

Е.О.БЕЗДЕТКО, инж. I кат., НТУ «ХПИ»;

А.А.ОСЕТРОВ, асс., НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ RFM К ЗАДАЧАМ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН С РАЗРЕЗАМИ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ И СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

Розглядаються задачі про власні коливання тонких пластин, що містять розрізи та мають різні види граничних умов. Математична модель задачі уявляє собою диференціальне рівняння четвертого порядку відносно прогину. Розв'язок поставленої задачі виконується варіаційно-структурним методом. Для побудови базисних функцій, які враховують розріз пластини, розташований в середині області, використано структури спеціального виду. При цьому апроксимація невизначених компонент виконується за допомогою степеневих поліномів, а також сплайнів. Отримано чисельні результати для квадратних вільно опертих та жорстко закріплених пластин з вертикальним розрізом, які добре узгоджуються з відомими в літературі. В роботі також наведено форми та частоти коливань квадратних пластин з прямолінійним нахиленим розрізом. Побудовані структури розв'язків можуть бути використані для криволінійних розрізів, будь-якої геометрії пластини та різних видів крайових умов.

Eigenfunctions and eigenvalues of thin plates with cuts and different boundary conditions are being investigated. The governing equations for plates are differential equations of the fourth order constructed relatively to deflection. The given problem is solved by variation-structural method. Special types of structures are used to build basic functions taking internal cuts in account. Here the approximation of undefined components is performed using power polynomials and splines. Obtained numerical results for simply supported and clamped square plates with the vertical cut have a good agreement with known in literature. Also results for eigenvalues and eigenforms of square plates with slope cut are presented. The constructed solution structures can be used for curvilinear cuts, different geometrical forms and boundary conditions of plates.

Задача о колебаниях тонких пластин привлекает внимание многих авторов, поскольку элементы конструкций, моделируемые пластинами, часто используются на практике. Влияние граничных условий на частоту колебаний пластины достаточно полно обсуждалось в литературе. Однако задаче о колебаниях пластины с разрезом посвящено лишь небольшое количество работ. В то же время, решение такой задачи является важным, поскольку разрезы можно рассматривать как первое приближение открытых трещин, которые действительно могут появиться в процессе эксплуатации конструкции.

В настоящей работе предлагается подход к решению задач о колебаниях пластин с разрезами, основанный на методе R-функций [2].

1 Математическая постановка. Рассмотрим однородную тонкую пластину постоянной толщины h . Дифференциальное уравнение движения колеблющейся тонкой пластины, полученное в рамках классической теории имеет вид [8]:

$$\nabla^4 W - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где ρh – масса пластины, отнесенная к единице поверхности.

Для защемленной пластины уравнение (1) дополняется следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} W = 0, & x \in \partial\Omega \\ \frac{\partial W}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

где n – внешняя нормаль к контуру пластины $\partial\Omega$, а для свободно опертой пластины – граничными условиями:

$$\begin{cases} W = 0, & x \in \partial\Omega \\ \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \left(\frac{1 - \nu_0^2}{\rho_0} \right) \frac{\partial W}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

где τ – касательная к контуру пластины $\partial\Omega$, ρ_0 – радиус кривизны границы, а ν_0 – коэффициент Пуассона.

2 Метод решения. В соответствии с методом Ритца, задача о свободных поперечных колебаниях тонкой пластины постоянной толщины h сводится к нахождению минимума следующего функционала:

$$J(W) = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \partial\Omega - \frac{\lambda^2 \rho h}{2} \iint_{\Omega} W^2 \partial\Omega. \quad (4)$$

на множестве координатных функций [3], удовлетворяющих по крайней мере кинематическим граничным условиям. При этом способ построения системы базисных функций зависит от вида заделки пластины на границе. Согласно методу R-функций [2], структуры решения краевых задач (1)-(2) и (1)-(3) имеют следующий вид:

1. Для защемленной пластины:

$$W = \omega^2 \Phi; \quad (5)$$

2. Для свободно опертой пластины:

$$W = \omega \Phi, \quad (6)$$

где $\omega = 0$ – уравнение границы области, Φ – неопределенная компонента структуры решения.

