

Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, О. А. ТАТАРІНОВА
ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НЕЗВОРОТНОГО ДЕФОРМУВАННЯ КІЛЕЦЬ ПРИ
ВИБУХОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Викладено постановку осесиметричної задачі незворотного пластичного деформування для випадку скінченних деформацій. Обговорюється можливість використання квазістатичної постановки. Для опису швидкого деформування використано рівняння інкрементальної теорії пластичності. Метод чисельного моделювання побудовано з використанням узагальненого підходу Лагранжа-Ейлера (ALE), в якому послідовність крайових задач у поточній конфігурації тіла розв'язується за допомогою МСЕ. До моделювання залучено осесиметричний скінченний елемент з трикутним поперечним перерізом. Представлено основну систему рівнянь, що при використанні методу скінченних елементів описує у поточній конфігурації деформування осесиметричних тіл. На кожному етапі розрахунку у поточній конфігурації початкова задача розв'язується чисельно з використанням різницевого методу. При досягненні граничного значення компонентів тензора деформацій згідно з алгоритмом ALE відбувається перебудова скінченноелементної моделі з реалізацією нових крайових умов. Для побудови розрахункової моделі використано програму RD, в якій двовимірна модель перерізу осесиметричного тіла оточується сіткою спеціальних елементів. Обговорюється підхід до реалізації заданих граничних умов осесиметричного тіла при скінченноелементному моделюванні. Розрахунки незворотного деформування проведено у програмі, яку побудовано на базі використання програмного комплексу FEM Creep у випадку скінченних деформацій. Виконано порівняння даних чисельного моделювання з експериментальними результатами інших авторів, отриманими при дослідженні вибухового навантаження алюмінієвих кілець, насаджених на сферу. Проведено обробку експериментальних даних та визначено константи, що входять до рівняння стану, яке використовує гіпотезу зміцнення. Показано задовільну збіжність розрахункових та експериментально отриманих значень радіальної деформації кілець у різні моменти часу.

Ключові слова: чисельне моделювання, осесиметрична задача, скінченні деформації, МСЕ, програма, вибухове навантаження, алюмінієвий сплав.

Изложена постановка осесимметричной задачи необратимого пластического деформирования для случая конечных деформаций. Обсуждается возможность использования квазистатической постановки. Для описания быстрого деформирования использованы уравнения инкрементальной теории пластичности. Метод численного моделирования реализован на базе использования обобщенного подхода Лагранжа-Эйлера (ALE), в котором последовательность краевых задач в текущей конфигурации тела решается с помощью МКЭ. Для моделирования использован осесимметричный конечный элемент треугольного поперечного сечения. Представлена основная система уравнений, при использовании метода конечных элементов описывающая в текущей конфигурации деформирование осесимметричных тел. На каждом этапе расчета в текущей конфигурации начальная задача решается численно с использованием разностного метода. При достижении предельного значения компонент тензора деформаций согласно алгоритму ALE происходит перестроение конечноэлементной модели с реализацией новых краевых условий. Для построения расчетной модели использована программа RD, в которой двумерная модель сечения осесимметричного тела окружается сеткой специальных элементов. Обсуждается подход для реализации заданных граничных условий осесимметричного тела при конечноэлементном моделировании. Расчеты необратимого деформирования проведены в программе, разработанной на базе использования программного комплекса FEM Creep в случае конечных деформаций. Выполнено сравнение данных численного моделирования с экспериментальными результатами других авторов, полученными при исследовании взрывного нагружения алюминиевых колец, насаженных на сферу. Проведена обработка экспериментальных данных и определены константы, входящие в уравнение состояния стану, использующее гипотезу упрочнения. Показано удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментально полученных значений радиальной деформации колец в разные моменты времени.

Ключевые слова: численное моделирование, осесимметричная задача, конечные деформации, МКЭ, программа, взрывное нагружение, алюминиевый сплав.

