

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук, профессор, ХНТУСХ,  
Харьков;

**С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**, канд. физ.-мат. наук, ассистент, НТУ «ХПИ»

## ОБ УДАРНОМ КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВАЛА

Побудовано у вигляді рядів формули для обчислення максимального кута закручування та максимальних дотичних напружень в циліндричному стержні, один край якого жорстко закріплений, а на другому закріплено абсолютно тверде тіло, яке піддається крутному удару. Для прискорення збіжності рядів виділено та просумовано аналітично розривні складові розв'язку. Приведено приклади розрахунків.

**Ключові слова:** максимальний кут закручування, максимальні дотичні напруження, циліндричний стержень.

The form of series formula to calculate the maximum angle of twist and maximum shearing stresses in a cylindrical rod whose one end is rigidly clamped, and the second fixed perfectly rigid body subjected to torque shock were constructed. To speed up the convergence of the series are highlighted and summed analytically discontinuous components of the solution. Examples of calculations are given.

**Keywords:** maximum angle of twist, maximum shearing stresses, cylindrical rod.

Построены в виде рядов формулы для вычисления максимального угла закручивания и максимальных касательных напряжений в цилиндрическом стержне, один край которого жестко закреплён, а на втором закреплено абсолютно твердое тело, которое подвергается крутящему удару. Для ускорения сходимости рядов выделены и просуммированы аналитически разрывные составляющие решения. Приведены примеры расчетов.

**Ключевые слова:** максимальный угол закручивания, максимальные касательные напряжения, цилиндрический стержень.

**Введение.** В машиностроении ударному кручению подвергаются валы механических трансмиссий, валы торсионных подвесок транспортных средств, винты при сборке и разборке резьбовых соединений и пр.

В литературе по сопротивлению материалов [1-5] традиционно рассматривают задачи ударного кручения цилиндрических валов в упрощенной постановке, пренебрегая распределением массы валопровода по его длине. Максимальные напряжения определяют энергетическими методами. При этом не указывают величин погрешностей, к которым приводят вводимые упрощения. Чтобы получить информацию о погрешностях традиционно рекомендуемых формул, здесь решается задача в уточненной постановке с учетом волновых процессов в скручиваемом теле.

**Целью работы** является вывод и апробация расчетами формул для расчета угла закручивания и касательных напряжений в цилиндрическом стержне кругового поперечного сечения с учетом влияния на процесс удара нали-

чия жесткого тела на незакрепленном крае вала, воспринимающего ударное воздействие.

**Построение расчетных формул и проведение расчетов.** Рассматриваем наиболее опасный вариант скручивающего удара, когда торец вала  $x = 0$  неподвижен. На втором торце  $x = l$  закреплено абсолютно твердое тело, момент инерции которого относительно оси вала равен  $J_*$ . Координатная ось  $ox$  является осью вала, длина которого равна  $l$ . К торцу  $x = l$ , неподвижного вала, мгновенно прикладывается крутящий кинетический момент со стороны ударяющего тела, которое вращается с угловой скоростью  $\omega$  и имеет момент инерции  $J$ . Определим динамическое напряженно-деформированное состояние вала. Такая постановка задачи соответствует теории удара Сен-Венана [6], согласно которой после соприкосновения ударяющее и ударяемое тела некоторое время движется совместно, имея одинаковые скорости в области удара. В рассматриваемой задаче принимается равенство после начала удара угловых скоростей тел с моментами инерции  $J$  и  $J_*$ .

Для решения поставленной задачи построим изображение функции влияния  $G(x, p)$ , исходя из уравнения кручения вала, записанного в пространстве изображений по Карсону:

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} G = 0. \quad (1)$$

Здесь  $p$  – параметр интегрального преобразования;  $c = \sqrt{G_0 / \rho_0}$  – скорость волны кручения;  $G_0, \rho_0$  – модуль сдвига и плотность материала вала.

Уравнение (1) решаем при граничных условиях:

$$G(0, p) = 0; \quad \left. \frac{dG(x, p)}{dx} \right|_{x=l} = \frac{1}{G_0 J_0}. \quad (2)$$

где  $J_0 = \frac{\pi d^4}{32}$  – полярный момент инерции поперечного сечения вала с диаметром  $d$ .

