

Ю. М. АНДРЕЄВ, В. Л. ДЗЮБА

УДОСКОНАЛЕНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ РОБОТОТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ У ССКА КІДИМ

У роботі представлені результати досліджень аналітичного алгоритму побудови системи лінійних рівнянь для визначення рушійних сил і моментів у ланках робототехнічних пристроїв довільної структури під час руху. Цей алгоритм реалізується як аналітичний алгоритм у спеціальній системі комп'ютерної алгебри (ССКА) КіДиМ, на основі якого формуються чисельні розрахунки зазначених сил та моментів у процесі виконання робочих процесів, позиціонування механізмів у необхідні положення, паркувальні переміщення тощо. Програмний комплекс КіДиМ служить для вирішення завдань механіки широкого класу дискретних механічних систем довільної структури та виду рухів його ланок для розрахунків інженерної та наукової спрямованості. Наведено теоретичне обґрунтування розробленого нового підходу, аналітичний та чисельний доказ його ефективності з погляду процесу автоматичного отримання роздільних рівнянь, обчислювальної ефективності та точності результатів. Пропонований алгоритм є результатом розвитку реалізованого раніше в ССКА КіДиМ аналітичного за цілями алгоритму. На відміну від реалізованого раніше алгоритму, який формує вирішальну систему рівнянь після побудови рівнянь динаміки шляхом їх аналітичних перетворень, новий алгоритм вбудовується у процес формування рівнянь динаміки – здійснює сортування елементів моделі – інерційні, дисипативні, пружні та силові елементи відомих сил та моментів формують праву частину, а силові елементи з невідомими силами і моментами формують матрицю лівої частини рівнянь, що розв'язують обернену задачу динаміки. У статті дано порівняльний аналітичний висновок одного та іншого алгоритму і показано збіг одержуваних рівнянь. Також на прикладах розрахунків оберненої задачі динаміки портального крана та двох 6-ти ступеневих маніпуляторів показані переваги нового підходу.

Ключові слова: обернені задачі динаміки, рівняння динаміки роботів, розрахунки рушійних сил та моментів складних механізмів.

The paper presents the results of studies of an analytical algorithm for constructing a resolving system of linear equations to determine the driving forces and moments in the links of robotic devices of arbitrary structure during movement. This algorithm is implemented as an analytical algorithm in a special computer algebra system (SCAS) KiDiM, on the basis of which numerical calculations of the specified forces and moments are generated in the process of performing work processes, positioning mechanisms in the required positions, parking movements, etc. The KiDiM software package is used to solve mechanics problems of a wide class of discrete mechanical systems of arbitrary structure and type of motion for engineering and scientific calculations. A theoretical justification for the developed new approach, analytical and numerical proof of its effectiveness from the point of view of the process of automatically obtaining resolving equations, computational efficiency and accuracy of results are presented. The proposed algorithm is the result of the development of an algorithm that was previously implemented in SCAS KiDiM and was similar in purpose. Unlike the previously implemented algorithm, which generates a resolving system of equations after constructing the dynamic equations, the new algorithm is built into the process of generating dynamic equations - it sorts the model elements - inertial, dissipative, elastic and force elements of known forces and moments form the right side, and force elements with unknown forces and moments, they form a matrix of the left side of equations that solve the inverse problem of dynamics. The article gives a comparative analytical conclusion of one and another algorithm and shows the coincidence of the resulting equations. Also, using examples of calculations of the inverse problem of the dynamics of a portal crane and two 6-degree manipulators, the advantages of the new approach are shown.

Key words: inverse problems of dynamics, equations of robot dynamics, calculations of driving forces and moments of complex mechanisms.

Вступ. Розв'язання обернених задач динаміки в процесі проектування, доведення, експлуатації, для цілей управління складних механізмів, широким класом яких в сучасному машинобудуванні є робототехнічні системи, має велике значення. Стосовно термінів «пряма та обернена (зворотна) задача динаміки» існує деяка плутанина у вітчизняній літературі. Більш поширене використання мають терміни «перша та друга задачі» [1]. Тут будемо дотримуватися термінології, яка поширена в сучасній робототехніці [2]. Під оберненою задачею динаміки будемо розуміти «знайти за заданими законами зміни узагальнених координат діючи у зчленуваннях рушійні сили і моменти». Такі задачі потрібно ставити і розв'язувати дуже часто в умовах зміни структури і параметрів механізмів в процесі проектування, зміни умов використання їх при експлуатації, на початковому етапі розробки систем управління. Тому дуже актуально мати можливість зручного ефективного вирішення поставленої проблеми.

В статті розглядається питання поліпшення аналітичного комп'ютерного алгоритму автоматичної побудови системи лінійних рівнянь для обчислення

рушійних сил і моментів в механізмах довільної складності [3–5], який реалізовано в спеціальній системі комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ).

