

Д.В. ЛАВИНСКИЙ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

В статье представлен метод анализа связанных электромагнитных и механических полей в технологических системах. Связанность учтена с помощью объемных электромагнитных сил, которые определяются по результатам анализа распределения электромагнитного поля. Для определения характеристик электромагнитного поля используются понятия векторного магнитного потенциала. Решение предполагается по схеме метода конечных элементов. Проведено решение для системы «индуктор – проводник». Представление сравнения с аналитическим решением. Проанализировано распределение интенсивности напряжений.

Ключевые слова: электромагнитные поля, векторный магнитный потенциал, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние.

Введение и актуальность проблемы. Высокоинтенсивные электромагнитные поля (ЭМП) являются условиями эксплуатации множества технических и технологических объектов. Взаимодействие ЭМП с электропроводными телами может приводить к их движению и деформированию. Уровни энергии, развиваемой ЭМП могут значительными до такой степени, что могут привести к разрушению элементов конструкций и машин. Создание эффективных методов анализа напряженно-деформированного состояния электропроводных тел при действии ЭМП является актуальной проблемой в научном и практическом плане. Отметим, что традиционные подходы предусматривают последовательный анализ распределения векторных характеристик ЭМП, подсчет электромагнитных сил (объемных либо поверхностных) и анализ НДС. Аналитические методы решения рассматривают, как правило, тела канонической формы. Таким образом, на современном этапе целесообразным является применение численных методов анализа подобных задач.

Математическая постановка задачи. Анализ распределения векторных характеристик ЭМП и тензорных характеристик процесса деформирования опирается на две группы уравнений. Первая группа описывает процессы распространения ЭМП в материале, при этом наиболее часто используются представления Максвелла, которые легли в основу одноименных дифференциальных уравнений, связывающих вектора напряженности электрического и магнитного поля, вектора электрической и магнитной индукции, тока и заряды.

Нестационарное деформирование системы взаимодействующих тел описывается известными соотношениями, которые включают дифференци-

альные уравнения движения, геометрические зависимости (например, в форме Коши) и уравнения состояния. Последние могут описывать упругое, упруго-пластическое либо пластическое поведение материала.

Дифференциальные уравнения, описывающие нестационарное распределение ЭМП и процессы деформирования, должны дополняться соответствующими граничными и начальными условиями. В тех случаях, когда рассматривается деформирование составных конструкций, также должны вводиться условия «сопряжения» на границах взаимодействия. Эти условия должны отражать как процессы проникновения ЭМП через границу раздела, так и механические процессы (начальный зазор (натяг), сцепление, проскальзывание, трение). Одним из возможных способов учета контактного взаимодействия при решении подобных задач является введение контактных слоев [1]. Фактически, контактный слой – это искусственно вводимое между взаимодействующими новое тело, физико-механические свойства которого позволяют в определенных рамках моделировать условия реального контакта. Доказана эффективность введения контактных слоев для решения задач механики, в то же время использование контактных слоев при решении задач распространения ЭМП не нашло широкого применения. По нашему мнению, использование контактных слоев при анализе деформирования составных конструкций при наличии ЭМП является оправданным, так как позволяет рассматривать задачу в рамках единой расчетной схемы.

Явление связанности ЭМП и полей механических напряжений и деформаций традиционно учитывается через рассмотрение объемных электромагнитных сил.

Полная математическая постановка упруго-пластического деформирования системы взаимодействующих тел при наличии импульсного ЭМП приведена, например, в работе [2].

Во многих случаях геометрия и условия работы технологической системы позволяют свести задачу анализа ЭМП и НДС к осесимметричной постановке. При проведении численного либо численно-аналитического анализа распространения ЭМП удобно использовать понятие векторного магнитного потенциала [3] $\vec{A}(r, z, \varphi, t)$. Он вводится из условия: $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$. Так как, в осесимметричной постановке вектор магнитной индукции всегда лежит в меридиональной плоскости rOz , векторный магнитный потенциал будет иметь только одну ненулевую компоненту – окружную. В этом случае распределение ЭМП в цилиндрической системе координат при нестационарном внешнем воздействии описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mu_0 J = \mu \lambda \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (1)$$

где μ , λ – удельная магнитная проницаемость и электропроводность материала подобласти, A – окружная компонента векторного магнитного потенциала, J – плотность тока.

