

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, ст. преп., НТУ «ХПИ»

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ЗЕРНА НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Методом ВБК побудовано наближений розв'язок граничної задачі гідродинаміки, яка описує рух по нахиленому плоскому віброрешету неоднорідної зернової суміші з експоненціальною зміною вібров'язкості по товщині шару. Проведено розрахунки, проаналізовано числові результати та похибки наближеного розв'язку.

Using the VBK method an approximate solution of the boundary of hydrodynamics describing the motion on the inclined plane vibrosieve inhomogeneous grain mixture with an exponential change in the vibratory viscosity of the layer was constructed. The calculations, analyze results and numerical error of the approximate solutions were carried out.

Методом ВБК построено приближенное решение предельной задачи гидродинамики, описывающей движение по наклоненному плоскому виброрешету неоднородной зерновой смеси с экспоненциальным изменением вибровязкости по толщине слоя. Проведены расчеты, проанализированы числовые результаты и погрешности приближенного решения.

Постановка проблемы. Моделируя движение сепарируемого зернового слоя по виброрешету, приходится учитывать изменение вибровязкости смеси по толщине слоя. Движение неоднородного слоя описывается дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, а его аналитическое решение выражается с помощью специальных функций. Такие решения не всегда удобны для инженерных приложений, поскольку могут возникать затруднения при вычислении значений специальных функций. Поэтому для проведения инженерных расчетов, наряду с точными, желательно иметь более простые приближенные решения хорошей точности. Построение таких решений является актуальным при математическом моделировании зерновых потоков в условиях вибраций.

Обзор последних исследований и публикаций. Установившееся движение неоднородного слоя виброожиженной зерновой смеси по наклонному плоскому виброрешету рассматривали в [1-7]. Изменение вибровязкости по толщине слоя в [1,2] описывали линейной функцией поперечной декартовой координаты. Случай гиперболической зависимости вибровязкости от этой координаты рассмотрен в [3], а квадратичной (параболической) – в [4]. Указанные публикации вошли в шестую главу монографии [5]. Решения краевых задач гидродинамики при нелинейных (экспоненциальной и степенной) зависимостях вибровязкости построены в функциях Кельвина в работах [6,7]. В отличие от названных публикаций здесь строится приближенное решение краевой задачи.

Целью работы является построение и апробация расчетами приближенных формул для вычисления скорости потока зерновой смеси с экспоненциальным изменением вибровязкости по плоскому решету, которое совершает продольные гармонические колебания в своей плоскости.

Средством достижения цели выбран метод ВБК [8], который обычно приводит к компактным формам решений.

Основная часть работы. При постановке и решении краевой задачи используем расчетную схему, представленную на рис. 1.

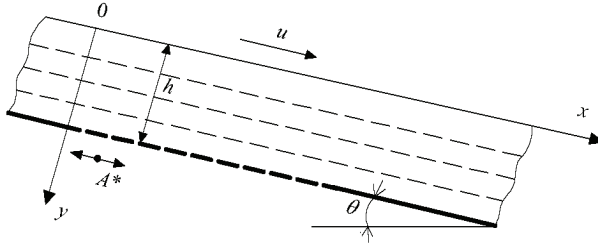


Рисунок 1 – Расчетная схема

На схеме x и y соответственно продольная и поперечная декартовы координаты; h – толщина зернового слоя; θ – угол наклона решета к горизонту; A^* , ω – амплитуда и круговая частота колебаний виброрешета в направлении оси $0x$.

В установившемся режиме движения скорость потока u в направлении оси $0x$ принимаем зависимой лишь от координаты y и времени t . Ее определение в работе [6] сведено к формуле

$$u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{\lambda^2 v_0} \cdot (\xi - \xi_1 + \xi_1 \ln \xi_1 - \xi \ln \xi) + \operatorname{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t) + \operatorname{Im} w(y) \cdot \cos(\omega t), \quad (1)$$

