

**ОПТИМІЗАЦІЯ І ПРОГРАМНО-ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМА МІЛЛЕРА НА ЧОТИРИЧАСТОТНІЙ МОДЕЛІ ВІБРАЦІЙНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА**

Розглядається задача визначення кватерніонів орієнтації в безплатформених інерціальних навігаційних системах на основі ідеальної інформації з триади датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат. В якості проміжних параметрів орієнтації при цьому застосовується вектор орієнтації, обчислений алгоритмом Міллера. Для оптимізації алгоритма Міллера за критерієм мінімуму похибки накопиченого дрейфу запропонований тестовий кутовий рух твердого тіла, оснований на новій чотиричастотній аналітичній кінематичній моделі. Представлена математична модель кінематики кутового руху твердого тіла основана на послідовності чотирьох поворотів, коли перші три повороти відповідають послідовності кутів Крылова, а четвертий здійснюється навколо другої повернутої осі. Розглянуто випадок лінійності кутів елементарних поворотів. Для моделювання тестового руху кінематична модель була доповнена аналітичними виразами для проєкцій вектора кутової швидкості і для квазікоординат. При належному виборі частот в кінематичній моделі такий тестовий рух можна застосовувати для моделювання вібраційної обстановки і відпрацювання алгоритмів орієнтації. На основі програмно-чисельного підходу отримані уточнені значення коефіцієнтів в алгоритмі Міллера, що мінімізують похибку накопиченого дрейфу. Результати чисельного моделювання еталонної моделі для заданого набору частот представлені у вигляді залежностей проєкцій вектора кутової швидкості твердого тіла від часу і побудованих траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Запрограмований і промодельований алгоритм визначення кватерніонів четвертого порядку. Показано, що для представленої еталонної моделі кутового руху алгоритм Міллера з новим набором коефіцієнтів забезпечує меншу накопичену обчислювальну похибку дрейфу у порівнянні з класичним алгоритмом Міллера і модифікацією Ігнагні, що оптимізовані під конічний рух.

**Ключові слова:** кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, траєкторії в конфігураційному просторі, алгоритм орієнтації Міллера, чисельна оптимізація, похибка дрейфу, вібраційна обстановка.

Рассматривается задача определения кватернионов ориентации в бесплатформенных инерциальных навигационных системах на основе идеальной информации с триады датчиков угловой скорости в виде квазикоординат. В качестве промежуточных параметров ориентации при этом используется вектор ориентации, вычисленный алгоритмом Миллера. Для оптимизации алгоритма Миллера по критерию минимума погрешности накопленного дрейфа предложено тестовое угловое движение твердого тела, основанное на новой четырехчастотной аналитической кинематической модели. Представленная математическая модель кинематики углового движения твердого тела основана на последовательности четырех поворотов, когда первые три поворота отвечают последовательности углов Крылова, а четвертый совершается вокруг второй повернутой оси. Рассмотрен случай линейности углов элементарных поворотов. Для моделирования тестового движения кинематическая модель была дополнена аналитическими выражениями для проекций вектора угловой скорости и для квазикоординат. При надлежащем выборе частот в кинематической модели такое тестовое движение можно использовать для моделирования вибрационной обстановки и отработки алгоритмов ориентации. На основе программно-численного подхода получены уточненные значения коэффициентов в алгоритме Миллера, которые минимизируют погрешность накопленного дрейфа. Результаты численного моделирования эталонной модели для заданного набора частот представлены в виде зависимостей проекций вектора угловой скорости твердого тела от времени и построенных траекторий в конфигурационном пространстве параметров ориентации. Запрограммирован и промоделирован алгоритм определения кватернионов четвертого порядка. Показано, что для представленной эталонной модели углового движения алгоритм Миллера с новым набором коэффициентов обеспечивает меньшую накопленную вычислительную погрешность дрейфа по сравнению с классическим алгоритмом Миллера и модификацией Игнагни, которые оптимизированы под коническое движение.

**Ключевые слова:** кватернион, эталонная модель, тестовое движение, квазикоординаты, траектории в конфигурационном пространстве, алгоритм ориентации Миллера, численная оптимизация, погрешность дрейфа, вибрационная обстановка.

