

А.В.ВОРОПАЙ, канд. техн. наук, доцент, ХНАДУ, Харьков

УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ПЛАСТИНЕ

Механічна система складається з прямокутної пластини середньої товщини шарнірно-опертої по контуру та зосередженої маси, що лежить на пластині. На пластину діє нестационарне навантаження, що збудує коливання та сила, яка забезпечує керування коливаннями. Викладаються результати розв'язку оберненої задачі визначення керуючого навантаження. Розрахунки зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, які розв'язуються чисельно з використанням метода регуляризації А. М. Тихонова.

Mechanical system consists of hingedly supported medium-thickness rectangular plate and concentrated mass, which is lying on the plate. The non-stationary concentrated load, which initiates vibration, and force, which provides controlling of vibration, are acting on the plate. The results of solution for inverse problems of controlling force determination are presented. The problems are reduced to the system of first-kind Volterra integral equations, which is solved numerically with using of Tikhonov's regularization method.

Введение. Существуют различные способы управления нестационарными колебаниями в механических системах, которые имеют элементы конструкций в виде пластин. Так как эта статья не посвящена анализу систем управления нестационарными колебаниями и их схемам, отметим лишь некоторые работы. В работах [1, 2] применяются элементы конструкций в целом, созданные из так называемых усовершенствованных материалов (smart materials). В статьях [3, 4] описано управление колебаниями с помощью специальных устройств пьезодатчик/пьезопривод (piezosensor/actuator), изготовленных в виде накладок, растяжек и т.д., вводимых в механические системы. В случае гашения колебаний часто используются управляемые и неуправляемые гасители колебаний (vibration absorber) [5].

Для решения подобных задач удобно использовать следующий подход – управление колебаниями осуществляется с помощью введения в механическую систему дополнительных управляющих нагрузок. Тогда задача управления сводится к идентификации этих неизвестных нагрузок, которые определяются из решения соответствующих обратных нестационарных задач. А выбор конкретной системы управления и механизмов реализации найденных управляющих сил осуществляется уже на стадии практических или экспериментальных исследований.

1 Постановка задачи. Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и сосредоточенной массы, лежащей на ее верхней лицевой поверхности (рис. 1). Считается, что изменение перемещения во времени со-

средоточенной массы полностью совпадает с изменением прогиба пластины в точке, где находится масса, то есть $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$.

На пластину в некоторой точке воздействует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины и массы. Требуется управлять нестационарными колебаниями сосредоточенной массы. Управление осуществляется посредством приложения к пластине дополнительной (управляющей) нагрузки $P_C(t)$. Задача управления заключается в идентификации закона изменения во времени этой нагрузки $P_C(t)$. Таким образом, для определения закона изменения во времени управляющего воздействия требуется решить обратную нестационарную задачу для механической системы, состоящей из пластины и массы.

При решении задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузок (возмущающей и управляющей), и координаты сосредоточенной массы произвольны (любые точки принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе). Также считалась известной величина сосредоточенной массы.

2 Решение прямой задачи. В рамках теории пластин С. П. Тимошенко представим следующую систему дифференциальных уравнений [6], которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с учетом сосредоточенной массы M :

$$\left\{ \begin{array}{l} G' h (\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + P_C(x, y, t) + R(x, y, t); \\ D \nabla^2 \psi_{xy} - G' h (\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1 - \nu) \nabla^2 \varphi_{xy} + (1 + \nu) \nabla_1^2 \psi_{xy}] - G' h (\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \\ M \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2} = R(x_M, y_M, t) \end{array} \right. \quad (1)$$

где h – толщина пластины; $G' = k'G$; k' – коэффициент сдвига; $I = h^3/12$; w – перемещение срединной плоскости пластины; ψ_x, ψ_y – углы поворота; ρ, E, ν – постоянные материала пластины; t – время, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$;

$$\varphi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Укажем, что:

$P(x, y, t)$ – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная);

$P_C(x, y, t)$ – управляющее воздействие на пластину (сосредоточенная или распределенная нагрузка);

$R(x, y, t) = \delta(x - x_M) \cdot \delta(y - y_M) \cdot R(x_M, y_M, t)$ – реакция пластины на воздействие сосредоточенной массы M .

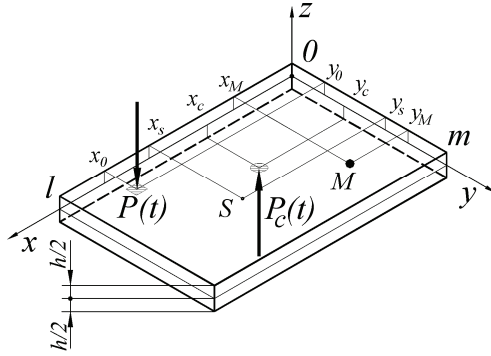


Рисунок 1 – Схема нагружения

Систему дифференциальных уравнений (1) в предположении нулевых начальных условий решаем посредством разложения искомых функций w_0 , ψ_x , ψ_y в двойные ряды Фурье согласно рассмотренной схеме опирания. Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа; в пространстве изображений находятся искомые коэффициенты разложения; производится обратное преобразование Лапласа. В результате получаем следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= \sum_i \int_0^t P_i(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \\
 \psi_x(x, y, t) &= \sum_i \int_0^t P_i(\tau) K_i^{\psi_x}(x, y, t - \tau) d\tau; \\
 \psi_y(x, y, t) &= \sum_i \int_0^t P_i(\tau) K_i^{\psi_y}(x, y, t - \tau) d\tau,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $P_1(t) = P(t)$; $P_2(t) = -P_C(t)$; $P_3(t) = -P(t)$,