где $\xi = \exp(-\lambda y)$; $\xi_1 = \exp(-\lambda h)$; g – ускорение свободного падения; λ , v_0 – положительные постоянные, согласно которым изменение кинематической вибровязкости смеси v по y описывается выражением:

$$v = v_0 \exp(\lambda y);$$

$w(y)$ – комплексная функция вещественного аргумента, удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{i\omega}{\lambda^2 v_0 \xi} \cdot w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (2)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} w(\xi_1) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(\xi_1) = \operatorname{Re} \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=1} = \operatorname{Im} \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0. \quad (3)$$

Аналитическое решение этой краевой задачи в [6] выражено через функции Кельвина. Далее найдем приближенное выражение $w(\xi)$ в элементарных функциях. Для этого решим (2) приближенно методом ВБК. Согласно указанному методу в нулевом приближении:

$$w(\xi) = (c_1 + ic_2) \cdot \exp\left(\int \sqrt{\frac{i\omega}{\lambda^2 v_0 \xi}} d\xi\right) + (c_3 + ic_4) \cdot \exp\left(-\int \sqrt{\frac{i\omega}{\lambda^2 v_0 \xi}} d\xi\right). \quad (4)$$

Здесь c_1, c_2, c_3, c_4 – вещественные произвольные постоянные.

Интегрирование в (4) по ξ не вызывает затруднений, что позволяет представить вещественную и мнимую части решения (4) в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} A_1(\eta) &= \operatorname{Re} w(\xi) = \exp(\eta) \cdot (c_1 \cos \eta - c_2 \sin \eta) + \exp(-\eta) \cdot (c_3 \cos \eta + c_2 \sin \eta); \\ A_2(\eta) &= \operatorname{Im} w(\xi) = \exp(\eta) \cdot (c_1 \sin \eta + c_2 \cos \eta) + \exp(-\eta) \cdot (c_4 \cos \eta - c_3 \sin \eta); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\omega}{v_0}} \xi.$$

Подставив (5) и их производные в (3), получаем систему четырех уравнений относительно неизвестных $c_j, j = \overline{1; 4}$:

$$\begin{aligned} c_1 \cos \zeta - c_2 \sin \zeta + \exp(-2\zeta) \cdot (c_3 \cos \zeta + c_4 \sin \zeta) &= A^* \omega \exp(-\zeta); \\ c_1 \sin \zeta + c_2 \cos \zeta - \exp(-2\zeta) \cdot (c_3 \sin \zeta - c_4 \cos \zeta) &= 0; \\ c_1 \cos \tau - c_2 \sin \tau - \exp(-2\tau) \cdot (c_3 \cos \tau + c_4 \sin \tau) &= 0; \\ c_1 \sin \tau + c_2 \cos \tau + \exp(-2\tau) \cdot (c_3 \sin \tau - c_4 \cos \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{Здесь } \tau = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\omega}{v_0}}; \quad \zeta = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\omega}{v_0}} \xi_1.$$

Из системы (6) находим значения констант:

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= \pm \frac{A^* \omega \exp(-\zeta)}{\Delta} \Delta_{1,2}; \quad c_3 = c_1 \delta_1 - c_2 \delta_2; \\ c_4 &= c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1; \quad \Delta = \Delta_1^2 + \Delta_2^2; \\ \Delta_1 &= \cos \zeta + \exp(-2\zeta) \cdot (\delta_1 \cos \zeta + \delta_2 \sin \zeta); \\ \Delta_2 &= \sin \zeta + \exp(-2\zeta) \cdot (\delta_2 \cos \zeta - \delta_1 \sin \zeta); \\ \delta_1 &= \exp(2\tau) \cdot \cos(2\tau); \quad \delta_2 = \exp(2\tau) \cdot \sin(2\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (1), (5) и (7), получаем формулу скорости потока зерновой смеси:

$$u(\xi, t) = \frac{g \sin \theta}{\lambda^2 v_0} \cdot (\xi - \xi_1 + \xi_1 \ln \xi_1 - \xi \ln \xi) + A_1(\eta) \sin(\omega t) + A_2(\eta) \cos(\omega t), \quad (8)$$

где $A_1(\eta), A_2(\eta)$ определены выражениями (5) и (7).

