

УДК 593.3

*О. І. ТРУБАЄВ, А. О. ЛАРІН***ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНИХ ШВИДКОСТЕЙ ОБЕРТАННЯ РОТОРІВ**

DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270867

Стаття присвячена визначенню граничних умов, що дозволяють досягти адекватних результатів при розрахунку критичних швидкостей обертання роторів на основі скінчено-елементних моделей. Експериментальне визначення частот власних коливань лабораторного ротора на шарикопідшипниках проводилося за допомогою розробленого авторами вібровимірювального комплексу. Численні дослідження вільних коливань лабораторного ротора та циліндричної труби із співвідношенням товщини стінки до довжини 1/10 виконані на основі тривимірної скінчено-елементної моделі за різних граничних умов. Як опори в розрахунковій схемі лабораторного ротора використовуються рухомі та нерухомі циліндричні шарніри, що відповідають плаваючим підшипникам. У зв'язку з тим, що розміри підшипників по довжині валу малі в порівнянні із загальною довжиною, в розрахунковій моделі прийнято, що вал шарнірно закріплений по краях в окремих точках одного кола на кожному підшипнику. Розглянуто варіанти кріплення валу у двох, чотирьох та восьми точках. Розглянуто варіанти кріплення циліндричної труби в крайніх перерізах по двох точках, чверті кола та повному колу. Проведено порівняння експериментальних та чисельних результатів, рішень, отриманих аналітично та на основі методу скінчених елементів. Аналіз форм власних коливань показав, що при різних варіантах кріплення циліндричної труби виникають форми коливань, пов'язані з деформацією труби як оболонки. Наприклад, при кріпленні труби по чверті кола серед форм №1-№10 лише №2 відповідає деформації труби як балки. Результати дослідження власних коливань лабораторного ротора показують, що найкращим варіантом граничних умов, що дозволяє наблизитись до результатів експерименту, є закріплення на кожному підшипнику у двох точках, що знаходяться на нейтральній лінії поперечного перерізу при згині ротора. Чисельні дослідження власних частот циліндричної труби свідчать, що саме при такому варіанті граничних умов можна отримати результати, що є найбільш близькими до аналітичного рішення.

Ключові слова: ротор, критичні обороти, власні частоти згинних коливань валу, експериментальне визначення критичних швидкостей обертання ротору.

*О. І. TRUBAYEV, A. O. LARIN***ON THE MODELING OF BOUNDARY CONDITIONS FOR DETERMINING THE CRITICAL SPEEDS OF ROTATION OF ROTORS**

The article is devoted to the definition of boundary conditions that allow achieving adequate results when calculating the critical speeds of rotation of rotors based on finite element models. Experimental determination of the frequencies of free vibrations of a laboratory rotor on ball bearings was carried out using a vibration measuring complex developed by the authors. Numerical studies of the free vibrations of a laboratory rotor and a cylindrical pipe with a wall thickness to length ratio of 1/10 were performed on the basis of a three-dimensional finite element model under various boundary conditions. Movable and fixed cylindrical hinges corresponding to floating bearings are used as supports in the calculation scheme of the laboratory rotor. Due to the fact that the dimensions of the bearings along the length of the shaft are small compared to the total length, it is assumed in the calculation model that the shaft is hinged along the edges at separate points of one circle on each bearing. Shaft mounting options at two, four and eight points are considered. The options for fastening a cylindrical pipe in the extreme sections at two points, a quarter of a circle and a full circle are considered. Comparison of experimental and numerical results, solutions obtained analytically and on the basis of the finite element method is carried out. An analysis of the modes of natural vibrations showed that with various options for fixing a cylindrical pipe, vibration modes arise associated with the deformation of the pipe as a shell. For example, when fixing a pipe along a quarter of a circle, among the forms №1-№10, only the second corresponds to the deformation of the pipe as a beam. The results of the study of free vibrations of a laboratory rotor show that the best option for boundary conditions, which makes it possible to approach the results of the experiment, is fastening on each bearing at two points located on the neutral line of the cross section when the rotor is bent. Numerical studies of the eigen frequencies of a cylindrical pipe show that it is with this type of boundary conditions that one can obtain results that are closest to the analytical solution.