The formulation of the axisymmetric problem of irreversible plastic deformation for the case of finite strains is presented. The possibility of using the quasi-static problem is discussed. The equations of the incremental theory of plasticity are used to describe fast deformation. The numerical simulation method is implemented based on the use of the Arbitrary Lagrange-Euler (ALE) approach, in which the sequence of boundary value problems in the current configuration of the solid is solved using the Finite Element Method. An axisymmetric finite element of a triangular cross-section was used for modeling. The main system of equations is presented, which, when using the Finite Element Method, describes the deformation of axisymmetric bodies in the current configuration. At each stage of the calculation in the current configuration, the initial problem is solved numerically using the finite difference method. When the limiting value of the strain tensor components is reached, according to the ALE algorithm, the finite element model is rebuilt with the implementation of new boundary conditions. To build a computational model, the RD program was used, in which a two-dimensional model of a section of an axisymmetric body is surrounded by a mesh of special elements. A presented approach for the implementation of the specified boundary conditions of an axisymmetric body in finite element modeling is discussed. Calculations of irreversible deformation were carried out in a program developed on the basis of using the FEM Creep software package in the case of finite strains. Comparison of the numerical simulation data with the experimental results of other authors, obtained in the investigations of the explosive loading of aluminum rings set on a sphere, is presented. The experimental data are processed and the constants included in the constitutive equation, using the hardening law, are determined. Satisfactory agreement between the calculated and experimentally obtained values of the radial strain of the rings at different times is shown.

Key words: numerical simulation, axisymmetric problem, finite strains, FEM, program, explosive loading, aluminum alloy.

Вступ. Розв'язання задач визначення напружено-деформованого стану в конструктивних елементах, що піддані дії вибухових навантажень, продовжує залишатись актуальним завданням. Протягом останніх десятиліть, після опрацювання класичних робіт, виконаних у цьому напрямі [1-6], та з виникненням методу скінченних елементів (МСЕ), було отримано можливість чисельного моделювання процесів деформування в елементах складної геометрії при будь-яких конфігураціях крайових умов [7-8].

Одним з важливих напрямків досліджень є аналіз характеру деформування елементів при імпульсних вибухових навантаженнях, коли не є потрібним врахування контактної взаємодії декількох тіл, але рівень деформацій є скінченним. Незважаючи на те, що деформування в цих умовах є пружно-пластичним, для його адекватного опису є необхідним розв'язання початково-крайової задачі [9]. Побудова рівнянь стану, які враховують залежність основних змінних від часу,

для випадку, що розглядається, також є важливим завданням [10].

На сьогодні дослідження деформування та руйнування конструкцій при вибухових та подібних навантаженнях виконуються у різних напрямках: аналізується вплив на металеві, будівельні конструкції, на гірські породи тощо [11-15].

Робота Е.Онате зі співавторами [11] присвячена моделюванню впливу імпульсних навантажень на будівельні споруди. Застосовано комбінацію методів скінченних та дискретних елементів. За результатами чисельного моделювання проаналізовано зміну характеру деформування та руйнування за часом.

Статті [12, 13] містять опис результатів аналітичних та чисельних досліджень осесиметричного деформування сферичних оболонок при дії внутрішніх динамічних вибухових навантажень. Розглянуто механізми зростання напружень.

В роботах [14, 15] вивчаються процеси зростання деформацій у сферичних судинах при дії вибухового навантаження всередині. Обговорюється використання термов'язкопластичного закону для чисельного моделювання, результати якого порівнювались з експериментальними.

Отже, розв'язання задач визначення впливу вибухових імпульсних навантажень на характер деформування конструктивних елементів потребує використання повної математичної постановки початково-крайової задачі з адекватними рівняннями стану, її розв'язання за допомогою МСЕ. Має бути передбачене виникнення та розвиток скінченних деформацій у часі. Саме в такій постановці в даній статті розглянуто метод розрахунку деформування кілець, навантажених осесиметричним тиском від вибухового пристрою.

Постановка задачі.

Розглянемо тривимірне осесиметричне тіло V , що у початковий момент деформування навантажене на частині її поверхні S_2 поверхневим тиском p . Задачу сформулюємо у загальній постановці з урахуванням скінченних деформацій. Як й у більшості реалізованих на базі МСЕ підходів ([7]), будемо виконувати формулювання задачі для розрахунку у початковій системі координат $X_I, I=1,2,3$.