The problem of determination of orientation quaternions in strapdown inertial navigation systems using ideal information from a triad of angular velocity sensors in the form of quasi-coordinates is considered. In this case, the orientation vector, which is calculated by Miller's algorithm, is used as intermediate orientation parameters. To optimize Miller's algorithm according to the criterion of the accumulated drift error minimum, a test angular motion of a rigid body is proposed, based on a new four-frequency analytical kinematic model. The presented mathematical model of the kinematics of the angular motion of a rigid body is based on a sequence of four rotations, when the first three rotations correspond to the sequence of Krylov angles, and the fourth is performed around the second rotated axis. The case of linearity of the angles of elementary rotations is considered. To simulate the test motion, the kinematic model was supplemented with analytical expressions for the projections of the angular velocity vector and for quasi-coordinates. With an appropriate choice of frequencies in the kinematic model, such a test motion can be used to simulate a vibration environment and work out orientation algorithms. On the basis of a programmed-numerical approach, the adjusted values of the coefficients in the Miller's algorithm are obtained, which minimize the error of the accumulated drift. The results of numerical modeling of the reference model for a given set of frequencies are presented in the form of the dependences of the projections of the angular velocity vector of a rigid body on time and the constructed trajectories in the configuration space of the orientation parameters. An algorithm for determining fourth-order quaternions has been programmed and modeled. It is shown that for the presented reference model of angular motion, Miller's algorithm with a new set of coefficients provides a smaller accumulated computational drift error in comparison with the classical Miller's algorithm and the Ignagni modification, which are optimized for conical motion.

**Key words:** quaternion, reference model, test motion, quasicordinates, trajectories in configuration space, Miller orientation algorithm, numerical optimization, drift error, vibration environment.

**Вступ.** Розглядається задача визначення орієнтації в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС) по ідеальній інформації з триади датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат [1]:

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

де  $\omega_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проєкції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта  $\vec{\omega}$  на осі зв'язаної системи координат.

Розроблено велику кількість алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації, оснований на різних підходах [2–4], що орієнтовані на первинну інформацію (1). Один з підходів базується на використанні вектора орієнтації, як проміжного

параметра при обчисленні кватерніона орієнтації. Значний доробок в розробку алгоритмів визначення вектора орієнтації різного порядку в Україні належить А.Панову [5,6]. Ним була розроблена низка алгоритмів, що використовують первинну інформацію (1), яка відноситься до різних тактів змінання. В умовах сучасного розвитку приладного забезпечення БНС, підвищення швидкодії обчислювачів і застосування їх для високодинамічних об'єктів інтерес представляють алгоритми, що використовують інерціальну інформацію всередині такту обчислень. Алгоритми, основані на поліноміальній апроксимації кутової швидкості всередині такту, представлені в [7,8]. В алгоритмі Міллера [7] приріст вектора орієнтації на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  обчислюється за формулою:

$$\bar{\theta}_n = \bar{\theta}_n^* + \alpha(\bar{\theta}_n^1 \times \bar{\theta}_n^3) + \beta\bar{\theta}_n^2 \times (\bar{\theta}_n^3 - \bar{\theta}_n^1), \quad (2)$$

де  $\bar{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)$ , а вихідні сигнали гіроскопів

$$\bar{\theta}_n^1 = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/3\Delta T} \bar{\omega}(t)dt, \quad \bar{\theta}_n^2 = \int_{t_{n-1}+1/3\Delta T}^{t_{n-1}+2/3\Delta T} \bar{\omega}(t)dt,$$

$$\bar{\theta}_n^3 = \int_{t_{n-1}+2/3\Delta T}^{t_{n-1}+\Delta T} \bar{\omega}(t)dt \quad \text{формується всередині такту}$$

обчислень в точках знімання первинної інформації  $t_{n-1}+1/3\Delta T$ ,  $t_{n-1}+2/3\Delta T$ ,  $t_{n-1}+\Delta T$ ,  $\Delta T$  – тривалість такту обчислень. Міллером отримано, що  $\alpha = 33/80$ ,  $\beta = 57/80$ .