ССКА КіДиМ – це спеціально розроблений комплекс програм [6–8] для розв'язання цілої низки задач механіки – прямої і оберненої кінематики, прямої і оберненої динаміки, статички – визначення врівноважуючих сил та моментів, розрахунку положень рівновагі, вільних та вимушених коливань, деяких задач аналізу та синтезу механічних систем та ін. Клас механічних систем, що тут розглядається достатньо широкий – це дискретні механічні системи, що описуються узагальненими та псевдокоординатами з будь-якими в'язами, в тому числі – нестационарними, неутримуючими, неголономними [8].

Нижче буде наведено аналітичний вивід нового алгоритму, показано еквівалентність за результатами складання розв'язувальної системи лінійних рівнянь та на чисельних розрахунках оберненої задачі динаміки плоскої моделі портального крана та 6-ти ступеневих просторових маніпуляторах, приведені оцінки переваг нового алгоритму відносно раніше реалізованого [3–5].

Постановка задачі. В статті пропонується альтернативний існуючому в ССКА КіДиМ і функціонуючий там же для розв'язання обернених задач механічних систем того ж класу, що розглядаються там. Але він потребує меншу кількість математичних операцій при побудові тієї ж самої системи лінійних рівнянь що розв'язують задачу. Крім того він будує матрицю лівої частини і вектор правої частини вказаної системи не після отримання рівнянь динаміки, а в процесі побудови таких рівнянь. Це приводить до більш швидкої роботи алгоритму.

Ключова відмінність ССКА КіДиМ від більшості інженерних та наукових програмних пакетів в галузі механіки полягає в тому, що у вихідних даних на аналітичному рівні записується механічна модель машини, механізму, або процесу шляхом запису *елементів моделі*, як складових механічної моделі – її інерційних, силових, пружних і дисипативних властивостей. Що дозволяє легко змінювати структуру і параметри моделі. Після вводу такої інформації вбудована система комп'ютерної алгебри діагностує вхідну інформацію і отримує математичну модель процесу – систему диференціальних, або алгебраїчних рівнянь, що розв'язують конкретну задачу механіки.

Таким чином, задача, розв'язанню якої присвячена ця стаття є – на базі заданої механічної моделі у вигляді множини відповідних елементів отримати аналітичний алгоритм побудови системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сил і моментів, що є рушійними для механізму, який розглядається і досліджується в конкретній задачі. Довести його еквівалентність і переваги за результатами наведених розрахунків.

Обернена задача динаміки в літературі відмічається математично некоректно поставленою [9], бо передбачає чисельне диференціювання законів руху. Питанням розв'язання задач з урахуванням їх математичної некоректності присвячені роботи акад. Тихонова А. Н. (см., наприклад, роботу [10]). Крім запропонованих в указаних роботах методів для вирішення такої проблеми, нами пропонується ще один.

Розв'язання обернених задач для механічних систем, що тут розглядаються, починається з розв'язання оберненої задачі кінематики [11-16], яка за заданим рухом вихідних ланок механізму визначає закони зміни узагальнених координат. Використання тут методів комп'ютерної алгебри дає змогу отримати розв'язання оберненої задачі кінематики в аналітичному вигляді [11, 12].

Некоректність постановки обернених задач динаміки обумовлена тим, що в процесі розв'язання використовується чисельне диференціювання законів зміни узагальнених координат. А саме це і дає математичну некоректність задачі [10].

Використання ж законів зміни узагальнених координат в аналітичному вигляді в основному знімає таку некоректність при розв'язанні оберненої задачі динаміки знову ж такі методами комп'ютерної алгебри, бо використовується аналітичне диференціювання.

Більш того, під час розв'язання оберненої задачі кінематики існує можливість методами комп'ютерної алгебри отримати не тільки закони зміни узагальнених координат, а і закони зміни їх швидкостей та прискорень. Тоді взагалі відпадає необхідність у диференціюванні узагальнених координат в оберненої задачі динаміки.

Аналітичне представлення механічної моделі в ССКА КіДиМ. Як вже було сказано вище, однією з ключових переваг методу отримання рівнянь механіки (для динаміки, статички, кінематики, кінетостатички, коливань), реалізованого за допомогою вбудованої системи комп'ютерної алгебри в КіДиМ, є представлення механічної моделі процесу як сукупності елементів – силових, інерційних, пружних та дисипативних. КіДиМ автоматично будує математичну модель процесу, представляючи динамічні рівняння для голономних або неголономних дискретних механічних систем твердих тіл на основі загального варіаційного рівняння механіки у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{\tilde{R}_i^{\text{in}}}^T m_i \ddot{\tilde{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{\tilde{M}_i^{\text{in}}}^T \left(\mathbf{J}_{C_i} \dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} + \tilde{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \tilde{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}, \quad (1)$$

