad F_{my} = -\frac{8\pi}{3} \delta r^3 \omega \dot{x}; \quad F_{mz} = 0,$$

де δ – питома маса газового середовища; ω – кутова швидкість обертання кулі радіуса $r = r(t)$; t – час; \dot{x}, \dot{y} – проекції лінійної швидкості руху центру мас кулі на вісі ox і oy відповідно.

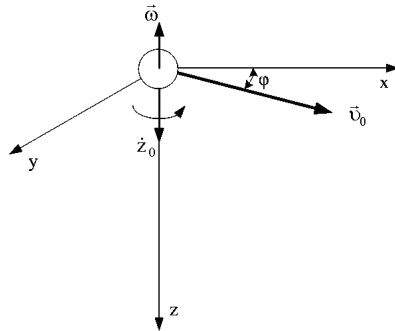


Рисунок 1 – Розрахункова схема

З урахуванням лінійного опору середовища, в однорідному полі гравітації, рух тіла маси $m = m(t)$ описується рівняннями

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{mx} - \mu\dot{x}\dot{m} - k\pi r^2 \dot{x}; \\ m\ddot{y} &= F_{my} - \mu\dot{y}\dot{m} - k\pi r^2 \dot{y}; \\ m\ddot{z} &= F_{mz} - \mu\dot{z}\dot{m} - k\pi r^2 \dot{z} + mg. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут коефіцієнт $0 < \mu < 1$, корегує величину реактивної сили, зумовленої зростанням маси; g – прискорення вільного падіння; k – коефіцієнт лінійного опору середовища; крапка над символом означає похідну за часом t .

Зростання радіуса кулі підпорядковуємо експонентній залежності

$$r = r(t) = r_0 \exp(\lambda t), \quad (2)$$

в якій $r_0 = r(0)$; стала $\lambda > 0$ – характеризує темп зростання.

Оскільки маса однорідної кулі, у якої питома маса ρ , пропорційна кубу радіуса

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho r^3,$$

то на підставі (2)

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = 3 \frac{\dot{r}}{r} = 3\lambda. \quad (3)$$

З урахуванням (3) і проекції сили Магнуса рівняння руху (1) набувають вигляду

$$\ddot{x} = \frac{2\delta\omega(t)}{\rho} \dot{y} - 3\mu\lambda\dot{x} - \frac{\alpha}{r} \dot{x},$$

$$\ddot{y} = -\frac{2\delta\omega(t)}{\rho}\dot{x} - 3\mu\lambda\dot{y} - \frac{\alpha}{r}\dot{y}, \quad (4)$$

$$\ddot{z} = g - 3\mu\lambda\dot{z} - \frac{\alpha}{r}\dot{z},$$

де $\alpha = \frac{3k}{4\rho}$.

Підкреслимо, що доданки з множником ω визначають дію сили Магнуса, з множником μ – дію реактивної сили, а з множником α – дію сили лінійного опору середовища.

Рівняння (4) будемо розв'язувати при початкових умовах:

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos \varphi; \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \varphi; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0; \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0. \quad (5)$$

де \bar{v}_0 – проекція стартової швидкості центру мас кулі на горизонтальну площину; φ – кут, який ця проекція складає з віссю ox ; \dot{z}_0 – проекція стартової швидкості на вертикальну вісь.

Дослідження руху кулі, маса якої зростає. Для знаходження першого інтегралу третього рівняння системи (4) введемо нову змінну $u = \dot{z}(t)$. Тоді рівняння для вертикальної проекції швидкості набуває вигляду

$$\dot{u} + \left(3\mu\lambda + \frac{\alpha}{r_0} e^{-\lambda t} \right) u = g. \quad (6)$$

Його окремим розв'язком, при початковій умові (5), є вираз

$$\dot{z}(t) = \exp\{p[\exp(-\lambda t) - 1] - 3\mu\lambda t\} \times \left\{ \dot{z}_0 + \frac{g}{\lambda} p^{3\mu} \exp(p) \left[\Gamma(-3\mu, pe^{-\lambda t}) - \Gamma(-3\mu, p) \right] \right\}, \quad (7)$$

де $p = \frac{\alpha}{r_0\lambda}$, $\Gamma(-3\mu, pe^{-\lambda t})$ – неповна Гамма-функція.

Розглянемо окремі випадки:

1) Коли $\mu = 0$, то

$$\dot{z}(t) = \exp\{p[\exp(-\lambda t) - 1]\} \left\{ \dot{z}_0 + \frac{g}{\lambda} \exp(p) \left[Ei(-p) - Ei(-pe^{-\lambda t}) \right] \right\},$$

тобто вертикальна проекція швидкості виражається через інтегральну показникову функцію.