Решением краевой задачи (1), (2) является:

$$G(x, p) = \frac{l}{G_0 J_0 \zeta} \frac{sh(\zeta x l^{-1})}{ch(\zeta)}. \quad (3)$$

Здесь  $\zeta = \frac{pl}{c}$ .

Выражение (3) упрощается когда  $x = l$ . Для этого сечения вала:

$$G(l, p) = \frac{l}{G_0 J_0 \zeta} th(\zeta). \quad (4)$$

Учитывая (3) и (4), находим изображение угла закручивания вала  $\Phi(x, p)$ . Согласно изложенной постановке задачи и теории Сен-Венана [6]:

$$\Phi(x, p) = \frac{J \omega p G(x, p)}{1 + (J_* + J) p^2 G(l, p)}. \quad (5)$$

Далее введем обозначения:

$$\chi_* = \chi(1 + \alpha); \quad \alpha = \frac{J_*}{J_0}; \quad \chi = \frac{J}{J_0 \rho l}; \quad A = \frac{\chi \omega l}{c}. \quad (6)$$

Используя (3), (4) и (6), вместо (5), получаем:

$$\Phi(x, p) = \frac{A}{1 + \chi_* \zeta} \frac{sh(\zeta x l^{-1})}{th \zeta} \frac{1}{ch(\zeta)}. \quad (7)$$

Переход от (7) к оригиналу проводим с помощью второй теоремы разложения. Находим выражение угла закручивания по длине вала в зависимости от времени  $t$ :

$$\phi(x, t) = A \sum_{K=1}^{\infty} \frac{e^{p_K t}}{\frac{d}{dp} [p + \chi_* p \zeta th(\zeta)]_{p=p_K}} \frac{sh(\zeta_K x l^{-1})}{ch(\zeta_K)}. \quad (8)$$

Здесь  $p_K = \frac{c}{l} \zeta_K$ ;  $\zeta_K$  – корни уравнения:

$$1 + \chi_* \zeta th \zeta = 0. \quad (9)$$

Выполнив дифференцирование в (8) по  $p$ , с учетом (9), получаем:

$$\frac{d}{dp} [p + \chi_* p \zeta th(\zeta)]_{p=p_K} = -1 - \frac{1}{\chi_*} + \chi_* \zeta_K^2. \quad (10)$$

Корни уравнения (9) чисто мнимые. Поэтому введя обозначения  $z = i\zeta$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , вместо (9), будем решать трансцендентное уравнение:

$$tgz = \frac{1}{\chi_* z}, \quad (11)$$

корни которого вещественные. Используя (8) и (10), для расчета угла поворота сечений вала получаем формулу:

$$\phi(x, t) = 2A \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin(z_K t_1)}{1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_*^2 z_K^2} \frac{\sin(z_K x l^{-1})}{\cos(z_K)}, \quad (12)$$

в которой  $t_1 = \frac{ct}{l}$  – безразмерный параметр времени;  $z_K$  – положительные корни уравнения (11).

Формула (12) упрощается при вычислении угла закручивания на торце вала. Полагая  $x = l$  и используя (11), выражение (12) сводим к виду:

$$\phi(l, t) = 2A \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin(z_K t_1)}{z_K (1 + \chi_* + \chi_*^2 z_K^2)}. \quad (13)$$

Чтобы определить напряжения кручения у внешней поверхности вала  $\tau(x,t)$  продифференцируем выражение (12) по  $x$ . Тогда

$$\tau(x,t) = \frac{G_0 d}{2} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} = B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k \sin(z_k t_1) \cos(z_k x l^{-1})}{1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* z_k^2}.$$

Здесь  $B = \chi \omega d G_0 c^{-1}$ .

Наибольший интерес представляет вычисление напряжений в сечениях:  $x = 0$ , где закреплен вал и  $x = l$ , где происходит удар. Для этих сечений:

$$\tau(0,t) = B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k \sin(z_k t_1)}{\left(1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* z_k^2\right) \cos(z_k)}.$$
 (14)

$$\tau(l,t) = B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k \sin(z_k t_1)}{1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* z_k^2}.$$
 (15)

Выделим в формуле (15) разрывную составляющую. С увеличением  $k$  корни уравнения (11)  $z_k$  асимптотически стремятся к числам  $(k-1)\pi$ . Учитывая такую асимптотику, преобразуем (15) к виду:

$$\tau(l,t) = B \left[ \frac{z_1 \sin(z_1 t_1)}{1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* z_1^2} + \frac{1}{\chi_*} S_1(t_1) + S_2(t_1) \right],$$
 (16)

где  $S_1(t_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_* k \pi \sin(k \pi t_1)}{1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* \pi^2 k^2}$ .