Keywords: rotor, critical revolutions, natural frequencies of shaft bending vibrations, experimental determination of critical rotor rotation speeds.

Вступ. Проблемам динаміки роторів присвячено велику кількість наукових публікацій, в яких досліджується вплив різних аспектів на динамічні характеристики таких машин. Одним із перших вирішенням завдань про критичні обороти валів займався відомий вчений С. П. Тимошенко [1]. Вітчизняні вчені зробили великий внесок у вирішення динамічних проблем валів, що обертаються. У монографії І. М. Бабакова [2] докладно розглядаються проблеми критичних оборотів валів. У роботі [3] наведено аналіз впливу шпарових ущільнень на вібраційні характеристики взаємозв'язаних радіально-кутових та радіально-осьових коливань динамічної системи ротор – ущільнення – врівноважувальний пристрій відцентрової машини. Запропоновані методи

статичного та динамічного розрахунків, принципи конструювання і конструкції вібростійких ущільнень і систем автоматичного зрівноважування осьових сил. У роботі [4] запропоновано модель автоколивань однодискових роторів у підшипниках ковзання довільної довжини. У статті [5] досліджуються вільні нелінійні коливання пружного ротора з дисками, розташованими несиметрично щодо опор валу. У [6] побудовано модель вимушених коливань ротора на двох радіально-упорних підшипниках з попереднім осьовим підтисканням. Отримано амплітудно-частотні характеристики (АЧХ), проаналізовано стійкість та біфуркації коливань. У [7] описані експериментальні дослідження з вивчення динаміки модельного ротора в комбінованому пасивно-активному магнітному

підвісі. Результати представлені у вигляді вібропереміщень центрів опорних ділянок ротора, їх траєкторій руху, спектрограм, а також амплітудно-частотних характеристик. Запропоновано модифіковану конструкцію ротора, що дозволила знизити амплітуди коливань при значеннях швидкостей обертання близьких до критичних. У [8] виконано детальний огляд літературних джерел та оцінка сучасного стану питань, що належать до динаміки роторів з урахуванням використання у роторних системах різних типів підшипників. Розглянуто причини виникнення різних типів вібрацій у роторних машинах та варіанти їх прояву залежно від особливостей системи, способи ідентифікації цих вібрацій та підходи до динамічного аналізу. У [9] проаналізовано чисельно та експериментально поперечні коливання ротора на радіально-упорних підтиснених підшипниках, викликані дисбалансом диска. Завдання про параметричну нестійкість валу в шарикопідшипниках розглянуто в [10].

При чисельному дослідженні критичних швидкостей обертання роторів на основі методу скінчених елементів виникає питання завдання граничних умов, яке забезпечує отримання адекватних результатів. Однак у наведених роботах та публікаціях інших авторів немає рекомендацій щодо моделювання граничних умов (ГУ). Тому для вирішення цієї проблеми були проведені експериментальні та чисельні дослідження згинних коливань двох роторів.

1. Дослідження частот згинних коливань лабораторного ротора. Перший ротор є тонким валом із закріпленням на ньому важким диском. Для проведення експериментальних досліджень авторами використовувалася лабораторна установка (рис. 1) для дослідження критичних швидкостей обертання такого ротора, що знаходиться на кафедрі математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії (у минулому – динаміки та міцності машин) НТУ «Харківський політехнічний інститут». Вал (поз. 1) з диском (поз. 2) зафіксований в опорах 3 за допомогою кулькових підшипників. Ротор приводиться у обертання електродвигуном (поз. 4), пов'язаним з ним муфтою. Цифрою 5 на фото позначені обмежувачі, що не контактують з валом і призначені для забезпечення безпеки у разі надмірних його коливань.