2) Якщо $\alpha \rightarrow 0$, $p \rightarrow 0$ то

$$\Gamma(-3\mu, pe^{-\lambda t}) - \Gamma(-3\mu, p) \sim \frac{p^{-3\mu}}{3\mu} (e^{3\mu\lambda t} - 1)$$

і замість (7) маємо

$$\dot{z}(t) = \left(\dot{z}_0 - \frac{g}{3\mu\lambda} \right) \exp(-3\mu\lambda t) + \frac{g}{3\mu\lambda}.$$

У цьому випадку легко обчислити вертикальне переміщення центру мас, бо

$$z(t) = \frac{1}{3\mu\lambda} \left(\dot{z}_0 - \frac{g}{3\mu\lambda} \right) [1 - \exp(-3\mu\lambda t)] + \frac{gt}{3\mu\lambda}.$$

Загальний розв'язок перших двох рівнянь системи (4) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta); \\ \dot{y} &= f(c_1 \cos \theta - c_2 \sin \theta), \end{aligned} \quad (8)$$

де $f(t)$, $\theta(t)$ – невідомі функції часу; c_1 , c_2 – довільні сталі.

Підставивши вирази (8) у систему (4), після прирівнювання відповідних доданків, одержуємо рівняння

$$\dot{f} = -\frac{3\mu\dot{r} + \alpha}{r(t)} f; \quad \dot{\theta} = \frac{2\delta}{\rho} \omega. \quad (9)$$

Інтегрування рівнянь (9) приводить до квадратур

$$f = \exp\left(-\int \frac{3\mu\dot{r}(t) + \alpha}{r(t)} dt\right); \quad \theta = \frac{2\delta}{\rho} \int \omega(t) dt. \quad (10)$$

Для знаходження $\omega(t)$, без урахування опору середовища обертанню кулі, скористаємось законом збереження кінетичного моменту у вигляді

$$r^5 \dot{\omega} + 5r^4 \dot{r} \omega = 0. \quad (11)$$

Тут $0 < \nu < 1$ корегує величину реактивного моменту, зумовленого збільшенням радіуса кулі.

Із (2) і (11) випливає, що

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -5\lambda. \quad (12)$$

Тому

$$\omega(t) = \omega_0 \exp(-5\nu\lambda t), \quad (13)$$

де ω_0 – початкова швидкість обертання кулі.

Знайшовши інтеграли (10), маємо вирази для проєкцій швидкості

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= e^{\phi} [c_1 \sin(\theta) + c_2 \cos(\theta)]; \\ \dot{y}(t) &= e^{\phi} [c_1 \cos(\theta) - c_2 \sin(\theta)], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{у яких } \phi = \frac{\alpha}{r_0\lambda} e^{-\lambda t} - 3\mu\lambda t, \quad \theta = -\frac{2}{5} \frac{\delta\omega_0}{\rho\nu\lambda} e^{-5\nu\lambda t}. \quad (15)$$

Константи інтегрування c_1 та c_2 знаходимо з початкових умов (5)

$$c_1 = \frac{v_0}{e^{\phi_0}} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta_0} - \cos(\varphi + \theta_0) \operatorname{ctg} \theta_0 \right), \quad c_2 = \frac{v_0}{e^{\phi_0}} \cos(\varphi + \theta_0).$$

$$\text{Тут } \phi_0 = \frac{\alpha}{r_0 \lambda}, \quad \theta_0 = -\frac{2}{5} \frac{\delta \omega_0}{\rho v \lambda}.$$

Якщо врахувати опір, який чинить середовище обертанню кулі, то кутову швидкість доводиться знаходити інтегруванням рівняння

$$\frac{\rho r^2}{15} \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{3} \rho r v \frac{dr}{dt} \omega + \mu_b \omega = 0,$$

у якому μ_b – коефіцієнт динамічної в'язкості повітря або газу, в якому обертається тіло.

Із нього при $r = r_0 \exp(\lambda t)$; $\omega(0) = \omega_0$ випливає, що

$$\omega(t) = \omega_0 \exp(-q) \exp(-5v\lambda t) \exp[q \exp(-2\lambda t)], \quad (16)$$

$$\text{де } q = \frac{15\mu_b}{2\rho\lambda r_0^2}.$$

При такій зміні кутової швидкості маємо

$$\theta(t) = -\frac{2\delta\omega_0 \exp(-q)}{5v\lambda\rho} \exp(-5v\lambda t) \Phi\left(\frac{5v}{2}; \frac{5v}{2} + 1; q \exp(-2\lambda t)\right). \quad (17)$$

Значення $\theta(t)$ залежить від значень виродженої гіпергеометричної функції.

Оскільки

$$\exp(0) = 1; \quad \Phi\left(\frac{5v}{2}; \frac{5v}{2} + 1; 0\right) = 1,$$

то при $\mu_b = 0$ ($q = 0$) вираз (16) переходить в (13), а вираз (17) – в (15).

