

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, асп., НТУ «ХПИ»

К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Використовуючи аналогію течій вібророзрідженої зернової суміші та в'язкої рідини, отримано формули для розрахунку коливань швидкості шару зерна на нахиленому решеті з урахуванням нелінійної зміни кінематичного коефіцієнта вібров'язкості суміші то товщини шару. Отримано аналітичний розв'язок граничної задачі гідродинаміки в елементарних функціях. Приведено чисельні приклади.

Using analogy of currents vibroliquefaction of a grain mix and viscous liquid, the formulas for account fluctuations of velocity of motion a layer of grain on the inclined sieve are received in view of nonlinear change of a kinematical factor vibroviscosity of a mix on thickness of a layer. The analytical solution of a regional problem of hydrodynamics in elementary functions is received. The numerical examples are given.

Постановка проблемы. Вибрации интенсифицируют сепарирование зерна. Для адекватного моделирования процесса разделения зернового материала на фракции виброрешетом важно знать как далеко передаются вибрации от решета в слой смеси и как они влияют на неравномерность потока сыпучей среды. Для изучения распространения вибраций вглубь зерновой массы используют различные теоретические модели. Достаточно известно направление, где движение зерновой смеси в условиях вибраций описывают уравнениями течения однородной вязкой жидкости. Дальнейшее развитие этого направления видится в переходе к уравнениям динамики неоднородной жидкости. Ведь эксперименты показывают, что вибровязкость псевдооживленной зерновой смеси возрастает с удалением от свободной поверхности слоя. Поэтому, разрабатывая уточненные модели движения смеси по виброрешету, желательно учитывать изменение вибровязкости по толщине движущегося слоя. Итак, в рамках выделенного выше направления моделирования, возникает проблема получения и анализа решений динамических краевых задач течения неоднородной вязкой жидкости, которые описывают поток слоя зерна по виброрешету.

Краткий анализ последних публикаций. Из работ, в которых определение скорости движения слоя зерна по виброрешету, сводится к расчету течения неоднородной вязкой жидкости, отметим [1], [2]. В [2] изменение вибровязкости по толщине псевдооживленного слоя аппроксимируется линейной функцией поперечной координаты. Решение краевой задачи о колебаниях скорости движения зерна, вызванных продольными вибрациями решета в его плоскости, представлено с помощью затабулированных функций Кельвина.

Но использованная аппроксимация кинематического коэффициента вибровязкости не учитывает нелинейного изменения его от декартовой координаты, что наблюдается в экспериментах [3], [4]. К тому же, согласно принятой аппроксимации, вибровязкость смеси у свободной поверхности равна нулю, что не согласуется с конечной дисперсностью зерновой массы. Поэтому здесь, вместо линейного, предлагается вариант квадратичного (нелинейного) изменения вибровязкости по толщине слоя с отличной от нуля вибровязкостью у свободной поверхности.

Целью работы является получение и апробация расчетами формул для определения колебаний скорости движения зернового слоя по наклонному плоскому решетку, когда изменение вибровязкости смеси по толщине слоя подчиняется нелинейной (квадратичной) зависимости.

Основная часть работы. По аналогии с публикацией [2] колебания скорости потока зерновой смеси по решетку в установившемся режиме работы определим, решив дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[v(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u(h) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2) $u = u(y, t)$ – скорость потока слоя зерна вдоль решета, зависящая от декартовой координаты y и времени t ; $v(y)$ – коэффициент кинематической вибровязкости, зависящий от y ; g – ускорение свободного падения; θ – угол наклона решета к горизонту, показанный на рис. 1; h – толщина движущегося слоя; A^* , ω – амплитуда и круговая частота продольных колебаний решета в его плоскости.

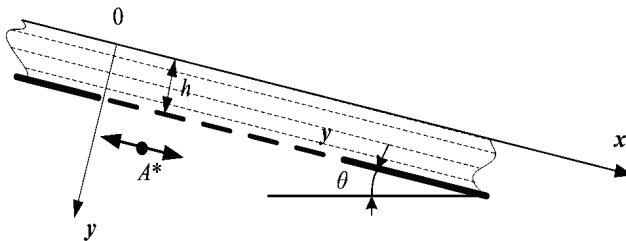


Рисунок 1 – Расчетная схема

Изменение вибровязкости по координате y аппроксимируем параболической зависимостью

$$v(y) = v_0 \xi^2, \quad (3)$$

в которой $v_0 = v(0)$; $\xi = 1 + \alpha y$; α – положительная константа.