Оцінювання методичних похибок алгоритмів орієнтації можна провести за допомогою спеціальних тестових рухів твердого тіла, для яких орієнтація і компоненти вектора кутової швидкості можуть бути представлені в аналітичному вигляді. Так, в роботі [9] наведена аналітична модель кінцевого руху, названа «SPIN-CONE» моделлю. Такі моделі можна використати для оптимізації алгоритмів орієнтації під конкретний тестовий рух, наприклад, алгоритм (2) був отриманий на основі оптимізації аналітичного виразу похибки орієнтації у вигляді степеневого ряду з подальшим визначенням невідомих коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\beta$ , виходячи з умови відсікання вищих членів ряду. Розвиток ця методика отримала в роботі Ігнагні [10]. В оптимізованому ним під кіничний рух алгоритмі (2) значення коефіцієнтів були уточнені:  $\alpha = 36/80$ ,  $\beta = 54/80$ . Методика оптимізації алгоритмів орієнтації під регулярну прецесію і кіничний рух, що основана на мінімізації асимптотичних оцінок похибки обчислювального дрейфу, була реалізована А. Пановим в роботах [11–13]. В роботах [14,15] представлена удосконалена методика оптимізації алгоритмів орієнтації і наведені результати досліджень по оптимізації алгоритмів в умовах узагальненого кіничного руху [10], регулярної прецесії і випадкового кутового руху.

Оскільки кіничний рух і регулярна прецесія є достатньо специфічними випадками кутового руху твердого тіла, для яких існують аналітичні розв'язки динамічних і кінематичних рівнянь, практичний інтерес представляє отримання оцінок точності алгоритмів орієнтації, в тому числі оптимізованих під конкретний рух, на більш складних кутових рухах. В

роботах [16–18] запропоновані нові тестові рухи твердого тіла, в основі яких лежить тригонометричне представлення кватерніона орієнтації.

В даній роботі в якості тестового руху пропонується еталонна модель, основана на чотиричастотному представленні кватерніона орієнтації і проводиться оптимізація коефіцієнтів в алгоритмі Міллера на цій моделі.

**Чотиричастотна аналітична модель кутового руху твердого тіла.** Отримаємо математичну модель кінематики кутового руху твердого тіла, основану на послідовності чотирьох елементарних поворотів, де перші три повороти здійснюються в послідовності кутів Крилова  $\varphi$ ,  $\psi$  і  $\mathcal{G}$  [2], а четвертий поворот здійснюється навколо другої поверненої осі на кут  $\chi$ . Компоненти результуючого кватерніона повороту  $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  в цьому випадку будуть мати вигляд:

$$\Lambda = (\cos \frac{\varphi}{2} + \bar{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}) \circ (\cos \frac{\psi}{2} + \bar{i}_2 \sin \frac{\psi}{2}) \circ (\cos \frac{\mathcal{G}}{2} + \bar{i}_1 \sin \frac{\mathcal{G}}{2}) \circ (\cos \frac{\chi}{2} + \bar{i}_2 \sin \frac{\chi}{2}),$$

де  $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$  – орти відповідних осей.

Покомпонентно отримаємо:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\chi}{2} \cdot (\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\mathcal{G}}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\mathcal{G}}{2}) - \\ &- \sin \frac{\chi}{2} \cdot (\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\mathcal{G}}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\mathcal{G}}{2}); \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\chi}{2} \cdot (\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\mathcal{G}}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\mathcal{G}}{2}) - \\ &- \sin \frac{\chi}{2} \cdot (\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\mathcal{G}}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\mathcal{G}}{2}); \quad (3) \\ \lambda_2 &= \cos \frac{\chi}{2} \cdot (\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\mathcal{G}}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\mathcal{G}}{2}) + \\ &+ \sin \frac{\chi}{2} \cdot (\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\mathcal{G}}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\mathcal{G}}{2}); \\ \lambda_3 &= \sin \frac{\chi}{2} \cdot (\sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\mathcal{G}}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\mathcal{G}}{2}) + \\ &+ \sin \frac{\chi}{2} \cdot (\cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\mathcal{G}}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\mathcal{G}}{2}). \end{aligned}$$

Отриманий кватерніон орієнтації  $\Lambda$  є нормованим:  $\|\Lambda\| = 1$ . Нехай кути  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mathcal{G}$  і  $\chi$  змінюються у часі за деяким законом:

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}(t), \quad \chi = \chi(t).$$

Тоді проекції вектора кутової швидкості

$$\bar{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$$

на зв'язані осі, що відповідає такій кінематичній моделі, можна отримати з оберненого кінематичного рівняння для кватерніона  $\Lambda(t)$ :

$$\dot{\bar{\omega}}(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t), \quad (4)$$