Міра деформування описується градієнтом, обчисленим за початковими координатами X_I [7]:

$$F_{ii} = \frac{\partial x_i}{\partial X_I} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_I}, \quad (1)$$

де

$$F_{ii} = \begin{pmatrix} 1+u_{1,1} & 0 & u_{1,3} \\ 0 & 1+u_{2,2} & 0 \\ u_{3,1} & 0 & 1+u_{3,3} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

x_I – поточні координати точки, u_I – компоненти вектору переміщень у поточній системі координат, $i=1,2,3$.

Скористаємось гіпотезою відсутності запізнення плину, яка з достатнім ступенем точності реалізується при миттєвому навантаженні конструкцій [9]. Оскільки задачею аналізу є отримання опису деформування при вибуховому навантаженні, в її постановці немає необхідності в урахуванні динамічних хвильових процесів, наприклад зменшення амплітуди на наступних фазах розповсюдження хвиль. Тоді рівняння руху представимо у поточній конфігурації [7] та у квазістатичній постановці без урахування сил інерції:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на } S_2,$$

де σ_{ij} – компоненти тензору напружень Коші.

Розглядатимемо ізотропні матеріали, випадок малих початкових пружних деформацій e_{kl} :

$$\sigma_{ij} = (\hat{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \hat{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) e_{kl}, \quad (4)$$

де $\hat{\lambda}, \hat{\mu}$ – параметри Ляме.

Для опису незворотного деформування у поточній конфігурації застосуємо інкрементальну теорію [7]:

$$\varepsilon_{ij}^n = \Phi(I_2, t) s_{ij}, \quad (5)$$

де ε_{ij}^n – компоненти тензору незворотних пластичних деформацій у поточній конфігурації, Φ – функція другого інваріанту тензору напружень Коші I_2 та часу, s_{ij} – компоненти девіатора тензору напружень Коші.

Метод чисельного моделювання.

Для розв'язання задачі використовуватимемо МСЕ у комбінації з різницевим методом інтегрування системи диференціальних рівнянь першого порядку за часом. Завдяки осьовій симетрії задача зводиться до двовимірної відносно вузлових переміщень у радіальному та осьовому напрямку. Основна система рівнянь має наступну форму [7, 16]

$$[K]\{\dot{u}\} = \{\dot{F}\} + \{\dot{F}^n\}; \quad (6)$$

$$\{\dot{F}\} = \sum_{N_\beta} \int_{\sigma_\beta} [N^p] \cdot \{\dot{p}\} dS; \quad \{\dot{F}^n\} = \sum_{N_\beta} \int_{\sigma_\beta} [\bar{B}]^T \cdot [D] \cdot \{\dot{\varepsilon}^n\} dV;$$

$$\{u\}(t=0) = 0;$$

$$\{\dot{\varepsilon}^n\} \left\{ (\varepsilon^n)^\alpha \right\} = \frac{3}{2} B \sigma_i^{m-1} [\hat{L}] \{\sigma\}. \quad (7)$$

Тут застосовано наступні позначення: $[K]$ – матриця жорсткості системи; $\{F\}$ – вектор вузлових навантажень, обумовлених поверхневими силами; $\{F^n\}$ – вектор вузлових навантажень, обумовлених деформаціями повзучості; $[D]$ – матриця пружних констант; $[\hat{L}]$ – матриця, що утворюється при розрахунку незворотних пластичних деформацій, що залежать від часу; $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ – інтенсивність напружень за Мізесом; B, m, α – константи, що

визначаються експериментально; \sum_{N_p} – підсумовування за всіма скінченними елементами. Використано осесиметричний скінченний елемент трикутного поперечного перерізу. Подробиці отримання даної системи можуть бути знайдені у [16], де розглядалась аналогічна задача для випадку плоского напруженого стану, та у [17].