Согласно (3), при увеличении y нелинейно возрастает $v(y)$.

Решение краевой задачи, представленной выражениями (1), (2), ищем в виде суммы

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (4)$$

слагаемые которой удовлетворяют граничным условиям:

$$\left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=0} = 0; \quad u_1(h) = 0; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u_2(h, t) = A * \omega \sin(\omega t), \quad (6)$$

вытекающим из (2).

Подставив (4) в (1), с учетом (3), получаем два уравнения:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{du_1}{d\xi} \right) = - \frac{g \sin \theta}{v_0 \alpha^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{v_0 \alpha^2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0.$$

Первое из них решаем при граничных условиях (5), а второе – при условиях (6).

Решением краевой задачи для первого уравнения в (7) является

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{\alpha^2 v_0} \left[\ln \frac{1 + \alpha h}{1 + \alpha y} - \frac{\alpha(h - y)}{(1 + \alpha h)(1 + \alpha y)} \right]. \quad (8)$$

К нему приводит двукратное интегрирование (7) с определением констант интегрирования с помощью (5).

Решение второго уравнения в (7) представляем суммой

$$u_2(y, t) = \operatorname{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t) + \operatorname{Im} w(y) \cdot \cos(\omega t), \quad (9)$$

где комплексная функция вещественного аргумента $w(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\xi^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dw}{d\xi} - \frac{i\omega}{v_0 \alpha^2} w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (10)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{y=0} = \operatorname{Im} \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{y=0} = 0; \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} w(h) = 0; \quad \operatorname{Re} w(h) = A * \omega, \quad (12)$$

вытекающим из (6).

Подставив в (10) степенную функцию

$$w = \xi^\lambda,$$

приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{i\omega}{v_0\alpha^2} = 0,$$

которое имеет комплексные корни:

$$\lambda_1 = a + i\beta; \quad \lambda_2 = b - i\beta.$$

Здесь

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}; \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2};$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c} - \frac{1}{4}}; \quad c = \frac{1}{16} + \frac{\omega^2}{v_0^2\alpha^4}.$$

Поскольку

$$\xi^{\pm i\beta} = \cos(\beta \ln \xi) \pm i \sin(\beta \ln \xi),$$

то общим решением уравнения Эйлера (10) является

$$w(y) = (c_1 + ic_2)\xi^a [\cos(\beta \ln \xi) + i \sin(\beta \ln \xi)] +$$

$$+ (c_3 + ic_4)\xi^b [\cos(\beta \ln \xi) - i \sin(\beta \ln \xi)]. \quad (13)$$

Для определения произвольных констант c_1, c_2, c_3, c_4 продифференцируем (13) по ξ и подставим в (11). Такое действие приводит к системе двух уравнений

$$c_1a - c_2\beta + c_3b + c_4\beta = 0;$$

$$c_1\beta + c_2a - c_3\beta + c_4b = 0.$$

Из нее следует, что

$$c_3 = c_1\delta_1 + c_2\delta_2; \quad c_4 = -c_1\delta_2 + c_2\delta_1, \quad (14)$$

причем

$$\delta_1 = \frac{\beta^2 - ab}{\beta^2 + b^2}; \quad \delta_2 = \frac{\beta(a + b)}{\beta^2 + b^2}. \quad (15)$$

Учитывая (14) и (15), выражение (13) сводим к виду

$$w(y) = c_1f(\xi) - c_2\varphi(\xi) + i[c_1\varphi(\xi) + c_2f(\xi)], \quad (16)$$

где

$$f(\xi) = (\xi^a + \delta_1\xi^b) \cos(\beta \ln \xi) - \delta_2\xi^b \sin(\beta \ln \xi);$$

$$\varphi(\xi) = (\xi^a - \delta_1\xi^b) \sin(\beta \ln \xi) - \delta_2\xi^b \cos(\beta \ln \xi).$$

Подставив (16) в (12), получаем систему относительно неизвестных c_1 и c_2 :

$$c_1f(\eta) - c_2\varphi(\eta) = A * \omega;$$

$$c_1\varphi(\eta) + c_2f(\eta) = 0.$$

Здесь $\eta = 1 + ah$.