де  $\tilde{\Lambda}(t)$  – спряжений кватерніон до  $\Lambda(t)$ . В цьому випадку маємо:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= -\sin \chi(t)(\dot{\varphi}(t) \cos \psi(t) \cos \vartheta(t) - \\
&- \dot{\psi}(t) \sin \vartheta(t)) + \cos \chi(t)(\dot{\vartheta}(t) - \dot{\varphi}(t) \sin \psi(t)); \\
\omega_2(t) &= \dot{\chi}(t) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}(t)(\sin(\vartheta(t) + \psi(t)) + \\
&+ \sin(\vartheta(t) - \psi(t))) + \dot{\psi}(t) \cos \vartheta(t); \\
\omega_3(t) &= \sin \chi(t)(\dot{\vartheta}(t) - \dot{\varphi}(t) \sin \psi(t)) + \\
&+ \cos \chi(t)(\dot{\varphi}(t) \cos \psi(t) \cos \vartheta(t) - \dot{\psi}(t) \sin \vartheta(t)).
\end{aligned} \tag{5}$$

Нехай кути  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$  і  $\chi$  змінюються у часі лінійно:  $\varphi(t) = k_1 t$ ,  $\psi(t) = k_2 t$ ,  $\vartheta(t) = k_3 t$ ,  $\chi(t) = k_4 t$ .

Тоді модельний кватерніон орієнтації (3) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \cos\left(\frac{k_4}{2}t\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{k_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_3}{2}t\right) + \right. \\
&+ \sin\left(\frac{k_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_3}{2}t\right) - \\
&- \sin\left(\frac{k_4}{2}t\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{k_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_3}{2}t\right) + \right. \\
&+ \sin\left(\frac{k_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_3}{2}t\right)); \\
\lambda_1(t) &= \cos\left(\frac{k_4}{2}t\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{k_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_3}{2}t\right) - \right. \\
&- \sin\left(\frac{k_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_3}{2}t\right)) - \\
&- \sin\left(\frac{k_4}{2}t\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{k_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_3}{2}t\right) - \right. \\
&- \cos\left(\frac{k_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_3}{2}t\right)); \\
\lambda_2(t) &= \cos\left(\frac{k_4}{2}t\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{k_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_3}{2}t\right) + \right. \\
&+ \sin\left(\frac{k_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_3}{2}t\right)) + \\
&+ \sin\left(\frac{k_4}{2}t\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{k_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_3}{2}t\right) + \right. \\
&+ \sin\left(\frac{k_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_3}{2}t\right)); \\
\lambda_3(t) &= \cos\left(\frac{k_4}{2}t\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{k_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_3}{2}t\right) - \right. \\
&- \cos\left(\frac{k_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_3}{2}t\right)) + \\
&+ \sin\left(\frac{k_4}{2}t\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{k_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_3}{2}t\right) - \right. \\
&- \sin\left(\frac{k_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_3}{2}t\right)).
\end{aligned} \tag{6}$$

В цьому випадку проекції вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
\omega_1(t) &= -\sin(k_4 t)(k_1 \cos(k_2 t) \cos(k_3 t) - k_2 \sin(k_3 t)) + \\
&+ \cos(k_4 t)(k_3 - k_1 \sin(k_2 t)); \\
\omega_2(t) &= k_4 + \frac{1}{2} k_1 (\sin((k_3 + k_2)t) + \sin((k_3 - k_2)t)) +
\end{aligned}$$

$$+ k_2 \cos(k_3 t); \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\omega_3(t) &= \sin(k_4 t)(k_3 - k_1 \sin(k_2 t)) + \\
&+ \cos(k_4 t)(k_1 \cos(k_2 t) \cos(k_3 t) - k_2 \sin(k_3 t)).
\end{aligned}$$

Кінематична модель (3) разом з вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}(t)$ , що відповідає цій кінематичній моделі, цілком описують кутовий рух твердого тіла. Така модель обертання при належному наборі частот  $k_1, k_2, k_3, k_4$  може застосовуватися для моделювання кутового руху твердого тіла в умовах вібрацій.

Для оцінювання точності алгоритмів орієнтації в БІНС модель обертання (3), (7) треба доповнити математичною моделлю датчиків кутової швидкості. Для цього алгоритмічно треба знайти спочатку в аналітичному вигляді компоненти вектора позірною повороту

$$\vec{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt, \quad i = 1, 2, 3 \tag{8}$$

а потім скористатися різницевою формулою:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3 \tag{9}$$

Оскільки при цьому в моделі кутового руху (3), (7) і в значеннях квазікоординат (9) відсутні похибки, пов'язані з чисельним інтегруванням, можна вважати, що побудований тестовий рух для оцінювання точності алгоритмів орієнтації в БІНС.