Аналогічно підходам, описаним у [16], має місце наступна послідовність у розв'язанні задачі. Після отримання розв'язку пружної задачі у постановці малих деформацій для $t=0$, проводиться інтегрування системи диференціальних рівнянь відносно вузлових переміщень (6). При отриманні заданого значення максимальних деформацій у скінченному елементі, наприклад 1%, відбувається перебудова сітки за алгоритмом ALE (узагальненого підходу Лагранжу-Ейлера) [7]. На наступному кроці за часом t_{n+1} ця поточна конфігурація вже вважатиметься початковою та описаний алгоритм повторюється спочатку. Метод розрахунку реалізовано у програмі *FEM Creep FS*, яка базується на програмному комплексі *FEM Creep* та використовує його трикутний SE й більшість методів та алгоритмів [17]. Для побудови SE моделей використовується програма *RD* [17], в якій підхід ALE реалізовано за допомогою використання двох типів SE – матеріальних, якими моделюються тіло, що деформується, та «повітряних», які обмежують матеріальні. За отриманням скінченних деформацій відбувається процес перебудови SE моделі, при цьому сама сітка лишається незмінною.

Задача вибухового деформування кільця потребує певної конкретизації способу отримання вектору швидкостей вузлових навантажень $\{\dot{F}\}$. Розглянемо випадок, коли навантаження реалізується наступним чином: кільце розміщується на зовнішній поверхні судини, як правило циліндричної або сферичної, в середині якої розміщуються вибуховий заряд. При вибуху отримується осесиметричне розширення кільця завдяки поверхневому навантаженню його за його внутрішнім радіусом. Як правило, при цьому є відомим значення швидкості руху точок кільця, яке позначимо вектором вузлових швидкостей переміщень $\{v\}$. Значення швидкостей вузлових сил $\{\dot{F}\}$ при цьому є невідомими. Для їхнього визначення застосуємо наступну процедуру.

При вибуховому навантаженні у початковий момент часу ($t=0$) має місце співвідношення:

$$[K]\{v\} = \{\dot{F}\}. \quad (8)$$

Тим самим значення компонентів вектору $\{\dot{F}\}$ є визначеними. Для кілець відносно малої товщини можливо вважати, що швидкість усіх їхніх точок у початковий момент незначно відрізняється від значення $\{v\}$, заданого на поверхні. Далі для малого проміжку часу з використанням інтегрування можливо отримати середнє значення компонентів вектору $\{F\}$.

Для реалізації цього алгоритму застосовано ПК *FEM Creep* [17], в якому використано тільки модуль для відповідного пружного розв'язку для моделі з тією ж скінченноелементною сіткою, що й для основної задачі.

Відомо, що завдяки використанню підходу Лагранжу [7] у скінченноелементних програмах немає можливості задавати т.зв. силові крайові умови. Для двовимірних моделей осесиметричних тіл це означає, що є необхідним задавати у деяких вузлах значення переміщень (закріплення). Це, як правило, мають бути вузли на торцях моделі. Завдяки такому закріпленню в цих місцях виникає концентрація напружень, обумовлена більшим значенням вузлових сил у порівнянні зі значеннями у вузлах, розташованими далі по меридіанальній координаті. Такі значення напружень істотно змінять значення швидкостей незворотних деформацій, що не буде відповідати фізичному сенсу задачі.

У зв'язку з цим, для запобігання нефізичної картини деформування використано наступний алгоритм. Розглядається скінченноелементна модель з регулярною сіткою елементів, шари яких розташовуються вздовж радіуса кільця. Для даної моделі розв'язується пружна задача (розглядається випадок малих переміщень, що відповідає покрововому розв'язку у застосованому підході):

$$[K]\{u\} = \{F\}, \{p\}|_{s_2} = p_m \quad (9)$$

та за знайденими вузловими переміщеннями визначається розподіл напружень за перерізом. Тут p_m – значення постійного тиску на внутрішньому радіусі кільця. Як видно, розглядається т.зв. задача Ляме [18], що має аналітичний розв'язок. Далі аналізуються чисельно отримані розподіли переміщень та напружень за радіусом у кожному шарі моделі. Вони порівнюються з отриманими в аналітичному розв'язку розподілами. Визначається шар, в якому отримані дані співпадають за прийнятною похибкою до 1%.

Тепер можливо повернутись до розв'язку системи (8), та виділити в ньому шар, що відповідає вірному розподілу компонентів напружено-деформованого стану у кільці. Далі значення вузлових сил, отримані у таких шарах, розповсюджуються на всю модель, що описується системою (6)-(7).

Ясно, що подібний підхід є обмеженим та придатним виключно для розв'язання задач, в яких є відомим пружний аналітичний розв'язок. Але метою даної роботи було виконання аналізу достовірності чисельних результатів деформування кілець при їхньому порівнянні з експериментальними. Такий аналіз представлено у наступному підрозділі.