На рис. 2 наведено схему даного ротору, а в табл. 1 його геометричні розміри. Вал і диск виготовлені зі сталі, модуль пружності $E=2,1 \cdot 10^{11}$ Па, щільність $\rho=7800$ кг/м³. Як опори в розрахунковій схемі використовуються рухливий і нерухливий циліндричні шарніри, які відповідають плаваючим підшипникам. При розрахунку розглядаються коливання у площині xu .

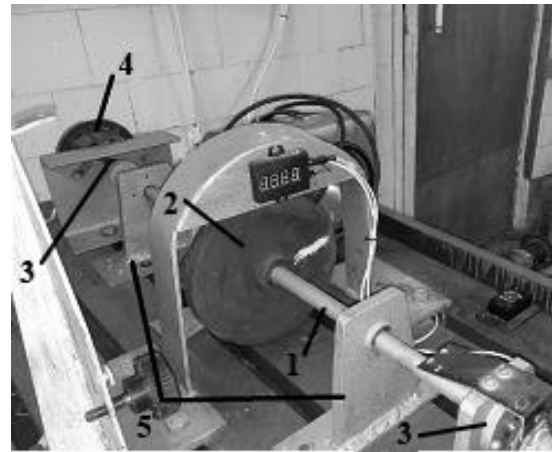


Рисунок 1 – Експериментальна установка

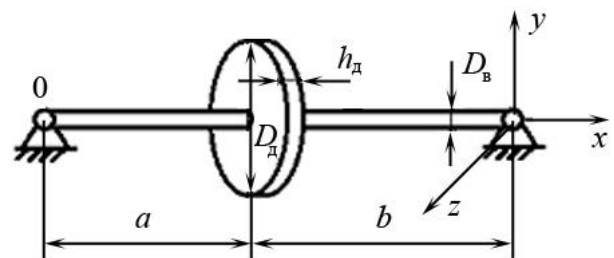


Рисунок 2 – Схема лабораторного ротору

Таблиця 1 – Параметри лабораторного ротору

a , м	b , м	D_d , м	h_d , м	D_v , м
0,34	0,35	0,2	0,025	0,02

Критичні швидкості обертання ротора, що відповідають власним частотам згинних коливань, були визначені за допомогою вібровимірювального комплексу Ультра-В-І, розробленого на кафедрі динаміки та міцності машин НТУ «ХПІ» [11]. Вібродатчик встановлювався на опорах і після серії експериментів, пов'язаних із збудженням вільних коливань, було визначено першу власну частоту – 27,7 Гц. Цей результат також підтверджено і за допомогою інших приладів. На рис. 3 наведено запис віброприскорень, АЧХ та частоти.

Чисельне визначення критичних швидкостей проведено на основі об'ємної скінчено-елементної моделі (рис. 4). У зв'язку з тим, що розмір підшипників по довжині валу має малу величину (0,01 м) в порівнянні із загальною довжиною, в розрахунковій моделі приймається, що вал шарнірно закріплений по краях в окремих точках одного кола.



Рисунок 3 – Результати визначення частот згинних коливань ротора за допомогою вібровимірювального комплексу Ультра-В-І

На рис. 5 показаний один із варіантів граничних умов, що задаються в розрахунках: умови закріплення валу по восьми точках, що відповідають лівій межі підшипника на правому краю ротора. ГУ на лівому краю були симетричними.

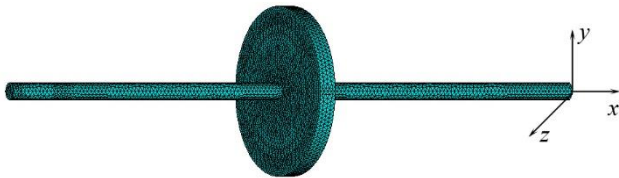


Рисунок 4 – Скінчено-елементна модель ротора

Також були розглянуті варіанти закріплення по чотирьох (№№ 1, 3, 5, 7) та двох (№№ 3, 7) точках.