де $\mathbf{W}_{\tilde{R}_i^{\text{in}}}^T, \mathbf{W}_{\tilde{M}_i^{\text{in}}}^T, \mathbf{W}_D^T, \mathbf{W}_C^T, \mathbf{W}_P^T$ – транспоновані структурні матриці сил інерції, моментів сил інерції i -го тіла ($i=1, 2, \dots, n$), дисипативних, пружних та інших активних сил системи відповідно; $\tilde{r}_{C_i}, \tilde{\omega}_i^{(i)}$ – радіус-вектор центру мас та кутова швидкість i -го тіла (радіус-вектор центру мас задається як функція узагальнених координат в абсолютній СК, а кутова швидкість як функція узагальнених координат та узагальнених швидкостей – у зв'язаній головній центральній СК i -го тіла; m_i, \mathbf{J}_{C_i} – маса та діагональний тензор інерції i -го тіла в його зв'язаній головній центральній СК; $[\mathbf{D}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами дисипації, $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ – матричний вектор, що об'єднує швидкості (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти в'язкого тертя; $[\mathbf{C}]$ – діагональна матриця з елементами – коефіцієнтами жорсткості, $\boldsymbol{\gamma}$ – матричний вектор, що об'єднує деформації (лінійні та кутові) тіл, на які діють сили та моменти пружності; \mathbf{P} – матричний вектор, що містить значення (характеристики) активних сил і моментів сил системи – проекції таких сил і моментів на локальні СК тіл.

Аналітичні вирази структурних матриць програмно будуються аналітичним диференціюванням: для сил інерції – декартових координат радіус-вектору центру мас i -го тіла \tilde{r}_{C_i} по вектору узагальнених координат, або – вектора швидкості центра мас i -го тіла по вектору узагальнених швидкостей

$$\mathbf{W}_{\tilde{R}_i^{\text{in}}}^T = \left[\frac{\partial \tilde{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{v}_{C_i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = \left[\frac{\partial \dot{\tilde{r}}_{C_i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]; \quad \text{для}$$

моментів сил інерції – вектора кутової швидкості i -го

тіла $\bar{\omega}_i^{(i)}$ по вектору узагальнених швидкостей

$$\mathbf{W}_{M_i^{\text{ін}}} = \left[\frac{\partial \bar{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]; \text{ для дисипативних сил – вектора } \dot{\mathbf{p}} \text{ по}$$

вектору узагальнених швидкостей $\mathbf{W}_D = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right];$

пружних сил – вектора γ по вектору узагальнених координат $\mathbf{W}_C = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{q}} \right];$ активних сил системи – вектора

координат силових елементів \mathbf{p} по вектору узагальнених координат $\mathbf{W}_P = \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right].$

Розв'язання обернених задач динаміки.

Розв'язання таких задач в ССКА КіДиМ засновано на тому факті, що невідомі сили і моменти, що діють в зчленуваннях машин і механізмів, входять до правих частин рівнянь динаміки (1) лінійно. Права частина $\mathbf{W}_P^T \mathbf{P}$ таких рівнянь містить вектор \mathbf{P} , куди входять як відомі так і невідомі сили та моменти, тому цей вираз можна розділити на дві частини:

$$\mathbf{W}_P^T \mathbf{P} = [\mathbf{W}_F \quad \mathbf{W}_R] \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \mathbf{p}_F}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{F} + \left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{R}, \quad (2)$$

де \mathbf{F} – відомі сили, \mathbf{R} – невідомі, \mathbf{W}_F , \mathbf{W}_R – блоки матриці \mathbf{W}_P^T , які визначаються через похідні координат силових елементів по узагальненим координатам.

Тому, для того щоб знайти невідомі компоненти \mathbf{R} вектора \mathbf{P} необхідно перетворити рівняння (1) до системи алгебраїчних рівнянь виду

$$\mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{B}. \quad (3)$$

Для подальшого переписемо вираз (1) як матричний вектор [2]:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{R_i^{\text{н}}}^T m_i \ddot{r}_{C_i} + \mathbf{W}_{M_i^{\text{н}}}^T \left(\mathbf{J}_{C_i} \dot{\bar{\omega}}_i^{(i)} + \bar{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \bar{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \gamma - \mathbf{W}_P^T \mathbf{P} = 0 \quad (4)$$

Відповідно до існуючого реалізованого в ССКА КіДиМ алгоритму система рівнянь (3) отримується з системи (4) за дві дії: 1) в рівняння (4) підставляється $\mathbf{R} = 0$ – визначається, таким чином, права частина (3) $\mathbf{B} = \mathbf{U}|_{\mathbf{R}=0}$; 2) вектор рівнянь (4) диференціюється за вектором невідомих \mathbf{R} – отримується, таким чином, квадратна матриця лівої частини (3):

$$\mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\partial \mathbf{U} \partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{P} \partial \mathbf{R}} = -\mathbf{W}_P^T \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{R}}, \quad (5)$$

Матриця \mathbf{A} буде залежати від узагальнених координат, так як від них залежать елементи структурної матриці сил \mathbf{W}_P . Вектор \mathbf{B} буде залежати від узагальнених координат, їх швидкостей та прискорень, а також від інерційних, дисипативних та пружних параметрів дискретної моделі системи.