Чисельне моделювання деформування алюмінієвих кілець при дії осесиметричного вибухового навантаження.

Для тестування методу розв'язку та запропонованих алгоритмів скористаємось результатами роботи [19], в якій надано результати

експериментальних досліджень вибухового розширення кілець, виготовлених з алюмінієвого сплаву Д16. Їх було насаджено на полу сталеву кулю, в якій розташовувався вибуховий заряд. При детонації кільця розширялась, їхні деформації вимірювались. Наведені в [19] результати експериментів порівнювались з даними скінченноелементного моделювання.

В роботі [19], що розглядається, наведено вихідні дані експериментального дослідження. До розрахунків залучимо наступні параметри кілець радіусом $R_1=R_3=0.0545$ м, $R_2=0.0815$ м: модуль пружності $E=7 \cdot 10^3$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$.

Проаналізуємо три випадки вибухового навантаження зі швидкістю деформації кільця $v_1=3400$ с⁻¹, $v_2=2030$ с⁻¹ та $v_3=1680$ с⁻¹. Авторами [19] для визначення значень напружень використано наступне диференціальне рівняння розширення кільця

$$\rho R \frac{d^2 R}{dt^2} = -\sigma_\theta, \quad (10)$$

де $\rho=2770$ Кг/м³ – густина сплаву; σ_θ – окружна компонента вектору напружень.

Розв'язок рівняння (9) для трьох наведених значень швидкостей деформації надав значення даних напружень $\sigma_{\theta 1}=320.8$ МПа, $\sigma_{\theta 2}=305.5$ МПа та $\sigma_{\theta 3}=126.8$ МПа. У зв'язку з тим, що для ідеально жорстко пластичного тіла $\sigma_i=\sigma_\theta$, отримані значення напружень можливо застосувати для обробки експериментальних даних та визначення констант, що входять до рівняння (7). Вони виявились рівними: $B=9.67605 \cdot 10^{-17}$ (МПа)^m/мс, $m=8.89657$, $\alpha=0.125$.

До порівняння чисельних та експериментальних результатів залучимо дані для кілець радіусом $R=0.0545$, що розширялись зі швидкостями v_1 та v_3 . За допомогою описаного у попередньому підрозділі алгоритму було визначено значення компонентів векторів вузлових швидкостей $\{\dot{F}\}$ скінченноелементної моделі, що складалась з 1800 елементів. За допомогою обмеження можливостей торцевих вузлів моделі зсуватись в осьовому напрямку було реалізовано їхній рух згідно з умовами експерименту.

Результати розрахунків спільно з даними експериментальних досліджень, наведеними у роботі [19], представлено на рис. 1. Порівнювались деформації кільця у радіальному напрямі у різні моменти часу. Тут кривою 1 позначено дані для випадку руху з $v_3=1680$ с⁻¹, кривою 2 - $v_1=3400$ с⁻¹. Коловими точками позначено розрахункові дані, трикутниками – експериментальні. Найгірша розбіжність між чисельними та експериментальними даними має місце для кривої 1 (швидкість v_3) та складає 30%, що є припустимим при моделюванні нелінійних процесів. Для кривої 2 похибка є значно меншою та не перевершує 14%.

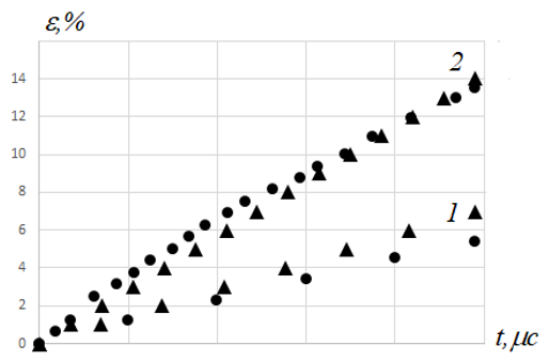


Рисунок 1 – Залежність радіальних деформацій кільця від часу. Порівняння чисельних та експериментальних даних

Проведене порівняння свідчить щодо можливості чисельного моделювання процесів вибухового розширення кілець у квазістатичній постановці з задовільним ступенем відповідності розрахункових та експериментальних даних.