$K_i(x, y, t)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля (сверток):

$$\begin{aligned}
 K_i^W(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn} t, \\
 K_i^{\psi_x}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}},
 \end{aligned}$$

$$K_i^{\Psi y}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}.$$

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения:

$$a = \frac{G'}{\rho}, \quad b = \frac{G'h}{\rho \cdot J}, \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J}, \quad \lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}, \quad \mu_n^* = \pi \frac{n}{m}, \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right),$$

$$\Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4}; \quad \omega_{1kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b) + \Delta_{kn}]};$$

$$\omega_{2kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b) - \Delta_{kn}]};$$

$$\Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn} = -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.$$

Укажем, что вид коэффициентов C_{ikn} зависит от геометрической формы нагрузки, а именно если нагрузка сосредоточенная, то:

$$C_{kn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m},$$

в случае, когда нагрузка равномерно распределена по прямоугольнику со сторонами Δx и Δy соответственно, коэффициенты C_{ikn} будут иметь вид:

$$C_{kn} = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h} \frac{4}{\lambda_k^* \mu_n^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \sin \frac{k\pi \cdot \Delta x}{2l} \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m} \sin \frac{n\pi \cdot \Delta y}{2m},$$

а если нагрузка равномерно распределена по кругу радиуса r , то:

$$C_{kn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{\lambda_{kn}} \cdot J_1(\lambda_{kn} r) \sin \left(\frac{k\pi \cdot x_i}{l} \right) \cdot \sin \left(\frac{n\pi \cdot y_i}{m} \right),$$

где $J_1(\lambda_{kn} r)$ – функция Бесселя.

3 Решение обратной задачи. В случае если требуется, чтобы перемещение сосредоточенной массы во времени изменялось согласно заданному закону (например, в виде синусоиды), критерий управления примет вид $w(x_M, y_M, t) = w_c(t)$. Тогда для точки (x_M, y_M) , можно записать следующую систему интегральных уравнений (СИУ):

$$\begin{cases} w_c(t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau - \int_0^t P_c(\tau) K_{Pc}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t-\tau) d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = w_c(t) = \int_0^t R(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau. \end{cases} \quad (3)$$

Систему интегральных уравнений (3) после дискретизации можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{A}_R \mathbf{R} + \mathbf{A}_{Pc} \mathbf{P}_c = \mathbf{A}_P \mathbf{P} - \mathbf{w}_c;$$

$$\mathbf{A}_M \mathbf{R} = \mathbf{w}_c,$$

где вектор \mathbf{P} – соответствует известной функции $P(t)$, матрицы \mathbf{A}_R , \mathbf{A}_M , \mathbf{A}_{Pc} и \mathbf{A}_P отвечают соответствующим ядрам системы уравнений (3), \mathbf{R} и \mathbf{P}_C – неизвестные векторы, соответствующие $P(t)$ и $P_C(t)$.

Решение указанной системы уравнений в силу некорректности осуществляется с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [7] (РА Тихонова).

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка равномерно распределена по прямоугольной области со сторонами Δx и Δy соответственно и центром (x_0, y_0) , а управляющая нагрузка равномерно распределена по кругу радиуса r с центром (x_c, y_c) . При вычислениях принимались следующие значения: $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7890$ кг/м³; $h = 0,04$ м; $l = 0,6$ м; $m = 0,4$ м; $x_0 = 0,4$ м, $y_0 = 0,2$ м; $x_c = 0,2$ м, $y_c = 0,15$ м; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 ; $x_M = 0,15$ м, $y_M = 0,3$ м – координаты сосредоточенной массы.

Существенное влияние на «качество» управления оказывает, параметр регуляризации α , содержащийся в РА Тихонова. Этот параметр определялся на основе минимизации α функционала «качества», соответствующего приближению полученных значений прогиба к требуемым значениям:

$$M^\alpha [P_c] = \|w_c - A_p P + A_R R^\alpha + A_{Pc} P_c^\alpha\|.$$

График изменения функционала в зависимости от параметр регуляризации α приведен на рис. 2.