Решив систему, находим постоянные:

$$c_1 = \frac{A^* \omega f(\eta)}{f^2(\eta) + \varphi^2(\eta)}; \quad c_2 = -\frac{A^* \omega \varphi(\eta)}{f^2(\eta) + \varphi^2(\eta)}. \quad (17)$$

Учитывая (4), (8), (9), (14), (16) и (17), решение рассматриваемой краевой задачи сводим к виду

$$u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{\alpha^2 \nu_0} \left[\ln \frac{1 + \alpha h}{1 + \alpha y} - \frac{\alpha(h - y)}{(1 + \alpha h)(1 + \alpha y)} \right] + [c_1 f(\xi) - c_2 \varphi(\xi)] \sin(\omega t) + [c_1 \varphi(\xi) + c_2 f(\xi)] \cos(\omega t). \quad (18)$$

Оно выражается в элементарных функциях, несмотря на переменность коэффициентов решаемого дифференциального уравнения.

Заметим, что предельный переход $\alpha \rightarrow 0$ в (18) приводит к известному решению краевой задачи о колебаниях однородного слоя зерновой смеси на виброрешете. Действительно, в этом предельном случае:

$$\begin{aligned} a \rightarrow -b \rightarrow \beta \rightarrow \frac{\gamma}{\alpha}; \quad \delta_1 \rightarrow 1; \quad \delta_2 \rightarrow 0; \quad \beta \ln \xi \rightarrow \gamma y; \\ f(\xi) \rightarrow 2ch(\gamma y) \cos(\gamma y); \quad \varphi(\xi) \rightarrow 2sh(\gamma y) \sin(\gamma y); \\ c_1 \rightarrow \frac{A^* \omega \cdot chz \cdot \cos z}{\cos^2 z + sh^2 z}; \quad c_2 \rightarrow -\frac{A^* \omega \cdot shz \cdot \sin z}{\cos^2 z + sh^2 z}; \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu_0}}; \quad z = \gamma h. \end{aligned}$$

Поэтому выражение (18) принимает вид

$$\begin{aligned} u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{2\nu_0} (h^2 - y^2) + \frac{A^* \omega}{\cos^2 z + sh^2 z} \{ [chz \cos z ch(\gamma y) \times \\ \times \cos(\gamma y) + shz \sin z sh(\gamma y) \sin(\gamma y)] \sin(\omega t) + [chz \cos z \times \\ \times sh(\gamma y) \sin(\gamma y) - shz \sin z ch(\gamma y) \cos(\gamma y)] \cos(\omega t) \}. \end{aligned}$$

Такое решение было получено в [5] другим способом.

Используя табличные интегралы [6]

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin(\beta x) dx &= \frac{e^{ax} (a \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x))}{a^2 + \beta^2}; \\ \int e^{ax} \cos(\beta x) dx &= \frac{e^{ax} (a \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x))}{a^2 + \beta^2}, \end{aligned}$$

несложно проинтегрировать выражение (18) по y и найти удельную производительность решета $\bar{Q}(t)$. Указанное преобразование приводит к формуле

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t) = \frac{g \sin \theta}{\nu_0 \alpha^3} \left[\alpha h + \frac{\alpha h}{1 + \alpha h} - 2 \ln(1 + \alpha h) \right] + \frac{1}{\alpha} (c_1 \Phi_1 - c_2 \times \\ \times \Phi_2) \sin(\omega t) + \frac{1}{\alpha} (c_1 \Phi_2 + c_2 \Phi_1) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

В ней

$$\Phi_1 = \int_1^\eta f(\xi) d\xi = \frac{\eta^{a+1}}{(a+1)^2 + \beta^2} [(a+1)\cos(\beta \ln \eta) + \beta \sin(\beta \ln \eta) - a - 1] +$$

$$+ \frac{\delta_1 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} [(b+1)\cos(\beta \ln \eta) + \beta \sin(\beta \ln \eta) - b - 1] - \frac{\delta_2 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} \times$$

$$\times [(b+1)\sin(\beta \ln \eta) - \beta \cos(\beta \ln \eta) + \beta];$$

$$\Phi_2 = \int_1^\eta \varphi(\xi) d\xi = \frac{\eta^{a+1}}{(a+1)^2 + \beta^2} [(a+1)\sin(\beta \ln \eta) - \beta \cos(\beta \ln \eta) + \beta] +$$

$$+ \frac{(-1)\delta_1 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} [(b+1)\sin(\beta \ln \eta) - \beta \cos(\beta \ln \eta) + \beta] - \frac{\delta_2 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} \times$$

$$\times [(b+1)\cos(\beta \ln \eta) + \beta \sin(\beta \ln \eta) - b - 1].$$

Эти выражения позволяют рассчитать колебания удельной производительности решета, что происходит с частотой продольных вибраций решета и некоторым смещением по фазе.