Таким чином, по заданому закону зміни у часі узагальнених координат $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ ССКА КіДиМ для

кожного моменту часу розраховує матрицю \mathbf{A} та вектор \mathbf{B} , завдяки яким визначає невідомі сили:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}. \quad (6)$$

Альтернативний алгоритм розв'язання оберненої задачі динаміки. Наведений вище алгоритм має дещо штучний характер, оснований на формальних діях – спочатку побудові рівнянь динаміки, їх диференціюванню по невідомим силам, та підстановці в них нульових значень невідомих сил. Всі операції виконуються після повної побудови рівнянь. Формування рівнянь (1) відбувається шляхом перегляду списку всіх елементів механічної моделі. Пропонується альтернативний аналітичний алгоритм, який буде рівняння (3) в процесі формування рівнянь (1). Він більш обґрунтований з погляду механіки і являє собою сортування силових елементів за відомими та невідомими силами ще під час побудови рівнянь.

Знайдемо невідомі відповідно до запропонованого алгоритму. Його ідея полягає в тому, щоб об'єднати в вектор \mathbf{B} всі складові лівої частини рівнянь (1), які не містять невідомих сил, – це всі складові, що породжуються інерційними, дисипативними, пружними елементами механічної моделі, та тими силовими, що не містять невідомих. З протилежного боку, з елементів, що містять невідомі, буде сформована матриця \mathbf{A} лівої частини (4).

В переважній більшості випадків вектор \mathbf{R} є безпосередньо сукупність невідомих, причому кожний елемент його – це окрема невідома – модуль сили, або моменту, що визначаються. Але можуть бути випадки, коли невідомі можуть входити в декілька компонентів цього вектора. При цьому в будь-якому випадку, лінійність залежності цього вектора від невідомих зберігається. Тому розглянемо цей більш узагальнюючий випадок. Нижче буде наведено приклад такого випадку.

Позначимо вектор невідомих \mathbf{X} , тоді можемо записати останній член виразу (2):

$$\left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{R}(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right] \mathbf{X}, \quad (7)$$

Таким чином, матрицю \mathbf{A} з виразу (5) можна визначити за формулою:

$$\mathbf{A} = -\left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right]. \quad (8)$$

Для вектора \mathbf{B} отримаємо такий вираз

$$\mathbf{B} = -\left(\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{R_i^{\text{н}}}^T m_i \ddot{r}_{C_i} + \mathbf{W}_{M_i^{\text{н}}}^T \left(\mathbf{J}_{C_i} \dot{\bar{\omega}}_i^{(i)} + \bar{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \bar{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \gamma - \left[\frac{\partial \mathbf{p}_F}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \mathbf{F} \right).$$

Тестування та розрахунки за наведеним алгоритмом. Як приклад застосування запропонованого алгоритму, розглянемо схему стрілового пристрою порталного крана (рис.1).

Тут показано: FED – «хобот», EL – відтяжка, NLP – коромисло, P – протизага (200 т), Q – вантаж (160 т), AD – стріла, K – приводна шестерня, CG – зубчаста рейка.

Шляхом обертання приводної шестерні K зубчаста рейка CG переміщається, це змушує змінюватися геометрії стрілового механізму, що призводить до зміни вильоту стріли крана.

Для моделювання використовується жорстка плоска стрижнева конструкція, що розташована в вертикальній площині. Довжини ланок, та їх маси задано. В системі одна узагальнена координата, за яку обрана відстань $s=CG$.

В завданні треба з урахуванням ваг ланок механізму і заданого закону зміни відстані CG (що забезпечує початок і кінець руху крана з нульовою швидкістю) знайти величину зусилля на рейки $S_G(t)$.

Задано,

$$s = 0,5 \left[(s_0 + s_1) + (s_0 - s_1) \cos \frac{\pi t}{\Delta t} \right],$$

де $s_0=7,1$ м, $s_1=2,26$ м – початкова і кінцева відстань CG , Δt – тривалість переносу вантажу.

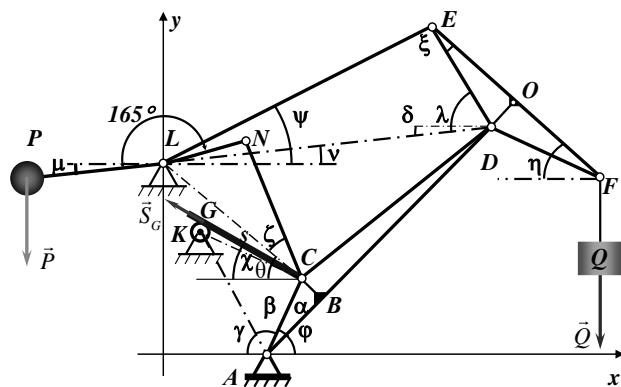


Рис. 1 – Стріловий пристрій портального крана

Привести повністю параметри і опис механічної моделі стрілового пристрою тут не уявляється можливим. Позначимо тільки найбільш цікаві моменти.