Сумма этого ряда выражается в замкнутом виде [7]

$$S_1(t_1) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 & t_1 = +0 \\ \frac{sh(b(1-t_1))}{sh b} & \text{при } +0 < t_1 < 2-0 \\ -1 & t_1 = 2-0, \end{cases}$$
 (17)

причем  $b = \frac{\sqrt{1 + \chi_*}}{\chi_*}$ .

Функция  $S_1(t_1)$  периодическая. Ее период равен 2, то есть  $S_1(t_1 + 2) = S_1(t_1)$ , а поэтому (17) позволяет вычислять  $S_1(t_1)$  при любых  $t_1$ . В точках  $t_1 = 2, 4, 6, \dots$ , функция  $S_1(t_1)$  имеет разрывы первого рода с высотой скачка, равной единице.

Слагаемое  $S_2(t_1)$  в (16) непрерывно и разлагается в ряд

$$S_2(t_1) = \sum_{K=2}^{\infty} \left[ \frac{z_K \sin(z_K t_1)}{1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* z_K^2} - \frac{\pi(k-1) \sin((k-1)\pi t_1)}{1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* \pi^2 (k-1)^2} \right],$$

который сходится быстрее, чем (15).

Преобразуем аналогичным образом и формулу (14). Ее запишем в виде

$$\tau(0, t) = B \left[ \frac{z_1 \sin(z_1 t_1)}{\left(1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* z_1^2\right) \cos z_1} + \frac{1}{\chi_*} T_1(t_1) + T_2(t_1) \right]. \quad (18)$$

Здесь разрывным слагаемым является:

$$T_1(t_1) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\chi_* k \pi (-1)^K \sin(k\pi t_1)}{1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* \pi^2 k^2}.$$

Сумма этого ряда выражается в замкнутом виде [7]

$$T_1(t_1) = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 & t_1 = -1+0 \\ -\frac{sh(b t_1)}{sh b} & \text{при } -1+0 < t_1 < 1-0 \\ -1 & t_1 = 1-0. \end{cases} \quad (19)$$

Период  $T_1(t_1)$  равен 2. Поэтому с помощью (19) можно вычислить  $T_1(t_1)$  при любых  $t_1$ . В точках  $t_1 = 1, 3, 5, \dots$  функция  $T_1(t_1)$  имеет разрывы первого рода с величиной скачка равной единице.

Слагаемое  $T_2(t_1)$  в (18) непрерывно и разлагается в ряд:

$$T_2(t_1) = \sum_{K=2}^{\infty} \left[ \frac{z_K \sin(z_K t_1)}{\left(1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* z_K^2\right) \cos z_K} + \frac{(-1)^k \pi (k-1) \sin((k-1)\pi t_1)}{1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* \pi^2 (k-1)^2} \right].$$

Его сходимость более быстрая, чем ряда в (14).

Таким образом, проведенное преобразование предоставило возможность определять касательные напряжения в ударяемом теле, с учетом разрывов, порожденных распространением волн кручения.

Для проведения расчетов нужно знать положительные корни уравнения (11). Чтобы упростить их вычисление, положим:

$$z_K = (k-1)\pi + \varepsilon_K. \quad (20)$$

Тогда, вычисление  $\varepsilon_K$  можно проводить по итерационной формуле:

$$\varepsilon_K^{(n+1)} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\chi_* \left[ (k-1)\pi + \varepsilon_K^{(n)} \right]}, \quad (21)$$

в ней  $n = 0, 1, 2, \dots$  – номер итерации;  $k$  – номер корня.

Начальным приближением служит  $\varepsilon_K^{(0)} = 1$  или  $\varepsilon_K^{(0)} = 1/\chi_*$ , когда  $\chi_* > 1$ .

С увеличением  $\chi_*$  сходимость итераций по формуле (21) замедляется. Поэтому при  $\chi_* > 5$  применение итераций нецелесообразно. Более удобно  $\varepsilon_K$  определять по формуле:

$$\varepsilon_K = \left( \frac{\chi_*^2 a_K^2}{4(\chi_* + 1/3)^2} + \frac{1}{\chi_* + 1/3} \right)^{1/2} - \frac{\chi_* a_K}{2(\chi_* + 1/3)}, \quad (22)$$

в которой  $a_K = (k-1)\pi$ .