Висновки. Статтю присвячено опису підходів та методу чисельного моделювання процесу деформування кілець при вибуховому навантаженні з урахуванням великих деформацій. Запропоновано методику для реалізації заданих граничних умов осесиметричного тіла при скінченноелементному моделюванні. Обговорено та підтверджено шляхом порівняння чисельних та експериментальних даних можливість моделювання процесу вибухового розширення кілець з алюмінієвого сплаву Д16 у квазістатичній постановці.

Список літератури

1. Гольдсмит. В. *Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.* М. 1965. 448 с.
2. Кильчевский Н. А. *Теория соударения твердых тел.* Киев. 1969. 246 с.
3. Филиппов А. П., Кохманюк С.С., Янютин Е.Г. *Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок.* Киев. 1978. 184 с.
4. Степанов Г. В. *Упруго-пластическое деформирование и разрушение материалов при импульсном нагружении.* Киев, 1991. 288 с.
5. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю.А. *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках.* М., 1961. 399 с.
6. Ионов В. Н., Огибалов П.М. *Прочность пространственных элементов конструкций. Динамика и волны напряжений.* М. Высшая школа. 1980. 440 с.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Wood D.D. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics.* Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2013. 672 p.
8. Kurydzanov V. N. *Numerical Continuum Mechanics.* De Gruyter. 2013. 428 p.
9. Cristescu N. *Dynamic plasticity.* Amsterdam: North Holland, 2004. 614 p.
10. Cristescu N. A procedure for determining the constitutive equations for materials exhibiting both time-dependent and time-independent plasticity. *International Journal of Solids and Structures.* 1972. Vol. 8, Is. 4. P.511-531.
11. Oñate E, Labra C., Zárate F., Rojek J. Modelling and simulation of the effect of blast loading on structures using an adaptive blending of discrete and finite element methods. / *Risk Analysis, Dam Safety, Dam Security and Critical Infrastructure Management.* 2012. P. 365-372.

12. Duffey T. A., Rodriguez E.A., Romero C. Detonation-induced dynamic pressure loading in containment vessels. *Report LA-UR-02-0366*. Los Alamos National Laboratory. 2002.

13. Duffey T. A., Romero C. Strain growth in spherical explosive chambers subjected to internal blast loading. *Int J Impact Eng.* 2003. 28 (9). P. 967-983.

14. Dong Q., Li Q.M., Zheng J.Y. Further study on strain growth in spherical containment vessels subjected to internal blast loading. *Int J Impact Eng.* 2010. 37 (2). P. 196-206.

15. Ma L., Hu Y., Zheng J.Y., Deng G.D., Chen Y.. Failure analysis for cylindrical explosion containment vessels. *Eng Fail Anal.* 2010. 17 (5). P. 1221-1229.

16. Бреславський Д. В., Татарінова О.А. Метод та програмний засіб для скінченноелементного розв'язання двовимірних задач повзучості при великих деформаціях. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин.* Харків. НТУ «ХПІ». 2021. № 1. С. 3-9.

17. Бреславський Д.В., Коритко Ю.М., Татарінова О.А. *Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення.* Харків: «Підручник НТУ «ХПІ», 2017. 232 с.

18. Демидов С. П. *Теория упругости.* М. 1979. 432 с.

19. Рыжанский В.А., Минева В.Н., Цыпкин В.И., Иванов А.Г., Клещевников О.А. Экспериментальное исследование взрывного расширения колец из отожженного алюминиевого сплава. *Физика горения и взрыва.* 1976. Т. 12, №1. С. 120-124.

References (transliterated)

1. Holdsmyt. V. *Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemykh tel.* [Strike. Theory and physical properties of colliding bodies]. Moscow. 1965. 448 p.

2. Kilchevskiy N. A. *Teoriya soudareniya tverdyykh tel.* [Theory of impact of rigid bodies]. Kiev. 1969. 246 p.

3. Filippov A.P., Kohmanyuk S.S., Yanyutin E.G. *Deformirovaniye elementov konstruksiy pod deystviem udarnyykh i impulsnykh nagruzok.* [Deformation of structural elements under the influence of shock and impulse loads]. Kiev. 1978. 184 p.