В случае если пластина содержит разрез $l = 0$, структуры решения (5) и (6) уже не будут обладать свойством полноты [4]. Для учета того факта, что аппроксимируемое решение по разные стороны от разреза ведет себя, вообще говоря, независимо, в [4] была предложена следующая структура решения краевой задачи (1)-(2):

$$W = \omega^2 [q_1(x, y)\Phi_1 + q_2(x, y)\Phi_2], \quad (7)$$

где Φ_1 и Φ_2 – неопределенные компоненты, q_1 и q_2 – функции, которые при подходе к разрезу по нормали с одной его стороны стремятся к нулю, а при подходе с другой – к 1:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2} \left(1 + D_1^{(l)} \omega_r \right) \\ q_2 = \frac{1}{2} \left(1 - D_1^{(l)} \omega_r \right) \end{cases} \quad (8)$$

Здесь оператор $D_1^{(l)} \omega_r = \frac{\partial \omega_r}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial \omega_r}{\partial y} \frac{\partial l}{\partial y}$ [2], $l = 0$ – уравнение линии,

содержащей разрез $\omega_r = 0$, при этом знак l меняется при переходе через линию $l = 0$.

Для задачи (1)-(3) предлагается использовать такую структуру решения:

$$W = \omega [q_1(x, y)\Phi_1 + q_2(x, y)\Phi_2]. \quad (9)$$

Заметим, что $\omega = 0$ здесь, как и в формулах (5), (6) – это уравнение границы области без разреза; $\omega_r = 0$ – уравнение разреза, которое используется при построении функций q_1 и q_2 . В [4] доказана теорема о том, что построенные с помощью структур (7), (9) последовательности координатных функций удовлетворяют главным краевым условиям задачи и образуют полную систему. С помощью этих структур в [4] решена задача изгиба тонкой пластины, содержащей разрез. В настоящей работе нами рассматривается задача о колебаниях такой пластины.

3 Численные результаты. Рассмотрим тонкую пластину квадратной формы, а) жестко защемленную по контуру и б) свободно опертую по контуру. Для свободно опертой пластины известно точное решение задачи о колебаниях, а для защемленной – приближенные решения, например, решение, полученное методом рядов [8]. Для сравнения решим эти задачи методом R-функций, используя полные структуры решений (5) и (6) соответственно. Неопределенную компоненту Φ будем аппроксимировать полиномами (степень полинома $N = 10$) и сплайнами (сетка сплайнов 16×16). В табл. 1, 2 приведены значения безразмерного частотного параметра Λ_i для первых четырех частот квадратной пластины с различными способами заделки.

$$\Lambda_i = a^2 \lambda_i \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}},$$

где λ_i – i -я частота колебаний пластины, a – характерный размер, ρ – плотность материала, из которого сделана пластина, h – ее толщина.

Проведем исследование свободных колебаний тонкой пластины квадратной формы, содержащей разрез, расположенный по центру параллельно одной из сторон (рис. 1). Для такой задачи неизвестно точное решение, однако она решена приближенно с помощью МКЭ [1]. Решим эту задачу методом R-функций.

Таблица 1 – Безразмерные частотные параметры квадратной жестко заземленной пластины

Метод решения	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Метод рядов [8]	35,985	73,40	73,40	108,22
RFM + pol, $N = 10$	36,0	73,4	73,4	108
RFM + spl, сетка 16×16	35,98	73,39	73,39	108,2

Таблица 2 – Безразмерные частотные параметры квадратной свободно опертой пластины

Метод решения	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Точное решение [8]	19,739	49,348	49,348	78,957
RFM + pol, $N = 10$	19,7	49,3	49,3	79,0
RFM + spl, сетка 16×16	19,74	49,35	49,35	78,96

Отношение стороны квадрата к длине разреза принято равным $l/a = 0,5$. Условия закрепления на краях пластины – жесткое защемление, разрез свободный. Для этой задачи уравнение линии l , содержащей разрез – это уравнение оси y , то есть $l \equiv x$. Значит, $D_1^{(l)}\omega_r = \frac{\partial \omega_r}{\partial x}$ (так как $\frac{\partial l}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial l}{\partial y} = 0$). В табл. 3-6, 8 приведены значения безразмерного частотного параметра Λ_i для первых четырех частот.