Послідовно розглядаючи трикутники, з яких складається фігура пристрою, за теоремами синусів, косинусів та Піфагора можна визначити всі кути в них та координати всіх характерних точок через довжину $s=CG$ – узагальнену координату системи [3]. В якості сил враховуємо сили ваги ланок, вантажу та протизаги, прикладених в їх центрах тяжіння, і невідому силу \vec{S}_G , що прикладена до рейки з боку шестерні. Ця сила описується двома силовими елементами в механічній моделі КіДиМ, що задають її дві проекції на осі координат

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_C = -S_G \cos(\chi); \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{y}_C = S_G \sin(\chi).$$

Як бачимо, тут як раз і реалізується випадок, що був розглянутий вище і привів до формули (8). Отримаємо явний вигляд матриці \mathbf{A} (вектор \mathbf{B} привести тут не має можливості через громіздкість виразу).

Невідома тут одна, тому $\mathbf{X} = S_G$, тоді вектор

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -S_G \cos \chi \\ S_G \sin \chi \end{bmatrix}, \text{ вектор } \mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix}. \text{ З (8) отримаємо}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T = \left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial s} \right]^T = \frac{\partial [x_C \ y_C]}{\partial s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial s} & \frac{\partial y_C}{\partial s} \end{bmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right] = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial S_G} \right] = \frac{\partial}{\partial S_G} \begin{bmatrix} -S_G \cos \chi \\ S_G \sin \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \chi \\ \sin \chi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{p}_R}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right] = -\frac{\partial x_C}{\partial s} \cos \chi + \frac{\partial y_C}{\partial s} \sin \chi.$$

Легко показати, що старий алгоритм дає теж саме.

На рис. 2 дано графік зміни шуканого зусилля на шестерні K (див. рис. 1), а рис. 3 демонструє якість механізму – можна побачити, що ордината точки підвісу вантажу на горизонтальному переміщенні в 26 метрів змінюється всього на 18 сантиметрів.

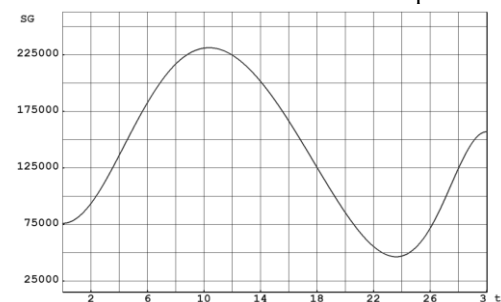


Рис. 2. Закон зміни зусилля на рейки CG

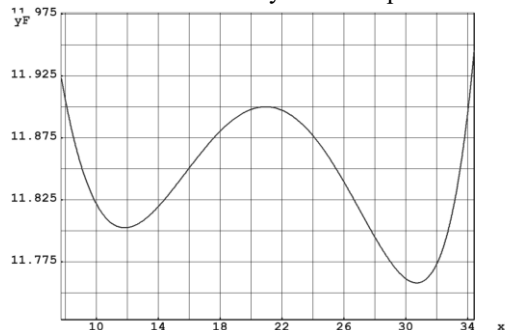


Рис. 3. Траєкторія точки підвісу вантажу F

Розглянемо другий приклад. Визначимо моменти в зчленуваннях маніпулятора ПУМА (рис. 4), що забезпечать рисування в вертикальній площині захватом епіциклоїди (рис. 7а, розміри – в м).

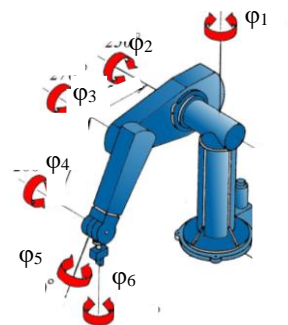


Рис. 4 – Маніпулятор ПУМА (а)

В механізмі – шість степенів свободи, для рисування епіциклоїди треба три. Тому за узагальнені координати можна взяти перші три кута – $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Запис моделі маніпулятора засобами КіДиМ наведено в статті [6] (з підстановкою $\varphi_4=\varphi_5=\varphi_6=0$).

Рівняння епіциклоїди (див. рис. 4б)

$$y_C = \lambda r \cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right) - (R+r)\cos\varphi, \quad x_C = 0,4\text{ м},$$

$$z_C = 1 - \lambda r \sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right) + (R+r)\sin\varphi, \quad (9)$$

$$\varphi = \pi t, \quad \lambda = 3, \quad R = 0,3\text{ м}, \quad r = -0,1\text{ м} \quad t \in [0, 2]c.$$

Для визначення законів зміни узагальнених координат – кутів $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ спочатку була розв’язана обернена задача кінематики динамічним методом. Фіктивно в модель була введена пружина, яка стягувала кінець захвату до потрібної траєкторії (9) – і шляхом розв’язання прямої задачі динаміки отримано закони зміни кутів $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, які представлено на рис. 5.