Интенсивность сегрегации смеси на виброрешете зависит от градиента

скорости зернового потока [9]. В рамках излагаемой теории величина градиента скорости определяется производной $u'_y(y,t)$. Поэтому вычислим эту производную. Дифференцированием (8) получаем:

$$u'_y(\xi, t) = \frac{g \sin \theta}{\lambda v_0} \cdot \xi \ln \xi - \frac{\lambda \eta}{2} [c_1 f_1(\eta) - c_2 f_2(\eta) - c_3 f_3(\eta) + c_4 f_4(\eta)] \sin(\omega t) - \frac{\lambda \eta}{2} \times \\ \times [c_1 f_2(\eta) + c_2 f_1(\eta) - c_3 f_4(\eta) - c_4 f_3(\eta)] \cos(\omega t). \quad (9)$$

Здесь

$$f_{1,2}(\eta) = \exp(\eta)(\cos \eta \mp \sin \eta); \quad f_{3,4}(\eta) = \exp(-\eta)(\cos \eta \pm \sin \eta).$$

Согласно граничным условиям $u'_y(1, t) = 0$, то есть градиент скорости на свободной поверхности слоя равен нулю.

И так, формулы (8) и (9) позволяют приближенно определять скорость потока и ее градиент без вычисления значений специальных функций.

Для проведения расчетов используем исходные данные работы [6], в которой: $\theta = 5^\circ$; $A^* = 0,0075$ м; $\omega = 41,86$ с⁻¹; $\lambda = 50$ м⁻¹; $v_0 = 0,00005$ м²с⁻¹; $h = 0,006$ м.

Результаты вычисления $u(y,t)$ по формуле (8) для трех значений безразмерного времени $t_1 = \omega t \pi^{-1}$ и различных y записаны в таблице.

Значения $10 u(y,t)$, м/с при разных t_1 и y

yh^{-1}	$10 u(y,t)$, м/с			yh^{-1}	$10 u(y,t)$, м/с		
	$t_1 = 0,5$	$t_1 = 1$	$t_1 = 1,5$		$t_1 = 0,5$	$t_1 = 1$	$t_1 = 1,5$
0,0	2,37	2,45	2,68	0,5	1,75	2,37	1,91
0,05	2,36	2,45	2,67	0,6	1,70	2,32	1,38
0,1	2,33	2,44	2,66	0,7	1,80	2,17	0,62
0,2	2,22	2,43	2,60	0,8	2,09	1,84	-0,40
0,3	2,06	2,40	2,47	0,9	2,56	1,18	-1,68
0,4	1,89	2,39	2,26	1,0	3,14	0,00	-3,14

На рис. 2 указаны профили скорости, которые получены в [6] для указанных значений t_1 с помощью решения задачи гидродинамики в функциях Кельвина.

Значения скорости в таблице незначительно отклоняются от результатов, представленных на рис. 2. Этим подтверждается хорошая точность приближенного решения (8), к которому приводит метод ВБК.

Графики колебаний производной скорости и скорости при разных y нанесены на рис. 3 и 4.

Они рассчитаны по формулам (8) и (9) при $v_0 = 0,0001$ м²с⁻¹; $h = 0,01$ м и прежних остальных исходных данных. Расчеты подтверждают быстрое затухание вибрационного поля по толщине зернового слоя с удалением от поверхности виброрешета.

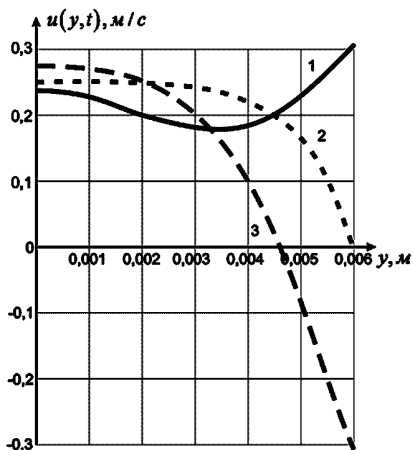


Рисунок 2 – Профили скорости потока зерновой смеси в различные моменты времени: — $t_1 = 0,5$; $t_1 = 1$; - - - - $t_1 = 1,5$