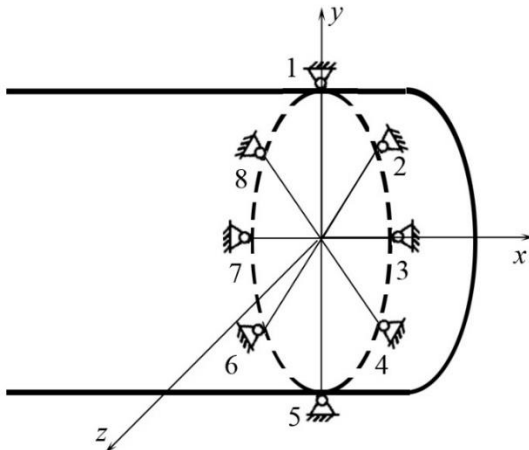


Рисунок 5 – Вид граничних умов

У табл. 2 наведено значення частот, отримані при різних ГУ. Чисельні результати показують, що найкращим варіантом ГУ, що дозволяє наблизитись до результатів експерименту, є закріплення на кожному підшипнику у двох точках, що знаходяться на нейтральній лінії поперечного перерізу при згині ротору. При цьому похибка щодо першої частоти становить 8 %.

Таблиця 2 – Значення частот, отриманих за різних умов закріплення

Номер частоти	Кількість точок закріплення		
	8	4	2
1	57,9	56,3	30,0
2	58,0	56,5	56,5
3	84,2	84,0	82,9
4	239,2	236,6	194,5
5	239,4	236,9	236,9
6	644,0	641,3	495,0
7	646,3	643,1	555,4
8	676,1	687,3	641,2
9	677,1	692,8	692,7

На рис. 6, 7 наведено форми коливань ротора.

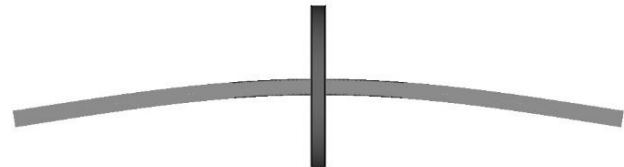


Рисунок 6 – Перша форма згинних коливань у площині xy

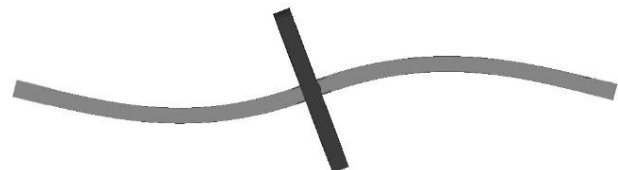


Рисунок 7 – Друга форма згинних коливань у площині xy

2. Чисельне дослідження частот циліндричної труби. Часто ротори машин, бувають виконані на основі оболонок, форма яких може бути досить складною, на них також може бути розміщене різне навісне обладнання. Ці обставини не дозволяють використовувати теорію оболонок і змушують розглядати ротор як об'ємне тіло складної конфігурації, що обертається. У зв'язку з цим важливим питанням є завдання ГУ під час створення скінчено-елементної моделі ротора. Авторами було проведено дослідження впливу ГУ на власні частоти циліндричної труби за її об'ємного моделювання. Розглядається шарнірно закріплена труба довжиною 1 м, діаметром 0,1 м з товщиною стінки 0,01 м. Граничні умови моделювалися заборону лінійних переміщень в окремих точках, що лежать на зовнішньому колі торцевих перерізів труби, а також частини кола та всього кола. Щільність матеріалу 7850 кг/м^3 а значення модуля пружності $2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Розрахунки проводилися двома методами: за допомогою балочної теорії, коли труба розглядалася як однорідна балка, шарнірно закріплена на кінцях та

із застосуванням методу скінчених елементів (рис. 8). В цьому випадку закріплення труби на кінцях змінювалося. Розглядалися варіанти шарнірного закріплення у двох точках, розташованих на осі z , шарнірного закріплення по 1/4 нижньої частини торцевого кола, а також випадок закріплення по всьому торцевому колу.



Рисунок 8 – Скінчено-елементна модель труби

Аналітичним шляхом i -а власна частота труби визначається співвідношенням [2]

$$k_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

Тут l – довжина стрижня, EJ – жорсткість на згин (E – модуль пружності, J – момент інерції поперечного перерізу), μ – погонна маса.