**Програмно-чисельна реалізація моделі кутового руху.** Реалізуємо програмно-чисельно модель обертального руху (3), (6) з тактом  $\Delta t = 0.1$  с на інтервалі часу  $t \in [0, 1000]$  с для значень частот кінематичної моделі  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 1.55$ ,  $k_3 = 0.35$ ,  $k_4 = 0.75$ . Отримані залежності проекцій вектора швидкості на зв'язані осі представлені на рис 1. Отримані траєкторії  $\lambda_i(\lambda_0)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) в конфігураційному просторі параметрів орієнтації наведені на рис. 2.

**Програмно-чисельна оптимізація алгоритма Міллера.** Для аналізу точності алгоритма Міллера з метою уточнення коефіцієнтів застосуємо оцінку накопиченого обчислювального дрейфу [2]:

$$\delta\theta_n = 2 \arctg(|\text{vect}(\delta A_n)| / \text{scal}(\delta A_n)), \tag{10}$$

де  $\delta A_n$  – кватерніон накопиченої похибки орієнтації  $\delta A_n = A_n^* \circ \tilde{A}_n$ ,  $A_n^* = A^*(t_n)$  – обчислений алгоритмом орієнтації кватерніон в момент  $t_n$ ,  $\tilde{A}_n$  – кватерніон, спряжений до кватерніона орієнтації еталонної моделі (3).

Щоб отримати обчислений на основі алгоритма кватерніон орієнтації  $A_n^*$ , застосуємо формулу складання поворотів

$$A_n^* = A_{n-1}^* \circ \Delta A_n^*, \tag{11}$$

де  $\Delta A_n^* = (\Delta \lambda_n^*, \Delta \lambda_n^*, \Delta \lambda_n^*)$  – кватерніон, обчислений на основі квазікоординат (1) на такті  $[t_{n-1}, t_n]$ :

$$\Delta\lambda_n^* = 1 - (1/8)\theta_n^2 + (1/384)\theta_n^4,$$

$$\Delta\lambda_i^* = (1/2)\theta_{ni}(1 - \theta_n^2/24), \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

де  $\theta_{ni}$  – компоненти вектора орієнтації,  $\theta_n^2 = \theta_{n1}^2 + \theta_{n2}^2 + \theta_{n3}^2$ . Алгоритм визначення кватерніона повороту (12) має четвертий порядок точності.

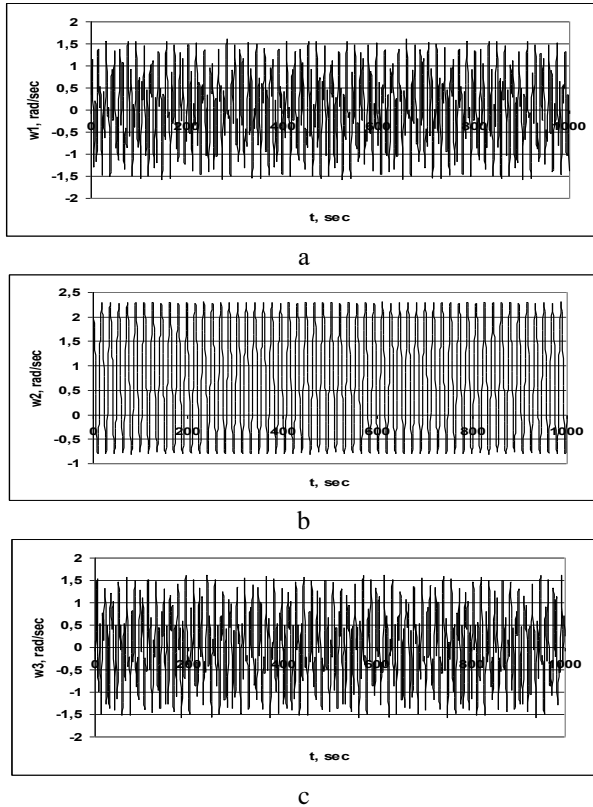


Рисунок 1 – Проекції вектора кутової швидкості твердого тіла від часу при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 1.55$ ,  $k_3 = 0.35$ ,  $k_4 = 0.75$   
 а – на першу вісь; б – на другу вісь; с – на третю вісь

Моделювання тестового руху і оцінювання алгоритма Міллера проведемо за схемою, що наведена на рис.3.