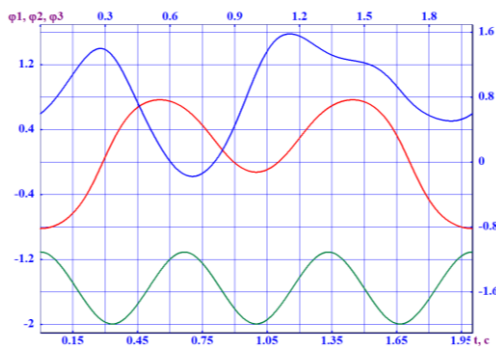


Рис. 5 – Закони зміни кутів φ_1 (червона крива), φ_2 (синя), φ_3 (зелена)

Потім – двома описаними тут алгоритмами була розв’язана обернена задача динаміки вже без фіктивної пружини, але при включенні в модель крутних моментів M_1, M_2, M_3 на кутах $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Обома методами отримані ідентичні результати, що наведені на рис. 6.

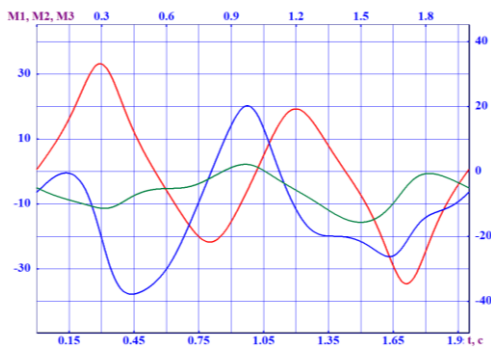


Рис. 6 – Закони зміни моментів M_1 (червона крива), M_2 (синя), M_3 (зелена)

Розглянемо третій приклад. Визначимо моменти в зчленуваннях маніпулятора Станфордського університету (рис. 8), що забезпечать рисування в вертикальній площині захвату астрои́ди (рис. 7б, розміри – в м). Рівняння астрои́ди

$$y_C = R \cos^3 t, \quad x_C = 0,4\text{ м}, \quad z_C = R \sin^3 t, \quad R = 0,6\text{ м}.$$

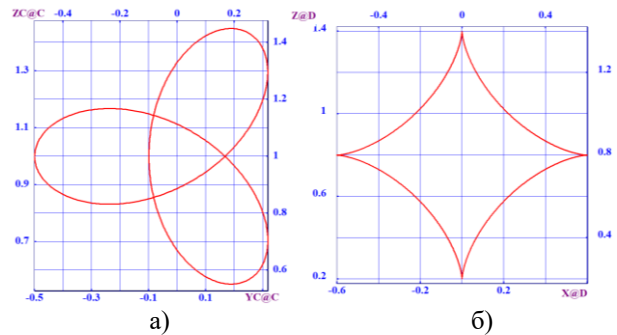


Рис. 7 – Епіциклоїда (а) і астрои́да (б)

В механізмі теж шість степенів свободи, для рисування астрои́ди треба три. Тому за узагальнені координати можна взяти перші два кути – θ_1, θ_2 , та довжину частини, що телескопічно висувається, позначим її d_{32} (див. рис. 8).

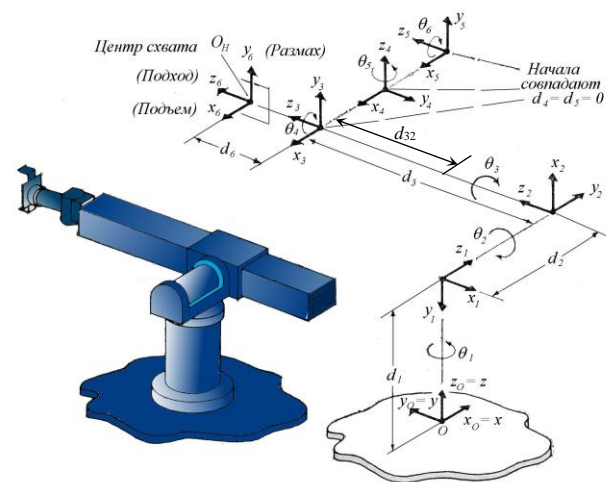


Рис. 8 – Маніпулятор Станфордського університету

Для просторових систем записувати вручну інерційні елементи моделі дуже складно, тому для опису інерційності такого маніпулятора використано записи «тверде тіло» [6], які обробляються препроцесором КіДиМ, що створює з них відповідні елементи

K	$S_z(d_{11}), R_z(\theta_1)$	$J_z(J_{1z});$
П~K	$S_z(d_{12}), S_x(d_{21}), R_x(\theta_2)$	$m_2, J_{2x}, J_{2z}, J_{2y};$
Л~П	$S_x(d_{22}), S_y(d_{32})$	$m_3, J_{3x}, J_{3z}, J_{3y};$
З~Л	$S_y(L_2)$	$m_4, J_{4z}, J_{4x}, J_{4y};$
С~З	$S_y(d_4)$	$m_5, J_{5x}, J_{5z}, J_{5y};$