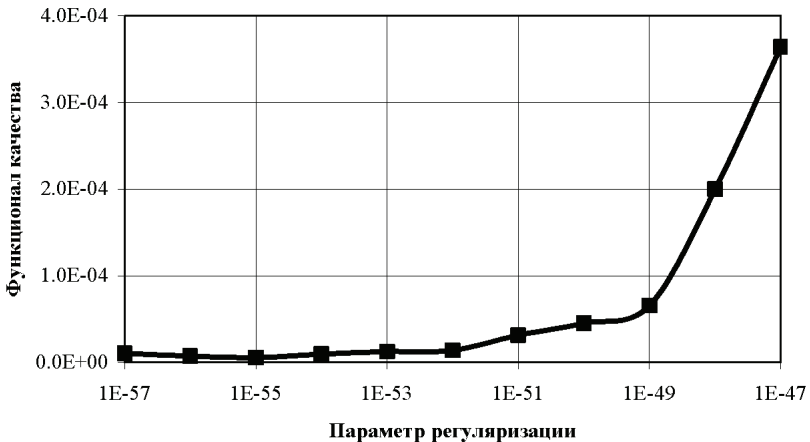


Рисунок 2 – Определение параметра регуляризации

Из рис. 2 видно, что параметр регуляризации желательно брать меньше $\alpha = 10^{-49}$, а наибольшее «качество» достигается при $\alpha = 10^{-55}$.

На рис. 3 показано изменение возмущающей нагрузки $P(t)$ – кривая 1; и

определенные в результате решения СИУ (3) значения управляющего воздействия $P_C(t)$ и реакции массы $P(t)$ – кривые 2 и 3 соответственно, найденные при значении $\alpha = 10^{-55}$. Укажем, что для удобства анализа результатов величины возмущающей и управляющей нагрузок, а также реакция сосредоточенной массы, приведены в ньютонах (равномерно распределенные нагрузки в паскалях были умножены на соответствующие площади контакта).

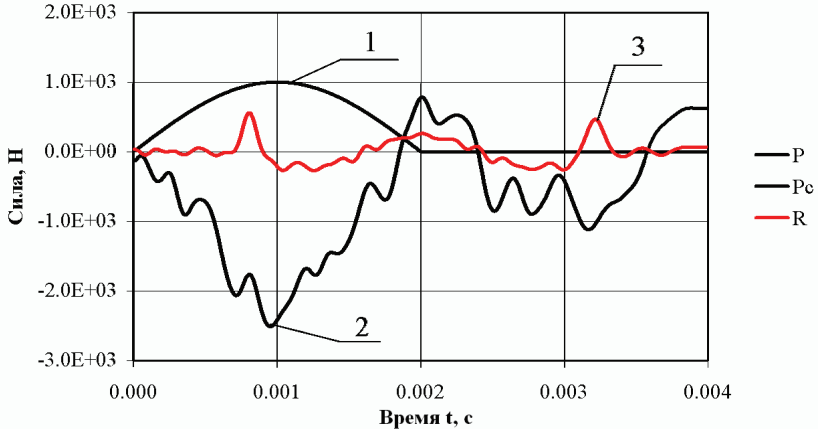


Рисунок 3 – Определение реакции сосредоточенной массы



Рисунок 4 – Идентификация неизвестной нагрузки

На рис. 4 показаны три кривые изменения перемещения сосредоточенной массы:

- кривая 1 показывает требуемое перемещение сосредоточенной массы – целевая функция для управления;
- кривая 2 – перемещение сосредоточенной массы и прогиба пластины

- при воздействии только возмущающей нагрузки;
- кривая 3 – результат управления (перемещение сосредоточенной массы при воздействии возмущающей нагрузки и управляющего воздействия).

Как видно из рис. 4 кривые 1 и 3 практически полностью совпадают, что свидетельствует о достижении требуемых результатов. Только в конце исследуемого промежутка времени кривая 3 незначительно отходит от кривой 1, это вызвано, по-видимому, накоплением погрешностей при вычислении управляющей нагрузки.

Выводы. Показана возможность управления нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на прямоугольной пластине, с помощью дополнительной (управляющей) нагрузки. На основе представленных результатов (рис. 4) можно сделать вывод о том, что предложенная схема управления и алгоритм определения управляющего воздействия при решении обратной задачи для механической системы являются эффективными и достаточно устойчивыми.

Список литературы: 1. *He X.Q., Ng T.Y., Sivashanker S., Liew K.M.* Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators // *Int. J. Solids and Struct.* – 2001. – 38, № 9. – P. 1641-1655. 2. *Kapurja S., Dumir P.C.* Coupled FSDT for piezothermoelectric hybrid rectangular plate // *Int. J. Solids and Struct.* – 2000. – 37, № 42. – P. 6131-7153. 3. *Chen Lin-Hung, Huang Shyh-Chin.* Vibration attenuation of a cylindrical shell with constrained layer damping strips treatment // *Comput. and Struct.* – 2001. – 79, № 14. – P. 1355-1362. 4. *Saadat S., Noori M.* et al. Using NiTi SMA tendons for vibration control of coastal structures // *Smart Mater. and Struct.* – 2001. – 10, № 4. – P. 695 – 704. 5. *Wu S. T., Chen J.Y., Yeh Y.C., Chiu Y.Y.* An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // *Journal of Sound & Vibration.* – 2007. – 300(1-2). – PP. 250-64. 6. *Григолоук Э. И., Селезов И. Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с. 7. *Тихонов А. Н., Гончаровский А. В.* и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с.

Поступила в редколлегию 19.11.2010