4. Stepanov G. V. *Uprugo-plasticheskoye deformirovaniye i razrusheniye materialov pri impulsnom nagruzhenni.* [Elastic-plastic deformation and fracture of materials under impulse loading]. Kiev. 1991. 288 p.

5. Rahmatulin H. A., Demyanov Yu. A. *Prochnost pri intensivnykh kratkovremennykh nagruzkah.* [Strength under intensive short-term loads]. Moscow. 1961. 399 p.

6. Ionov V. N., Ogibalov P. M. *Prochnost prostranstvennykh elementov konstruksiy. Dinamika i volnyi napryazheniy.* [Strength of spatial elements of structures. Dynamics and stress waves.]. Moscow. Vysshaya shkola. 1980. 440 p.

7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Wood D.D. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics.* Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2013. 672 p.

8. Kukydzanov V. N. *Numerical Continuum Mechanics.* De Gruyter. 2013. 428 p.

9. Cristescu N. *Dynamic plasticity.* Amsterdam: North Holland, 2004. 614 p.

10. Cristescu N. A procedure for determining the constitutive equations for materials exhibiting both time-dependent and time-independent plasticity. *International Journal of Solids and Structures.* 1972. Vol. 8, Is. 4. P.511-531.

11. Oñate E, Labra C., Zárate F., Rojek J. Modelling and simulation of the effect of blast loading on structures using an adaptive blending of discrete and finite element methods. / *Risk Analysis, Dam Safety, Dam Security and Critical Infrastructure Management.* 2012. P. 365-372.

12. Duffey T. A., Rodriguez E.A., Romero C. Detonation-induced dynamic pressure loading in containment vessels. *Report LA-UR-02-0366*. Los Alamos National Laboratory. 2002.

13. Duffey T. A., Romero C. Strain growth in spherical explosive chambers subjected to internal blast loading. *Int J Impact Eng.* 2003. 28 (9). P. 967-983.

14. Dong Q., Li Q.M., Zheng J.Y. Further study on strain growth in spherical containment vessels subjected to internal blast loading. *Int J Impact Eng.* 2010. 37 (2). P. 196-206.

15. Ma L., Hu Y., Zheng J.Y., Deng G.D., Chen Y.. Failure analysis for cylindrical explosion containment vessels. *Eng Fail Anal.* 2010. 17 (5). P. 1221-1229.

16. Breslavskiy D. V., Tatarinova O.A. Metod ta prohramnyi zasib dlia skinchennoelementnoho rozv'iazannia dvovymirnykh zadach povzuchosti pry velykykh deformatsiyakh. [The method of that program zasib for the reduced elemental decoupling of two-world problems of soundness at large deformations]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dinamika i mitsnist mashyn.* Kharkiv. NTU «KhPI». 2021. № 1. P. 3-9.

17. Breslavskiy D.V., Korytko Yu.M., Tatarinova O.A. *Proektuvannia ta rozrobka skinchennoelementnoho prohramnoho zabezpechennia.* [Design and development of finite element software]. Kharkiv «Pidruchnyk NTU «KhPI» Publ., 2017, 232 p.

18. Demidov S. P. *Teoriya uprugosti.* [Theory of elasticity.]. Moscow. 1979. 432 p.

19. Ryzhanskiy V.A., Mineev V.N., Tsyipkin V.I., Ivanov A.G., Kleschevnikov O.A. Eksperimentalnoye issledovaniye vzryivnogo rasshireniya kolets iz otzhzhennogo alyuminievogo splava. [Experimental study of the explosive expansion of rings made of annealed aluminum alloy]. *Fizika gorennya i vzryiva.* 1976. Т. 12, №1. P. 120-124.

Надійшло (received) 01.08.2022

Відомості про авторів/ About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: dmytro.breslavsky@khp.edu.ua

Breslavsky Dmytro Vasylovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)-707-64-54; e-mail: dmytro.breslavsky@khp.edu.ua

Татарінова Оксана Андріївна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: ok.tatarinova@gmail.com

Tatarinova Oksana Andriivna – Candidate of Technical Sciences, Dozent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)-707-60-58; e-mail: ok.tatarinova@gmail.com