С целью апробации полученных решений краевой задачи проведены вычисления изменений скорости потока смеси при следующих исходных данных: $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $f = 0,47$; $M = 0,00004 \text{ кг}$; $r_0 = 0,001825 \text{ м}$; $h = 0,008 \text{ м}$, $v_0 = 5,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2\text{с}^{-1}$; $\alpha = 51,78 \text{ м}^{-1}$, которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [2]. Работу решета характеризовали параметрами: $\theta = 5^\circ$; $A^* = 0,0075 \text{ м}$; $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$.

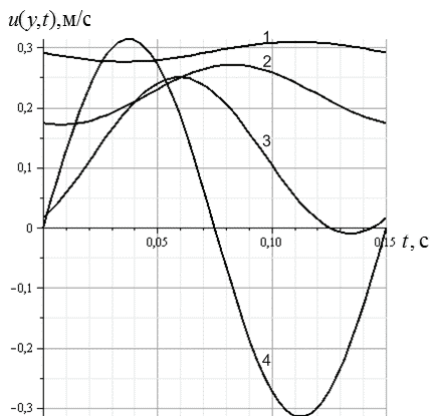


Рисунок 2 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте неоднородного слоя: 1, 2, 3, 4 – $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

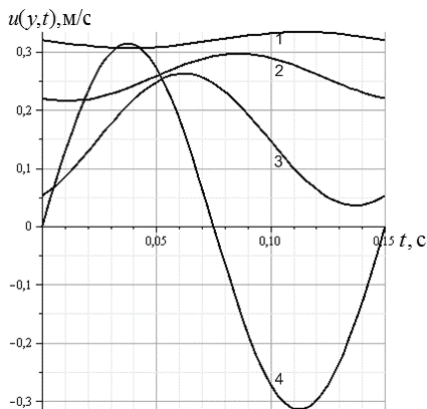


Рисунок 3 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте однородного слоя: 1, 2, 3, 4 – $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

Вычисленные по (18) значения $u(y,t)$ при $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$ и различных y

графически показаны на рис. 2, где цифрами 1,2,3,4 отмечены линии, соответствующие $yh^{-1} = 0,25; 0,5; 0,75; 1$. С ростом y (увеличение глубины частицы в слое) уменьшается скорость движения, но возрастает амплитуда ее колебаний. У поверхности решета ($y \rightarrow h$) в некоторые моменты времени появляются обратные точки, характеризующиеся отрицательными значениями скорости. Результаты аналогичных расчетов, соответствующие $\alpha = 0$, представлены графически на рис. 3. Здесь также соблюдаются отмеченные выше закономерности течения смеси.

Выводы. Изложенная теория позволяет учитывать увеличение вибровязкости смеси с удалением от свободной поверхности. В области рассмотренных частот продольных вибраций решета полученные по этой теории численные результаты подтверждают быстрое затухание колебаний скорости потока по высоте движущегося слоя зерна.

Список литературы: 1. *Ольшанский В.П., Кучеренко С.И., Бурлака В.В.* К расчету движения зерновой смеси по плоскому вибрирующему решету // Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 77. – С. 238-244. 2. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: Миськдрук, 2010. – 174 с. 3. *Тищенко Л.Н., Пивень М.В., Харченко С.А., Бредихин В.В.* Исследование закономерностей вибровязкости зерновых смесей при сепарировании цилиндрическими виброцентробежными решетами // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв: Вісник ХНТУСГ. Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 88. – С. 34-44. 4. *Тищенко Л.Н., Мазоренко Д.И., Пивень М.В. и др.* Моделирование процессов зерновых сепараторов. – Харьков: Миськдрук, 2010 – 360с. 5. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* К расчету движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – №1. – С. 109-113. 6. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1962. – 1100 с.

Поступила в редакцію 16.07.2010