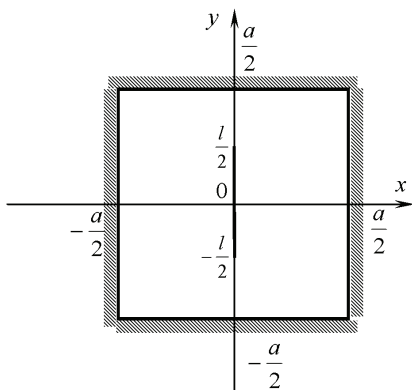


Рисунок 1

Данная задача решена в работе методом RFM с помощью полиномиальной и сплайн-аппроксимации неопределенных компонент. Как показал численный эксперимент, при использовании полиномиальной аппроксимации, стабилизация в третьем знаке начинается с 11 степени полиномов (табл. 3). Результаты, представленные в табл. 4 подтверждают, что при сплайн-аппроксимации достаточно рассмотреть сетку сплайнов 32×32 и применять

метод интегрирования, базирующийся на применении семиточечных формул Гаусса (7×7) на каждом элементарном прямоугольнике сетки.

Таблица 3 – Исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении количества координатных функций (аппроксимация полиномами, N -степень полинома)

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
$N = 6$	35,9	69,3	73,4	108
$N = 7$	35,6	64,8	73,4	108
$N = 8$	34,5	64,2	73,3	107
$N = 9$	34,1	64,1	73,2	106
$N = 10$	34,0	63,5	72,9	106
$N = 11$	33,7	63,2	72,8	106
$N = 12$	33,6	62,8	72,7	106
$N = 13$	33,5	61,9	72,4	106
$N = 14$	33,4	60,2	71,8	106
$N = 15$	33,3	59,6	71,5	105

Таблица 4 – Исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении сетки сплайнов (аппроксимация сплайнами)

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Sp 8×8	34,30	61,89	73,23	106,4
Sp 16×16	33,11	59,47	72,57	105,4
Sp 24×24	32,81	58,97	72,39	105,2
Sp 32×32	32,67	58,61	72,28	105,0

В табл. 5, 6 приведены безразмерные частотные параметры свободных колебаний исследуемой пластины при условии жесткого защемления на краях (разрез свободный) и при условии свободного опирания, полученные методом конечных элементов (J.A. Crossland, S.M. Dickinson [1]) и методом R-функций (аппроксимация полиномами и сплайнами). Полиномиальная аппроксимация проведена в системе POLE-RL при количестве точек Гаусса $k = 5$ и степени аппроксимационного полинома $N = 15$. Результаты аппроксимации сплайнами получены при сетке сплайнов 32×32 и удержании узлов интегрирования Гаусса 7×7 на каждом элементарном прямоугольнике сетки. Численные эксперименты по аппроксимации сплайнами проведены на базе созданного программного комплекса, использующего математический пакет Maple [6] и ряд разработанных программных модулей, реализующих на C++ сплайн-аппроксимацию неопределенных компонент в структурных формулах (7), (9).

Анализ результатов табл. 5, 6 показывает, что появление свободного разреза приводит к уменьшению основного частотного параметра Λ_1 на 9 %

(вне зависимости от вида граничного условия на внешнем контуре пластины). На параметр Λ_2 появление разреза влияет сильнее: в случае жесткой заделки Λ_2 уменьшается на 20 % по сравнению с пластиной без разреза, а в случае свободного опирания – на 12 %. Наглядно это продемонстрировано в табл. 7. В ней приведены первые четыре формы и значения частотного параметра Λ_i свободных колебаний пластины, представленной на рис. 1, полученные с помощью сплайн-аппроксимации при жестко закрепленном контуре (первая строка таблицы) и при свободно опертом контуре. Сравнивая вторые формы колебаний, мы видим, что в случае жестко закрепленного контура раскрытие разреза больше.