Результати розрахунків та їх аналіз. Вивчимо вплив коефіцієнту λ , який характеризує швидкість збільшення маси, на проекції швидкості руху центру мас тіла за теорію, де враховується опір обертанню кулі. Для цього приймаємо такі вихідні дані $r_0 = 0,002$ м; $\rho = 1000$ кг/м³; $\delta = 1$ кг/м³; $\varphi = 45^\circ$; $\omega_0 = 3000$ с⁻¹; $v_0 = 5$ м/с; $\dot{z}_0 = 5$ м/с; $\mu = 0,5$; $\mu_b = 1,85 \cdot 10^{-5}$ Па · с; $v = 0,3$ та різні α і λ .

На рис. 2 та 3 зображені залежності від часу проекцій швидкості центру мас кулі, отримані при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с відповідно. Цифрам 1, 2, 3, 4, 5 відповідають значення $\lambda = 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5$ с⁻¹. При більшій інтенсивності зростання радіуса (маси) кулі маємо більше спадання швидкості руху її центру мас. Внаслідок подвійного збільшення аеродинамічного опору ($\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с, рис. 3) спостерігається зменшення проекцій швидкості руху, що відповідає фізичному протіканню процесу.

Внаслідок зростання радіуса кулі, що обертається, швидкість руху її центру мас має екстремум (мінімум) (рис. 4). Для швидкості руху тіла зростаючих розмірів без врахування дії сили Магнуса цей ефект було описано раніше в [9].

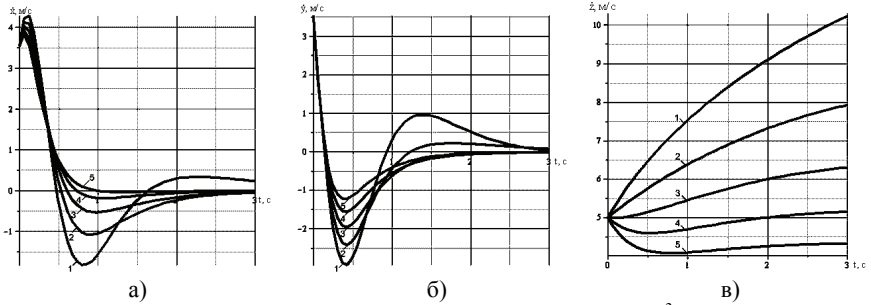


Рисунок 2 – Залежність проєкцій швидкості від часу при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та різних $\lambda > 0$

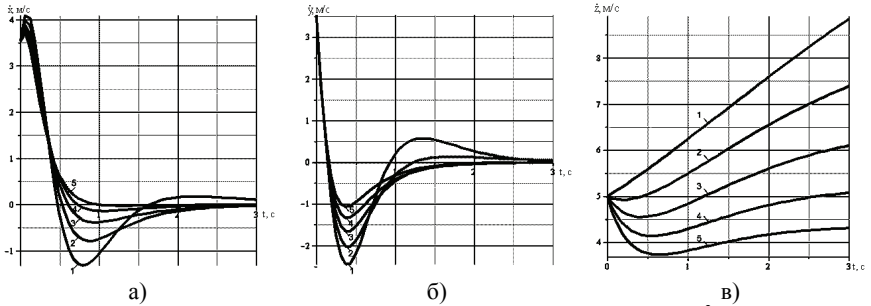


Рисунок 3 – Залежність проєкцій швидкості від часу при $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с та різних $\lambda > 0$

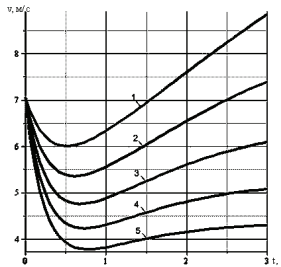


Рисунок 4 – Залежність швидкості руху від часу при $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с та різних $\lambda > 0$

Дослідження руху кулі, маса якої зменшується. При зменшенні радіуса та маси приймаємо залежність

$$r = r(t) = r_0 \exp(-\lambda t).$$

В такому випадку маємо такі ж розв'язки, як і в попередньому пункті, тільки в них зміниться знак перед λ .

Результати розрахунків та їх аналіз. Вивчимо вплив коефіцієнту, який характеризує інтенсивність зменшення маси λ на проєкції швидкості руху

центру мас тіла за теорію, де враховується опір обертанню кулі. Для цього приймаємо такі вихідні дані: $r_0 = 0,002$ м; $\rho = 1000$ кг/м³; $\delta = 1$ кг/м³; $\varphi = 45^\circ$; $\omega_0 = 3000$ с⁻¹; $v_0 = 5$ м/с; $\dot{z}_0 = 5$ м/с; $\mu = 0,5$; $\mu_b = 1,85 \cdot 10^{-5}$ Па · с; $\nu = 0,3$ та різні α і λ .