Геометричні розміри:

$$d_{11} = 0,5\text{ м}, \quad d_{12} = 0,25\text{ м}, \quad d_{21} = 0,25\text{ м}, \quad d_{22} = 0,5\text{ м}, \quad d_{31} = d_{22},$$

$$L_2 = 0,3\text{ м}, \quad d_4 = 0,1\text{ м}, \quad a = 0,4\text{ м}, \quad b = 0,4\text{ м}.$$

Інерційні параметри:

$$J_{1z} = 5 \text{ кгм}^2;$$

$$m_2 = 10 \text{ кг}, \quad J_{2x} = 1 \text{ кгм}^2, \quad J_{2y} = 2 \text{ кгм}^2, \quad J_{2z} = 3 \text{ кгм}^2;$$

$$m_3 = 2 \text{ кг}, \quad J_{3x} = 0,5 \text{ кгм}^2, \quad J_{3y} = 1 \text{ кгм}^2, \quad J_{3z} = 1 \text{ кгм}^2;$$

$$m_4 = 1 \text{ кг}, \quad J_{4x} = 0,1 \text{ кгм}^2, \quad J_{4y} = 0,2 \text{ кгм}^2, \quad J_{4z} = 0,3 \text{ кгм}^2;$$

$$m_5 = 0,5 \text{ кг}, \quad J_{5x} = 0,05 \text{ кгм}^2, \quad J_{5y} = 0,1 \text{ кгм}^2, \quad J_{5z} = 0,3 \text{ кгм}^2.$$

Задача розв’язувалась аналогічно другого прикладу. На рис. 9 та 10 показано отримані результати

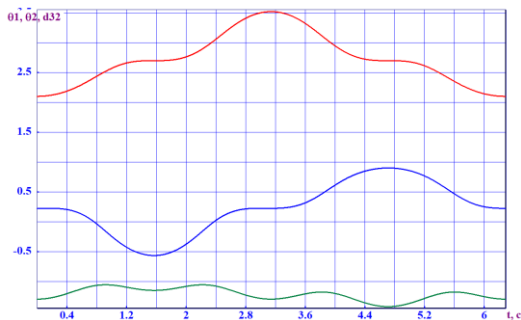


Рис. 9 – Законы зміни узагальнених координат – θ_1 (червона крива), θ_2 (синя), d_{32} (зелена)

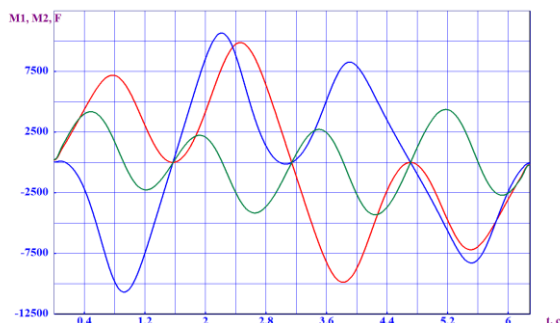


Рис. 10 – Законы зміни моментів M_1 (червона крива), M_2 (синя), та сили F_{32} (зелена)

Список літератури

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. // К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехніка // М.: Мир – 1989. – 621 с.
3. Андреев Ю. М. Универсальный алгоритм решения задач кинематики и его применение для расчетов порталного крана // Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве : 6-я Международ. науч.-техн. конф. : труды. — Харьков : ХНПК «ФЭД», 2002. — С. 297–300.
4. Андреев Ю. М. Численно-аналитическое решение обратной задачи динамики дискретных систем // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2007. – № 2/4 (26). – С. 10–13.
5. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел / Ю. М. Андреев // Надежность и долговечность машин и сооружений : междунар. науч.-техн. сбор. НАН Украины. – К.: ИПИ им. Писаренко Г. С., Ассоциация «Надежность машин и сооружений», 2006. – Вып. 26. – С. 11–18.
6. Андреев Ю.М., Морачковский О.К. О динамике голономных систем твердых тел. // Прикладная механика. 2005. Т. 41, №7. С. 130–138.
7. Андреев Ю. М. Векторно-матричная форма общего уравнения динамики в обобщенных и псевдокординатах // Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ»: зб. наук. пр. : Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2005. – № 20. – С. 13–18.
8. Андреев Ю. М., Ларин А. А. Метод структурных матриц в механике машин (история вопроса) // Механіка та машинобудування. – 2012. – Вип. 1. – С. 129–137.
9. Андреев Ю. М., Морачковский О. К. Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа Даламбера-Лагранжа // Прикл. механіка. – 2006. – Т. 42, №9. – С. 106–115.
10. Короткий А. И. Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами, Изв. вузов. Матем., 1995, номер 11, с. 101–124.
11. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач // М.: Наука, 2022. – 284 с.
12. Андреев Ю. М. Алгоритм компенсации возмущений ходьбы двуногого робота решением обратной задачи кинематики // Вісник

НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2020. – № 2 (2020). – С. 14 – 21

13. Ащепкова Н. С. Mathcad in the kinematic and dynamic analysis of the manipulator // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2015. – Vol. 5. – pp. 54–63.