**Перший етап оптимізації.** Зазначимо, що в класичному алгоритмі Міллера (2) і в модифікації Ігнагні сума коефіцієнтів  $\alpha + \beta = 1.125$ . Проаналізуємо точність алгоритма Міллера ( $\alpha = 33/80, \beta = 57/80$ ) і модифікації Ігнагні ( $\alpha = 36/80, \beta = 54/80$ ), змінюючи  $\alpha + \beta$  в межах [1.125; 1.128]. Результати чисельного експерименту представлені в табл. 1 і на рис.4. В результаті отримали, що мінімальне значення оцінки похибки дрейфу спостерігається не для  $\alpha + \beta = 1.125$ , як це має місце для класичного алгоритма Міллера і модифікації Ігнагні, а при  $\alpha + \beta = 1.127$ .

**Другий етап оптимізації.** На першому етапі оптимізації було отримано, що найкращий результат в сенсі мінімуму накопиченої похибки дрейфу має місце, коли сума коефіцієнтів в алгоритмі Міллера  $\alpha + \beta = 1.127$ . Після цього можна уточнити значення коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$ . Для цього будемо змінювати коефіцієнт  $\alpha$  в межах від 0.8 до 1.2. Результати

обчислень оцінки похибки накопиченого дрейфу при застосуванні алгоритма Міллера із зміненими коефіцієнтами представлені в табл.2 і на рис.5.

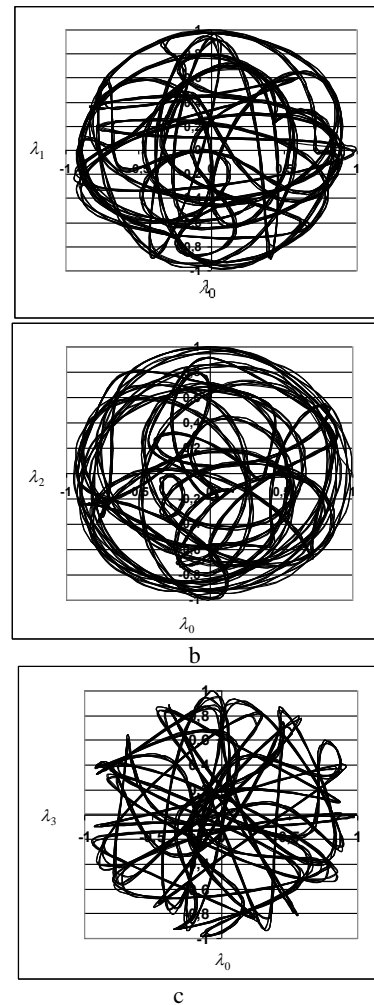


Рисунок 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації еталонної моделі при  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 1.55$ ,  $k_3 = 0.35$ ,  $k_4 = 0.75$   
 а –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; с –  $\lambda_3(\lambda_0)$

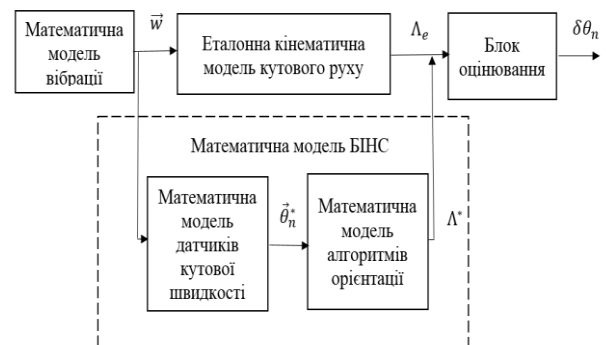
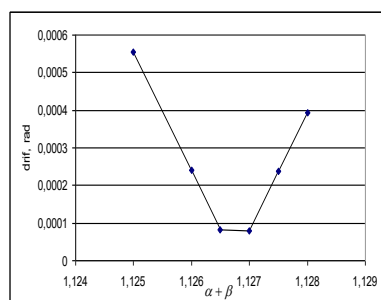