Значення перших двох власних частот за аналітичним рішенням становлять відповідно 274 і 1093 Гц. У цьому слід зазначити, що з симетрії ротора частоти є кратними (табл. 3). Розрахунки показали, що найкращим варіантом закріплення труби є шарнірне закріплення у двох торцевих точках. При цьому поряд із згинними коливаннями ротора – труби проявляються коливання ротора як оболонки. На рис. 9–13 наведено перші п'ять форм власних коливань для випадку закріплення кінців труби у двох торцевих точках. З них видно, що згинними є лише 1-а, 2-а та 5-та форми, а 3-я та 4-та форми коливань обумовлені деформацією труби як оболонки, тобто є оболонковими (рис. 11, 12). Що ж до похибки при чисельному визначенні власних частот у кращому варіанті граничних умов (при закріпленні у двох торцевих точках), то для першої частоти вона становить 4%, а для другої – 14%.

Частоти (з 1-ї по 10-у, за винятком 2-ї), отримані для шарнірного закріплення по 1/4 торцевого кола, відповідають лише оболонковим формам коливань. Закріплення труби по всьому торцевому колу призводить до підвищення значення першої власної частоти на 93%, що не дозволяє використовувати такі ГУ в моделях.

Таблиця 3 – Власні частоти згинних коливань труби (Гц)

№ п/п	аналітичне рішення	закріплення у двох торцевих точках	закріплення по 1/4 торцевого кола	закріплення по всьому торцевому колу
1	274	262	229	531
2	274	357	342	531
3	-	717	461	1310
4	-	770	767	1310
5	1093	938	820	1501
6	1093	1136	1242	1501
7	-	1173	1242	1594
8	-	1491	1462	1598
9	-	1493	1494	1861
10	-	1509	1562	1862



Рисунок 9 – Перша згинна форма коливань у площині xy



Рисунок 10 – Друга форма коливань, що відповідає першій згинній формі в площині xz



Рисунок 11 – Третя форма коливань (оболонкова)



Рисунок 12 – Четверта форма коливань (оболонкова)

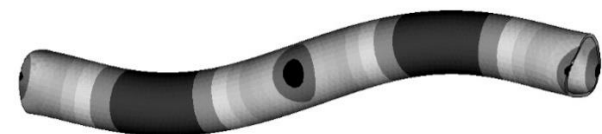


Рисунок 13 – П'ята форма коливань (друга згинна у площині xy)

Висновки. У статті досліджено вплив граничних умов при об'ємному скінчено-елементному моделюванні роторів на критичні швидкості їх обертання, та визначено такий варіант граничних умов, що дозволяє отримати адекватні результати. Таким є закріплення на кожному підшипнику у двох точках, що знаходяться на нейтральній лінії поперечного перерізу при згині ротору.

Список литературы

1. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: ОНТИ, 1934. – 344 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1958. – 560 с.
3. Марцинковский В. А. Динамика роторов центробежных машин. / В. А. Марцинковский. – Сумы: Сумский государственный университет, 2012. – 562 с.
4. Филипповский С. В. Свободные нелинейные колебания многодисковых роторов на шарикоподшипниках. / С. В. Филипповский, К. В. Аврамов *Проблемы машиностроения*, – 2013. – №3. – С. 86–96
5. Филипповский С. В. Нелинейные колебания ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках. / С. В. Филипповский, А. С. Беломытцев // *Вестник ХНАДУ*, – 2014. – Вып. 64. – С. 66–73
6. Филипповский С. В. Устойчивость и бифуркации колебаний ротора на шарикоподшипниках с предварительной осевой нагрузкой. / С. В. Филипповский // *Проблемы машиностроения*, – 2017. – №3. – С. 75–83
7. Мартыненко Г. Ю. Результаты экспериментальных исследований и анализ динамики модельного ротора в магнитных подшипниках разных типов / Г. Ю. Мартыненко // *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія : Динаміка і міцність машин.* – 2013. – № 63. – С. 90–101
8. Мартыненко Г. Ю. История, актуальные проблемы, методы и средства анализа явлений роторной динамики с учетом традиционных и магнитных подшипников / Г. Ю. Мартыненко // *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія : Динаміка і міцність машин.* – 2014. – № 58. – С. 77–131
9. Bai C., Zhang H., and Xu Q. Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system. // *Int. J. Nonlin. Mech.* – 2013. – 50. – P. 1–10