14. Ben-Ari M., Mondada F. Elements of Robotics // Springer Cham. – 2018. – 308p.

15. Baillieul J. Introduction to ROBOTICS mechanics and control // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2004. – pp. 463–464.

16. Bendjilali K. Kinematics-Based Navigation Functions / K. Bendjilali, F. Belkhouche // Advanced Robotics. – 2008. – Vol. 22. – pp. 1243–1264.

17. Kajita S., Hirukawa, H., Harada, K., Yokoi, K. Introduction to Humanoid Robotics // Springer Tracts in Advanced Robotics. – 2014. – Vol. 101.

References (transliterated)

1. Pavlovskij M.A. Teoretichna mehanika: Pidruchnik. // K.: Tehnika, 2002. – 512 s.
2. Fu K., Gonsales R., Li K. Robototekhnika // M.: Mir – 1989. – 621 s.
3. Andreev Ju. M. Universal'nyj algoritm reshenija zadach kinetostatiki i ego primenenie dlja raschetov portal'nogo kрана // Fizicheskie i komp'juternye tehnologii v narodnom hozjajstve : 6-ja Mezhdunar. nauch.-tehn. konf. : trudy. — Har'kov : HNPК «FJeD», 2002. — С. 297—300.
4. Andreev Ju. M. Численно-аналитическое решение обратной задачи динамики дискретных систем // Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologii. – Har'kov, 2007. – # 2/4 (26). – С. 10–13.
5. Andreev Ju. M., Morachkovskij O. K. Novaja sistema komp'juternoj algebry dlja issledovanija kolebanij strukturno-slozhnyh golonomnyh i negolonomnyh sistem tverdyh tel / Ju. M. Andreev // Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzhenij : mezhdunar. nauch.-tehn. sbor. NAN Ukrainy. – K.: IPP im. Pisarenko G. S., Associacija «Nadezhnost' mashin i sooruzhenij», 2006. – Vyp. 26. – С. 11–18.
6. Andreev Ju.M., Morachkovskij O.K. O dinamike golonomnyh sistem tverdyh tel. // Prikladnaja mehanika. 2005. T. 41, #7. S. 130-138.
7. Andreev Ju. M. Vektorno-matrichnaja forma obshhego uravnenija dinamiki v obobshhennyh i psevdokordinatah // Visnik Nac. tehn. un-tu «HPІ»: zb. nauk. pr. : Dinamika ta micnist' mashin. – Harkiv : NTU «HPІ», 2005. – # 20. – С. 13–18.
8. Andreev Ju. M., Larin A. A. Metod strukturnyh matric v mehanike mashin (istorija voprosa) // Mehanika ta mashinobuduвання. – 2012. – Vip. 1. – С. 129–137.
9. Andreev Ju. M., Morachkovskij O. K. Komp'juternoe modelirovanie negolonomnyh sistem tverdyh tel na osnove principa Dalamberta-Lagranzha // Prikl. mehanika. – 2006. – T. 42, #9. – С. 106–115.

10. Korotkij A. I. Obratnye zadachi dinamiki upravljajemyh sistem s raspredelemnymi parametrami, Izv. vuzov. Matem., 1995, nomer 11, s. 101–124.

11. Tihonov A.N. Metody reshenija nekorrektnyh zadach // M.: Nauka, 2022. – 284 s.

12. Andreev Ju. M. Algoritm kompensacii vozmushhenij hod'by dvunogo robota resheniem obratnoj zadachi kinematiki // Visnik NTU «HPІ». Serija: Dinamika ta micnist' mashin. – Harkiv : NTU «HPІ», 2020. – # 2 (2020). – С. 14 – 21

13. Ashhepkova N. S. Mathcad in the kinematic and dynamic analysis of the manipulator // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2015. – Vol. 5. – pp. 54–63.

14. Ben-Ari M., Mondada F. Elements of Robotics // Springer Cham. – 2018. – 308p.

15. Baillieul J. Introduction to ROBOTICS mechanics and control // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2004. – pp. 463–464.

16. Bendjilali K. Kinematics-Based Navigation Functions / K. Bendjilali, F. Belkhouche // Advanced Robotics. – 2008. – Vol. 22. – pp. 1243–1264.

17. Kajita S., Hirukawa, H., Harada, K., Yokoi, K. Introduction to Humanoid Robotics // Springer Tracts in Advanced Robotics. – 2014. – Vol. 101.

Надійшла (received) 13.12.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Андрєєв Юрій Михайлович (Andrieiev Yuriy) – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: Yurii.Andrieiev@kphi.edu.ua.

Дзюба Василь Леонідович (Dziuba Vasyl) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», магістрант ; м. Дніпро, Україна; e-mail: Vasyl.Dziuba@infiz.kphi.edu.ua.