В работе [4] доказано, что в случае импульсного ЭМП при оценке прочности возможно использование квазистационарного приближения. В дальнейшем мы будем проводить исследования в рамках данного приближения.

Эффективным методом анализа поставленной задачи является метод конечных элементов (МКЭ). В основу конкретного использования МКЭ может быть положено вариационное уравнение, описывающее условие минимума полной энергии системы:

$$\delta E = 0, \quad E = U + W, \quad (2)$$

здесь U – энергия упругого деформирования, W – энергия ЭМП, которая может быть представлена в виде:

$$W = \int_V \int_0^B \bar{H} d\bar{B} dV, \quad (3)$$

где \bar{H} – вектор напряженности магнитного поля, \bar{B} – вектор магнитной индукции. Выражение в виде (3) рассматривается в том случае, когда имеет место нелинейная зависимость между \bar{H} и \bar{B} . Если эффектами нелинейности можно пренебречь, тогда выражение (3) упрощается и может быть представлено в векторно-матричном виде следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \{A\}^T [M] \{A\}, \quad (4)$$

где $[M]$ – «магнитная» матрица материала, которая зависит от его электрофизических свойств и геометрии рассматриваемого тела, $\{A\}$ – вектор-столбец магнитного потенциала. Подобным образом можно представить и энергию упругого деформирования:

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\}, \quad (5)$$

где $\{u\}$ – вектор-столбец перемещений, $[K]$ – матрица жесткости.

Теперь применим операцию варьирования к функции полной энергии с учетом соотношений (4) и (5):

$$\delta E = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial u} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [M] \{A\} + [M_k] \{u\} = 0; \\ [K] \{u\} + [K_m] \{A\} = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$[M_k] = \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \{A\}}; \quad [K_m] = \frac{1}{2} \{A\}^T \frac{\partial [M]}{\partial \{u\}},$$

здесь $[M_k]$ и $[K_m]$ – матрицы, которые характеризуют взаимное влияние ЭМП и механических полей (связанность задачи). Если пренебречь эффектами магнитострикции (которые выражает матрица $[M_k]$), то формально система уравнений распадается на два уравнения, которые можно решать последовательно. Слагаемое $[K_m] \{A\}$ из второго уравнения – это не что иное, как век-

тор-столбец электромагнитных сил, взятый с обратным знаком. Этот факт легко проверить, если применить принцип виртуальной работы к выражению (4). Приведенный способ учета электромагнитных сил, по нашему мнению, является более предпочтительным по сравнению с традиционным, когда значения электромагнитных сил вычисляются отдельно. Отметим, что подобный подход к учету электромагнитных сил представлен, например, в работе [5].

Пример расчета и анализ полученных результатов. В качестве примера использования предложенного метода анализа рассмотрим систему «индуктор – проводник», решение для которой приводится в работе [6] и базируется на методе использования интегральных уравнений для расчета ЭМП, предложенном в работах [3,7].

Здесь индуктор представляет собой кольцо с прямоугольным меридиональным сечением высотой $2a$. Проводник – прямой цилиндр, высота которого больше высоты индуктора. Были приняты следующие числовые данные: $a = 0,1$ м; $r_2 = 0,22$ м; $r_3 = 0,1$ м; $\delta_0 = 0,02$ м. Материал индуктора – магнитная сталь, материал проводника – медь. Источником поля выступает ток, равномерно распределенный по сечению индуктора с амплитудой плотности $J = 50$ кА/м².