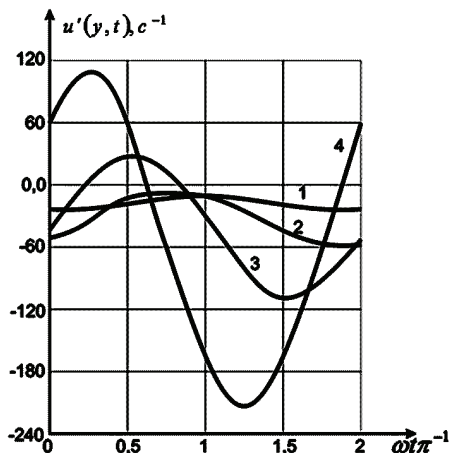


Рисунок 3 – Зависимости производной скорости от времени для разных y : 1, 2, 3, 4 – $y/h^{-1} = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

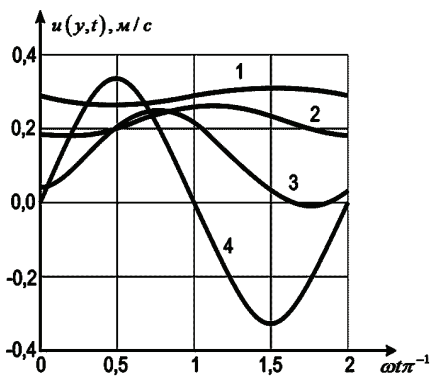


Рисунок 4 – Зависимости скорости от времени для разных y : 1, 2, 3, 4 – $y/h^{-1} = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

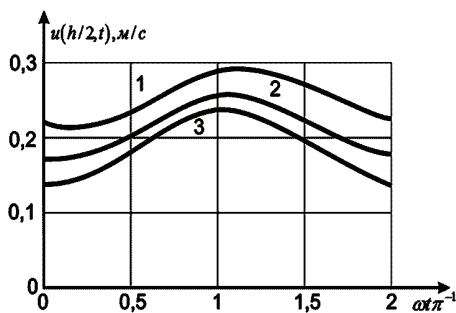


Рисунок 5 – Зависимости скорости от времени при $y = 0,5h$ и разных λ : 1, 2, 3 – $\lambda = 30; 50; 70 \text{ м}^{-1}$

О влиянии параметра λ на колебания скорости потока позволяют сделать вывод графики на рис. 5. Расчеты проведены для трех значений λ при $v_0 = 0,0001 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$; $h = 0,1 \text{ м}$ и прежних других параметрах. Значение λ существенно влияет на значение скорости, относительно которого происходят ее колебания. Амплитуды колебаний при этом меняются незначительно.

Таким образом, при экспоненциальном изменении вибровязкости зерновой смеси по толщине слоя расчет колебаний можно проводить приближенно методом ВБК, который приводит к компактным расчетным формулам, не связанным с вычислением значений специальных функций.

Список литературы: 1. Тищенко Л.Н. Колебания неоднородного зернового потока на виброрешетах / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // *Вібрації в техніці та технологіях*. – 2010. – № 4 (60). – С. 138-143. 2. Ольшанский В.П. Колебания скорости вибротранспортирования решетом неоднородного слоя зерновой смеси / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // *Транспортное машиностроение: Вестник НТУ «ХПИ»*. – Харьков: НТУ, 2010. – Вып. 38. – С. 134-139. 3. Тищенко Л.Н. К расчету колебаний неоднородного слоя зерновой смеси на виброрешете / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // *Вібрації в техніці та технологіях*. – 2011. – № 1 (61). – С. 182-185. 4. Ольшанский В.П. К расчету колебаний скорости движения зерновой смеси на плоском виброрешете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // *Динаміка та міцність машин: Вісник НТУ «ХП»*. – 2010. – Вып. 37. – С. 123-129. 5. Тищенко Л.Н. Виброрешетная сепарация зерновых смесей / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2011. – 280 с. 6. Ольшанский В.П. О колебаниях скорости движения неоднородного виброоживленного слоя зерна на плоском решете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // *Механіка та машинобудування*. – 2010. – № 1 – С. 12-19. 7. Ольшанский В.П. Динамика неоднородного слоя зерна на плоском виброрешете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // *Динамические системы*. – 2010. – Вып. 28. – С. 162-170. 8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с. 9. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна / Л.Н. Тищенко. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с.

Поступила в редколлегию 24.10.2011.