На рис. 5 та 6 зображено залежності від часу проєкцій швидкості центру мас кулі, отримані при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с відповідно. Цифри 1, 2, 3, 4, 5 відповідають значенням $\lambda = 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5$ с⁻¹. Подвійне збільшення аеродинамічного опору ($\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с, рис. 5) привело до зменшення проєкцій швидкості руху, що відповідає фізичному протіканню процесу.

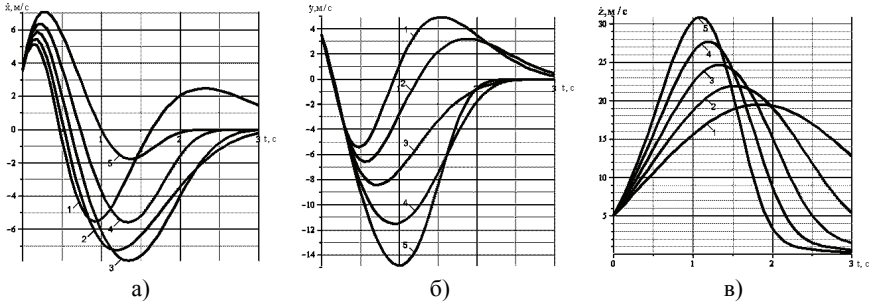


Рисунок 5 – Залежність проєкцій швидкості від часу при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та різних $\lambda < 0$

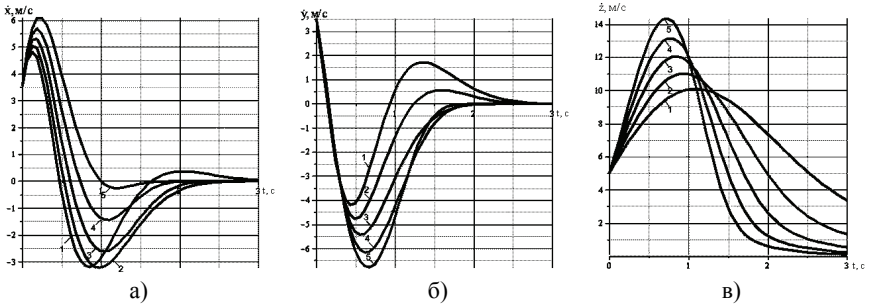


Рисунок 6 – Залежність проєкцій швидкості від часу при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та різних λ

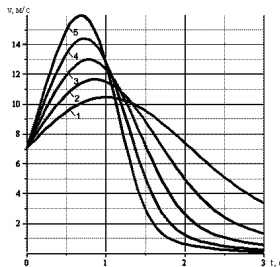


Рисунок 7 – Залежність швидкості руху від часу при $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с та різних λ

На відміну від випадку зростання радіуса, швидкість руху центру мас кулі, що зменшує радіус, має максимум, а не мінімум [10]. Це відображено графіками на рис. 7.

Висновки. При експонентному законі збільшення радіуса кулі в часі та обертанні її навколо вертикальної осі, з урахування сили лінійного опору середовища, перші інтеграли рівнянь руху виражаються через елементарні та відомі спеціальні функції. Сила Магнуса викривляє траєкторію падіння кулі в просторову лінію, але не змінює екстремальних властивостей швидкості падіння.

Список літератури: 1. *Воинов А.Н.* Сгорание в быстроходных поршневых двигателях. – М.: Машиностроение, 1977. – 277 с. 2. *Абрамчук Ф.И., Марченко А.П., Разлейцев Н.Ф. и др.* Современные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности. – Киев: Техника, 1992. – 272 с. 3. *Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тищенко Л.М.* Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – 304 с. 4. *Матвеев Л.Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеоздат, 1965. – 751 с. 5. *Хргиан А.Х.* Физика атмосферы. – Л., Гидрометеоздат, 1969. – 320 с. 6. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 7. *Прандтль Л.* Эффект Магнуса и ветряной корабль // Успехи физических наук. – 1925. – Т. V, вып. 1-2. – С. 1-27. 8. *Сагитов М.Н.* О движении вращающегося шара постоянной и переменной массы: автореферат дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.01 «Теоретическая механика». – Алма-Ата, 1965. – 14 с. 9. *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Об экстремумах скорости падения сферического тела переменной массы // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – Вып. 22. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – С. 147-152. 10. *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* О максимуме скорости при вертикальном падении однородного шара с показательным законом изменения радиуса // Инженерно-физический журнал. – 2009. – Т. 82. № 4. – С. 732-736.

Надійшла до редколегії 18.10.2009