К зависимости (22) приводит аппроксимация

$$\operatorname{tg} \varepsilon_K \approx \frac{\varepsilon_K}{1 - \frac{1}{3} \varepsilon_K^2},$$

имеющая малую погрешность при малых  $\varepsilon_K = 1$ . Например, когда  $\varepsilon_K \leq 0,3$ , погрешность аппроксимации меньше 0,02 %.

Для проведения расчетов воспользуемся исходными данными работы [1], в которой:  $G_0 = 8 \cdot 10$  Па;  $\rho_0 = 7810$  кг/м<sup>3</sup>;  $l = 1$  м;  $d = 0,06$  м;  $J = 0,25$  кгм<sup>2</sup>;  $\omega = 12,57$  с<sup>-1</sup>;  $J_* = 0$ .

Результаты вычисления  $\phi(l, t)$  с помощью (13), а также по упрощенной формуле

$$\phi(l, t) = 2A \frac{\sin(z_1 t_1)}{z_1 (1 + \chi_* + \chi_*^2 z_1^2)}, \quad (23)$$

в которой  $z_1 = (\chi_* + 1/3)^{-1/2}$ , записаны в табл. 1. В частичной сумме ряда (13) вычисляли 100 членов.

Таблица 1 – Значения  $\phi(l, t)$ , вычисленные по двум формулам

$10^3 t, \text{ с}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$10^3 \phi(l, t)$ , по (13)	6,0892	11,5851	15,9315	18,6873	19,5680	18,4977
$10^3 \phi(l, t)$ , по (23)	6,0990	11,5904	15,9271	18,6773	19,5668	18,5071

Для принятых исходных данных формулы (13) и (23) приводят к близким результатам, что подтверждает быструю сходимость ряда в (13). Максимальный угол закрутки  $\phi_g = \max \phi(l, t)$  достигается при

$t \approx \frac{\pi l}{2c} \sqrt{\chi_* + 1/3} \approx 0,00248$  с и равен приблизительно  $1,957 \cdot 10^{-2}$  рад. Его вычисление по формуле

$$\phi_g = \omega \sqrt{\frac{Jl}{G_0 J_0}}, \quad (24)$$

из справочника [4], дает  $\phi_g \approx 1,970 \cdot 10^{-2}$  рад, что немного больше, чем теория Сен-Венана. Для указанного угла закрутки максимальные касательные напряжения

$$\max \tau = \frac{G_0 d \phi_g}{2l} \quad (25)$$

составляют  $473 \cdot 10^5$  Па и хорошо согласуются с [1], где  $\max \tau \approx 476 \cdot 10^5$  Па.

Массив корней уравнения (11), которые подставляли в формулу (13), определяли по (21), (22). Некоторые значения этих корней указаны в табл. 2.

Таблица 2 – Значения  $z_k$  при  $\chi_* = 25,158463$

$k$	$z_k$	$k$	$z_k$	$k$	$z_k$
1	0,198061	4	9,428993	20	59,690929
2	3,154194	5	12,569533	50	153,93831
3	6,289505	10	28,275740	100	311,01779

При больших  $k$  корни  $z_k$  близки к  $(k-1)\pi$ . Уже при  $k=5$  они незначительно отличаются от  $4\pi \approx 12,566371$ .

О влиянии жесткого тела на краю вала, которое подвергается удару, позволяют судить графики на рис. 1, где нанесены кривые изменения  $\phi(l,t)$  для трех значений  $\alpha$ .

Расчеты показали, что с увеличением  $\alpha$  (или  $J_*$ ) уменьшаются динамические углы закручивания вала, причем изменение  $\phi(l,t)$  с хорошей точностью описывается компактной формулой (23).

Если использовать энергетические соотношения, то для расчета угла закручивания получаем формулу

$$\phi_g = \omega \sqrt{\frac{Jl\chi}{G_0 J_0 (\chi_* + K_0)}}, \quad (26)$$

в которой  $K_0$  – коэффициент приведения массы вала. При  $K_0 = 0$  и  $\chi = \chi_*$  ( $J_* = 0$ ) формула (26) переходит в (24).