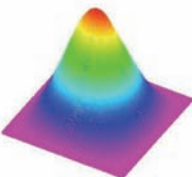
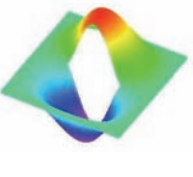
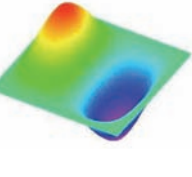
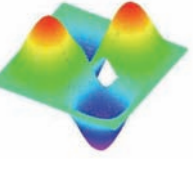
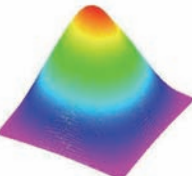
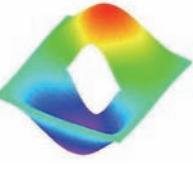
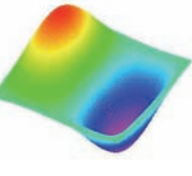
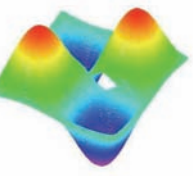
Таблица 5 – Безразмерные частотные параметры жестко защемленной пластины (разрез свободный)

Метод решения	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
RFM + pol, $N = 15$	33,3	59,6	71,5	105
RFM + spl, сетка 32×32	32,67	58,61	72,28	105,0
МКЭ [1]	32,73	58,99	72,28	105,1

Таблица 6 – Безразмерные частотные параметры свободно опертой пластины (разрез свободный)

Метод решения	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
RFM + pol, $N = 15$	18,4	44,1	48,3	78,0
RFM + spl, сетка 32×32	17,92	43,35	48,78	77,68

Таблица 7 – Формы свободных колебаний и соответствующие им значения Λ_i жестко защемленной и свободно опертой пластины

			
$\Lambda_1 = 32,67$	$\Lambda_2 = 58,61$	$\Lambda_3 = 72,28$	$\Lambda_4 = 105,0$
			
$\Lambda_1 = 17,92$	$\Lambda_2 = 43,35$	$\Lambda_3 = 48,78$	$\Lambda_4 = 77,68$

Таким образом, наличие свободного разреза, который моделирует трещины в первом приближении, существенно влияет на спектр собственных частот колебаний пластин.

Заметим, что построенные структурные формулы являются универсальными относительно геометрии трещины. Рассмотрим, например пластину, изображенную на рис. 2. Здесь разрез расположен под углом 45 градусов, отношение стороны квадрата к длине разреза по-прежнему $l/a = 0,5$, пластина закреплена по контуру, разрез свободен.

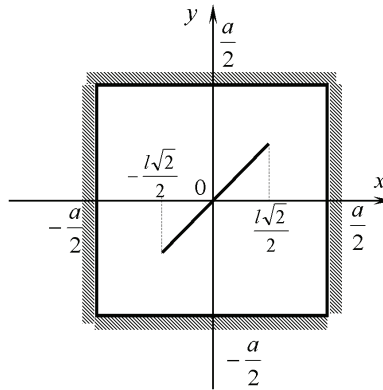


Рисунок 2

Благодаря использованию метода R-функций, для вычисления частот свободных колебаний этой пластины требуется изменить лишь небольшую часть программы, написанной для расчета пластины на рис. 1. Ниже приведено исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении количества координатных функций (табл. 8) и при увеличении сетки сплайнов (табл. 9). Сравнение результатов приведено в табл. 10.

Таблица 8 – Исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении количества координатных функций для квадратной жестко закрепленной пластины со свободным наклонным разрезом (аппроксимация полиномами, N -степень полинома)

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
$N = 10$	29,3	57,4	66,1	102
$N = 11$	29,0	56,7	65,8	100
$N = 12$	28,9	55,6	65,3	99,9
$N = 13$	28,8	54,5	65,1	99,4
$N = 14$	28,6	53,7	64,4	98,1
$N = 15$	28,4	52,7	63,5	96,4

Таблица 9 – Исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении сетки сплайнов для квадратной жестко защемленной пластины со свободным наклонным разрезом (аппроксимация сплайнами)

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Sp 8×8	34,99	64,80	71,71	105,3
Sp 16×16	33,26	59,24	71,76	102,8
Sp 24×24	32,67	57,77	71,53	101,4
Sp 32×32	32,50	56,95	71,42	101,1