10. Young T.H., Shiau T.N., and Kuo Z., H. Dynamic stability of rotor-bearing systems subjected to random axial forces. // *J. Sound. Vib.* – 2007. – 305. №3. – P. 467–480
11. Водка А. А. Виброизмерительный комплекс на основе микроэлектромеханического сенсора / А. А. Водка, А. И. Трубаев, Ю. Н. Ульянов // *Вісник Східноукраїнського Національного університету ім. В. Даля.* – Луганськ, 2012. – № 9 (180). Ч. 1. – С. 140–147

References (transliterated)

1. Timoshenko S. P. Theory of oscillations in engineering / S. P. Timoshenko. – M.: ONTI, 1934. – 344 p.
2. Babakov I. M. Theory of oscillations / I. M. Babakov. – M.: Nauka, 1968. – 560 p.
3. Martsinkovsky V. A. Dynamics of rotors of centrifugal machines. / V. A. Martsinkovsky. – Sumy: Sumy State University, 2012. – 562 p.
4. Filipkovsky S. V. Free nonlinear oscillations of multidisk rotors on ball bearings. / S. V. Filipkovsky, K. V. Avramov *Problems of mechanical engineering.* – 2013. – No. 3. – pp. 86–96
5. Filipkovsky S. V. Nonlinear vibrations of the rotor on angular contact ball bearings. / S. V. Filipkovsky, A. S. Belomytsev // *Bulletin of KhNADU*, – 2014. – Issue. 64. – S. 66–73
6. Filipkovsky S. V. Stability and bifurcations of rotor oscillations on ball bearings with preliminary axial load. / S. V. Filipkovsky // *Problems of mechanical engineering*, – 2017. – No. 3. – pp. 75–83
7. Martynenko G. Yu. Results of experimental studies and analysis of the dynamics of a model rotor in magnetic bearings of various types / G. Yu. Martynenko // *Bulletin of the National Technical University «KhPI»*. Series: Dynamics and Mind of Machines. – 2013. – No. 63. – P. 90–101
8. Martynenko G. Yu. History, current problems, methods and tools for analyzing the phenomena of rotor dynamics with regard to traditional and magnetic bearings / G. Yu. Martynenko // *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Dynamics and Mind of Machines.* – 2014. – No. 58. – P. 77–131
9. Bai C., Zhang H., and Xu Q. Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system. // *Int. J. Nonlin. Mech.* – 2013. – 50. – P. 1–10
10. Young T.H., Shiau T.N., and Kuo Z., H. Dynamic stability of rotor-bearing systems subjected to random axial forces. // *J. Sound. Vib.* – 2007. – 305. Number 3. – P. 467–480
11. Vodka A. A. Vibro-measuring complex based on a microelectromechanical sensor / A. A. Vodka, A. I. Trubaev, Yu. V. Dahl. - *Lugansk*, 2012. - No. 9 (180). Part 1. – S. 140-147

Надійшла (received) 23.12.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Трубаєв Олександр Іванович – кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: trubayev@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7318-6526>.

Trubayev Oleksandr Ivanovych – Candidate of Technical Science, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», assistant professor of the mathematical modeling and intellectual computing in engineering Department; Kharkiv; phone: (057) 707-68-79; e-mail: trubayev@gmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7318-6526>.

Ларін Андрій Олексійович – кандидат технічних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри українознавства, культурології та історії науки; м. Харків; тел.: (057)707-68-29; e-mail: professorlarin@gmail.com.

Larin Andrew Alekseevych – Candidate of Technical Science, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», professor of the Ukrainian Studies, Cultural Studies and History of Science Department; Kharkiv; phone: (057) 707-68-29; e-mail: professorlarin@gmail.com.