Для проведения расчетов, с учетом массы вала, в (26) нужно положить  $K_0 = 1/3$  или  $K_0 = 4\pi^{-2}$ .

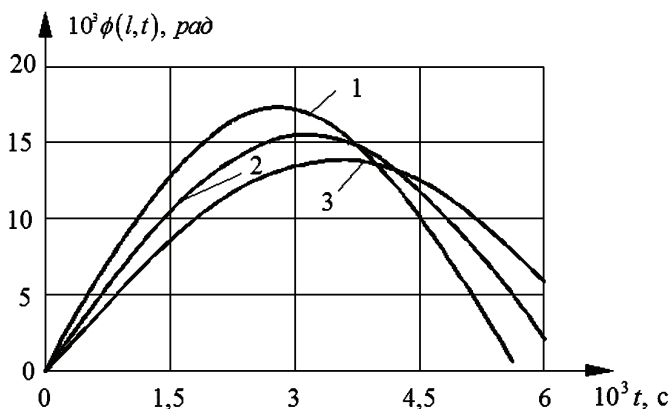


Рисунок 1 – Графики угла закручивания при разных  $\alpha$ : 1 –  $\alpha = 0,3$ ; 2, –  $\alpha = 0,6$ ; 3 –  $\alpha = 1$

Таблица 3 – Значения  $\phi_g$ , вычисленные по (13) и (26) при разных  $K_0$

$\alpha$	$10^2 \phi_g$ , по (13)	$10^2 \phi_g$ , вычислены по (26), при:			
		$K_0 = 1/3$	$K_0 = 4\pi^{-2}$	$K_0 = 0$	$K_0 = 1$
0	1,957	1,957	1,954	1,970	1,932
0,2	1,789	1,788	1,786	1,798	1,769
0,4	1,657	1,657	1,655	1,665	1,642
0,6	1,551	1,551	1,550	1,557	1,538
0,8	1,463	1,463	1,462	1,468	1,452
1,0	1,388	1,388	1,387	1,393	1,379
2,0	1,135	1,135	1,134	1,137	1,130

О согласовании результатов, к которым приводят формулы (13) и (26), позволяют судить числа, указанные в табл. 3.

Лучшее согласование результатов имеем при  $K_0 = 1/3$ . В случае  $K_0 = 0$  формула (26) завышает значения  $\phi_g$ , а при  $K_0 = 1$  – занижает их. Следовательно,  $\phi_g$ , удовлетворяют неравенствам:

$$\phi_1 < \phi_g < \phi_2,$$

в которых  $\phi_j = \omega \sqrt{\frac{J l \chi}{G_0 J_0 (\chi_* + 2 - j)}}$ ;  $j = \overline{1; 2}$ .

Разность между  $\phi_1$  и  $\phi_2$  уменьшается с увеличением  $\chi_*$ .

Результаты вычисления касательных напряжений  $\tau(l, t)$  по формулам (16), (17) графически представлены на рис. 2. Они получены для трех значений  $\alpha$ . Увеличение момента инерции  $J_*$  приводит к понижению уровня напряжений. При  $\alpha = 0$   $\max \tau(l, t) \approx 5,68 \cdot 10^7$  Па достигается в момент времени,



соответствующий  $t_1 = 8$ , и превышает значение  $4,76 \cdot 10^7$  Па, которое получено в [1], без учета волновых процессов.

На рис. 3 показаны графики  $\tau(0,t)$ , рассчитанные по формулам (18), (19). Характерно, что до прихода волны кручения к закрепленному торцу ( $t_1 < 1$ ), там касательные напряжения равны нулю. При  $\alpha = 0$  максимум касательных напряжений  $\tau(0,t)$  достигается раньше, чем в сечении  $x = l$  ( $t_1 = 7$ ), и приблизительно равен  $\max \tau(l,t)$ . Увеличение  $\alpha$  уменьшает максимумы напряжений и смещает их в сторону больших  $t_1$ . Защитный «эффект ослабления удара» дополнительной присоединенной массой проявляется для обоих сечений вала.