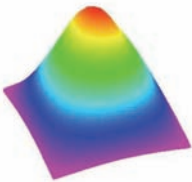

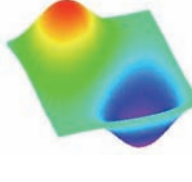
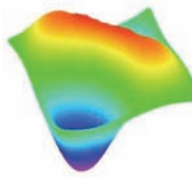
Таблица 10 – Безразмерные частотные параметры жестко защемленной пластины с наклонным разрезом (рис. 2)

Вид аппроксимации неопределенных компонент	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Степенные полиномы, $N = 15$	28,4	52,7	63,5	96,4
Сплайны, сетка 32×32	32,50	56,95	71,42	101,1

Анализ табл. 10 показывает расхождение результатов более чем на 10 % между разными аппроксимационными схемами. Данный факт, по нашему мнению связан с особенностью интегрирования каждого из аппроксимационных подходов и не имел места в случае параллельного одной из сторон разреза (табл. 5-6).

Формы свободных колебаний пластины, представленной на рис. 2, полученные с помощью сплайн-аппроксимации при жестко закрепленном контуре (разрез свободный), приведены в табл. 11.

Таблица 11 – Формы свободных колебаний и соответствующие им значения Λ_i жестко защемленной пластины со свободным диагональным разрезом

			
$\Lambda_1 = 32,50$	$\Lambda_2 = 56,95$	$\Lambda_3 = 71,42$	$\Lambda_4 = 101,1$

Анализ результатов табл. 5 и 10 показывает, что поворот свободного разреза не оказал существенного влияния на основную частоту жестко закрепленной пластины. При этом 4-я собственная частота изменилась на 4 %, что наглядно иллюстрируется «выпучиванием» соответствующей формы колебаний пластины в области свободного выреза.

При применении полиномиальной аппроксимации с более высокими степенями аппроксимирующих полиномов наблюдалась нестабильность алгоритмов линейной алгебры, таким образом дальнейшее уточнение решения усложнялось. Это обстоятельство и сопоставление сходимости результатов при полиномиальной и сплайн-аппроксимации для исследуемых пластин с разрезом, приводит к выводу о большей эффективности сплайн-аппроксимации. Однако необходимо отметить, что полиномиальная аппроксимация требует значительно меньше вычислительных затрат, поэтому в случае удовлетворительной сходимости результатов стоит отдать предпочтение ей.

Выводы

В работе предложен эффективный метод анализа влияния свободного разреза на спектр собственных колебаний пластин при разных видах граничных условий. На основе предложенного метода проведено численное исследование влияния разреза на спектр собственных частот и форм изотропных пластин при жестком защемлении и шарнирном опирании по внешнему контуру с использованием двух аппроксимационных подходов. Даны рекомендации по применимости приведенных подходов. В работе также приведено сравнение полученных результатов с ранее опубликованными, что подтверждает достоверность полученных результатов.

В дальнейшем предполагается, что база алгоритмов и программное обеспечение будут использованы для исследования пластин сложной формы с криволинейными разрезами, а также для исследования динамического поведения оболочек.

Список литературы: 1. *J.A. Crossland, S.M. Dickinson* The free vibration of thin rectangular planform shallow shells with slits // *Journal of Sound and Vibration*. – 1997. – 199(3). – P. 513–521. 2. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с. 3. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. – М., 1956. 4. *В.Л. Рвачев, Л.В. Курна, Е.О. Михаль* Проблема полноты структур решений в методе R-функций // *Наукоемкие технологии*. – 2003. – Т. 4, № 8. – С. 48-59. 5. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с. 6. *Дьяконов В.* Maple 9 в математике, физике, образовании. – «СОЛОН-Пресс», 2004 г. – 688 с. 7. *Рвачев В. Л., Курна Л.В.* R-функции в задачах теории пластин. – К.: Наукова думка, 1987. – 175 с. 8. *Справочник по теории упругости / Под ред. Варнака П.М., Рябова А.Ф.* – К.: Будівельник, 1971. – 420 с.

Поступила в редколлегию 16.11.2010