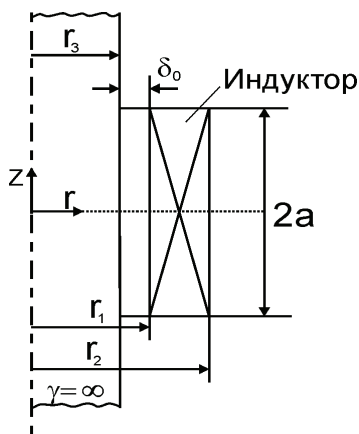


Рисунок 1 – Расчетная схема

Численное решение с использованием МКЭ согласно методу, описанному в данной работе, проводилось для схожей расчетной схемы. Отличия состояли в том, что проводник рассматривался конечной высоты ($4a$), система взаимодействующих тел окружалась воздушной средой, на внешних границах которой задавались условия затухания векторного магнитного потенциала.

На рис. 2 приведено качественное распределение касательной компо-

ненты магнитной индукции по поверхности проводника. Сравнение решения МКЭ и аналитического решения показывает достаточную степень приближения. Отметим, что максимальное расхождение не превышает 15 %. В то же время аналитическое решение не может считаться абсолютно точным, так как оно не учитывало внешнюю (воздушную) среду. В подобных задачах аналитические решения могут рассматриваться как завышенное оценочное приближение.

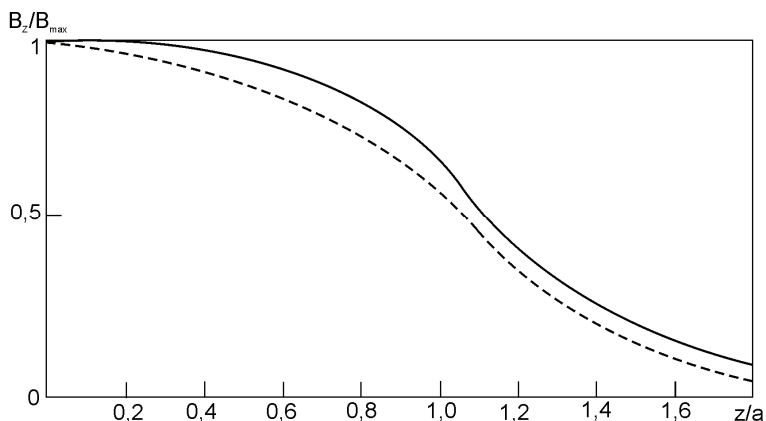


Рисунок 2 – Распределение касательное составляющей магнитной индукции на поверхности проводника (нормировка на максимум). Сплошная линия – аналитическое решение; штриховая линия – решение МКЭ

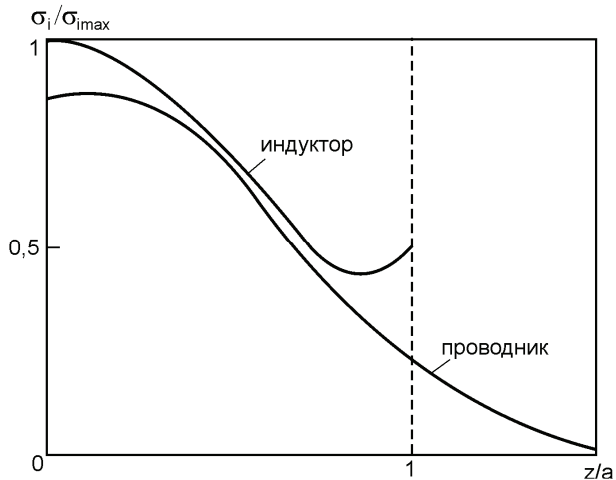


Рисунок 3 – Распределение интенсивности напряжений по внутренней поверхности индуктора и по внешней поверхности проводника (нормировка на максимум)

Далее рассмотрим некоторые результаты упругого деформирования индуктора и проводника. На торцах они принимались жестко закрепленными, нагрузкой выступали электромагнитные силы, вводимые по способу, указанному ранее. Качественное распределение интенсивности напряжений (рис. 3) показывает, что индуктор является более нагруженным по сравнению с проводником, у которого на удалении от источника поля интенсивность напряжений стремится к нулю.