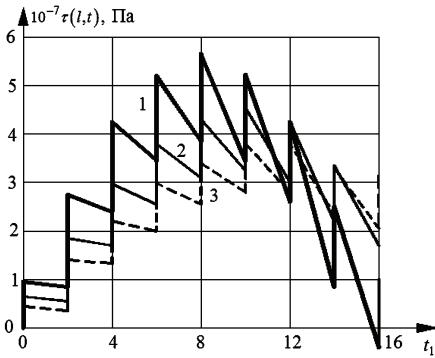


Рисунок 2 – Графики  $\tau(l,t)$  при разных  $\alpha$ : 1 –  $\alpha = 0$ ; 2, –  $\alpha = 0,5$ ; 3 –  $\alpha = 1$

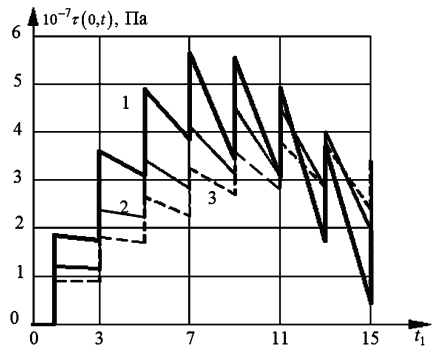


Рисунок 3 – Графики  $\tau(0,t)$  при разных  $\alpha$ : 1 –  $\alpha = 0$ ; 2, –  $\alpha = 0,5$ ; 3 –  $\alpha = 1$

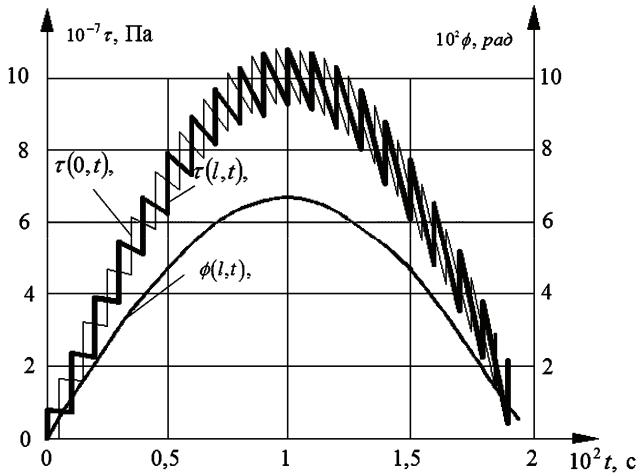


Рисунок 4 – Графики угла закручивания и напряжений ( $\alpha = 0$ )

С целью дальнейшей верификации полученных расчетных формул, проведены вычисления угла закручивания и напряжений на торцах стального вала при  $\alpha = 0$ ;  $l = 1,6$  м;  $d = 0,06$  м;  $\omega = 10,6$  с<sup>-1</sup>;  $J = 2,5125$  кгм<sup>2</sup>. Эти значения параметров определены в [4] из условия, что  $\max \tau = 10^8$  Па. Расчет напряжений проводили по формулам (24), (25), без учета волновых процессов. Результаты вычисления  $\phi(l, t)$ ,  $\tau(0, t)$  и  $\tau(l, t)$  по изложенной теории графически представлены на рис. 4.

Здесь  $\max \phi(l, t) \approx 6,654 \cdot 10^{-2}$  рад;  $\max \tau(0, t) \approx \max \tau(l, t) = 1,08 \cdot 10^8$  Па. Вследствие большого значения  $J$ , по сравнению с моментом инерции вала, время достижения максимумов угла закручивания и напряжений отличаются незначительно, то есть масса вала почти не влияет на протекание процесса удара. Сравнение напряжений на рис. 4 и в работе [4] приводит к заключению, что напряжения, вычисленные без учета волновых процессов, оказываются меньшими, чем полученные с учетом распространения волн.

**Выводы.** Изложенная теория адекватно описывает явление ударного кручения цилиндрического вала, на краю которого закреплено жесткое тело заданного момента инерции. Полученные формулы позволяют рассчитывать изменения во времени угла закручивания и касательных напряжений с учетом разрывов, вызванных распространением упругих волн.

**Список литературы:** 1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с. 2. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с. 3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М. Наука, 1976. – 608 с. 4. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф. Винокуров, М.К. Балькин, И.А. Голубев и др. – Минск: Наука и техника, 1988. – 464 с. 5. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов / С.П. Фесик. – К.: Будівельник, 1982. – 280 с. 6. Филиппов А.П. Колебания механических систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с. 7. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

Поступила в редколлегию 12.03.2012