Выводы. Представлен метод анализа распределения векторных характеристик ЭМП и тензорных характеристик НДС. Связанность ЭМП и полей механических напряжений и деформаций, осуществляется при помощи введения электромагнитных сил. Представлены расчеты в рамках осесимметричной расчетной схемы для системы «индуктор – проводник».

Список литературы: 1. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А.Н.Подгорный, П.П.Гонтаровский, Б.Н.Киркач и др. – К.: Наукова думка, 1989. – 232 с. 2. Лавинський Д.В. Задачі пружно-пластичного деформування тіл при магнітно-імпульсному навантаженні / Лавинський Д.В. // *Машинознавство*. – № 7-8 (169-170). – Львів: «КІНПАТРІ ЛТД», 2011. – С. 48-51. 3. Тозони О.В., Расчет трехмерных электромагнитных полей / Тозони О.В., Маергойз И.Д. – К.: Техніка, 1974. – 352 с. 4. Батыгин Ю.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю.В.Батыгин, В.И. Лавинский, Л.Т. Хименко. – Х.: МОСТ-Торнадо, 2003. – 288 с. 5. Тозони О.В., Расчет трехмерных электромагнитных полей / Тозони О.В., Маергойз И.Д. – К.: Техніка, 1974. – 352 с. 5. Ren Z. Calculation of local magnetic forces in magnetized materials / Z.Ren, M.Besbes, S.Boukhache // *Proc. International Workshop on Electric and Magnetic Fields*. – 1992. – PP. 64.1-64.6. 6. Подольцев А.Д. Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах / А.Д.Подольцев, И.Н.Кучерявая. – К.: Изд. Ин-та электродинамики НАН Украины, 1999. – 363 с. 7. Тозони О.В., Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах / Тозони О.В. – К.: Техніка, 1967. – 252 с.

Bibliography (transliterated): 1. Zadachi kontaktного vzaïmdeïstvïya elementov konstrukcij. A.N.Podgornyj, P.P.Gontarovskij, B.N.Kirkach i dr. Kyiv: Naukova dumka, 1989. 232 Print. 2. Lavins'kyj D.V. Zadachi pruzhno-plastychnoho deïformuvannya til pry mahnitno-ïmpul'snomu navantazhenï. Lavins'kyj D.V. Mashynoznavstvo. № 7-8 (169-170). L'viv: «KINPATRI LTD», 2011. 48-51 Print. 3. Tozoni O.V., Raschet trehmernyh elektromagnitnyh polej / Tozoni O.V., Maergojz I.D. Kyiv: Tehnika, 1974. 352 Print. 4. Batygin Yu.V. Impul'snye magnitnye polya dlya progressivnyh tehnologij. Yu.V.Batygin, V.I. Lavinskij, L.T. Himenko. Kharkiv: MOST-Tornado, 2003. 288 Print. 5. Tozoni O.V., Raschet trehmernyh elektromagnitnyh polej. Tozoni O.V., Maergojz I.D. Kyiv: Tehnika, 1974. 352 Print. 5. Ren Z. Calculation of local magnetic forces in magnetized materials. Z.Ren, M.Besbes, S.Boukhache. Proc. International Workshop on Electric and Magnetic Fields. 1992. 64.1-64.6 Print. 6. Podol'cev A.D. Elementy teorii i chislennogo rascheta elektromagnitnyh processov v provodyaschih sredah. A.D.Podol'cev, I.N.Kucheryavaya. Kyiv: Izd. In-ta elektrodinamiki NAN Ukrainy, 1999. 363 Print. 7. Tozoni O.V., Raschet elektromagnitnyh polej na vychislitel'nyh mashinah. Tozoni O.V. Kyiv: Tehnika, 1967. 252 Print.

Поступила (received) 22.07.2014