Рисунок 3 – Блок-схема моделювання

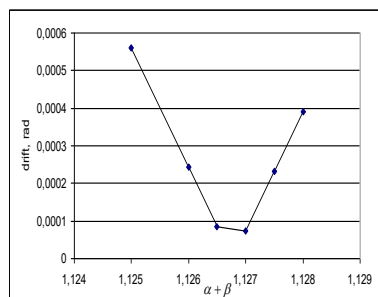
Таблиця 1. – Точність алгоритмів на еталонній моделі (3)

$\alpha + \beta$	класичний алгоритм Міллера, дрейф (рад)	модифікація Ігнагні, дрейф (рад)
1.125	0.000556	0.000561
1.126	0.000239	0.000244
1.1265	8.14E-05	8.59E-05

1.127	7.84E-05	7.39E-05
1.1275	0.000236	0.000232
1.128	0.000395	0.00039



а

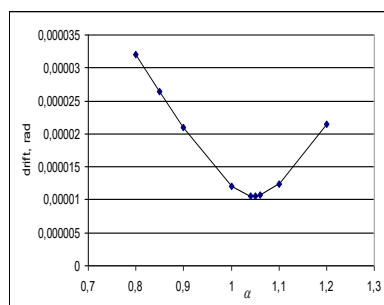


б

Рисунок 4 – Оцінка накопиченого дрейфу для алгоритмів а – Міллера; б – модифікації Ігнагні

Таблиця 2. – Накопичений дрейф

$\alpha$	Змінений алгоритм Міллера, дрейф (рад)
0.8	3.21E-05
0.85	2.64E-05
0.9	2.09E-05
1.0	1.21E-05
1.04	1.06E-05
1.05	1.06E-05
1.06	1.07E-05

Рисунок 5 – Оцінка накопиченого дрейфу для зміненого алгоритму Міллера в залежності від коефіцієнта  $\alpha$ 

В результаті чисельної оптимізації було отримано, що мінімальне значення накопиченої похибки обчислювального дрейфу спостерігається при значеннях коефіцієнтів в алгоритмі Міллера  $\alpha = 1.05$ ,  $\beta = 0.077$ . При цьому ця похибка (1.06E-05 рад) значно менша, ніж відповідні похибки для

класичного алгоритму Міллера (7.84E-05 рад) і модифікації Ігнагні (7.39E-05 рад).

**Висновки.** У статті представлений аналітичний тестовий рух твердого тіла, оснований на новій кінематичній моделі чотирьох послідовних поворотів на лінійні кути. На відміну від відомих випадків інтегрованості в квадратурах системи рівнянь обертання твердого тіла (регулярної прецесії і конічного руху) даний кутовий рух є більш узагальненим кутовим рухом, який при належному наборі частот можна також застосувати для моделювання вібраційної обстановки з метою відпрацювання алгоритмів орієнтації в БІНС. Розроблена розрахункова програма на мові C++, яка дозволяє отримувати з заданим тактом еталонну кінематичну модель кутового руху, чисельно реалізувати математичну модель датчиків кутової швидкості, математичну модель алгоритму орієнтації і отримувати оцінку накопиченого дрейфу. Проведена програмно-чисельна оптимізація алгоритму Міллера на представленому тестовому русі і показано, що мінімальна похибка накопиченого дрейфу спостерігається при значенні коефіцієнтів  $\alpha = 1.05$ ,  $\beta = 0.077$ , причому ця похибка значно менша, ніж це має місце для традиційного алгоритму Міллера і модифікації Ігнагні, коефіцієнти в яких оптимізовані під конічний рух.

#### Список літератури

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973.-320 с.
3. Savage P.G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design Part 1:Attitude algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 21, No 1, 1998. PP.19–28.
4. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной навигации. – К.: Наук. думка, 1995. – 280 с.
5. Панов А.П. Двухшаговые алгоритмы вычисления параметров ориентации // Космич. исслед. на Украине.– К.: Наук. думка, 1974.– Вып. 5.– С.76–82.
6. Панов А.П. Асимптотические оценки погрешностей методов вычисления параметров ориентации твердого тела // Кибернетика и вычисл. техника. – 1980. – Вып. 47. – С. 59-71.
7. Miller R.B. A new strapdown attitude algorithm. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, No 4, 1983. PP.287–291.
8. Плаксий Ю.А. Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації// Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП». – 2013.– №58 (1031).– С.168–177.
9. Savage P.G. Strapdown System Performance Analysis. – RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints.
10. Ignagni M.B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.13, No 2, 1990. P.363–369.
11. Панов А.П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Мех. гирок. систем. – К., 1984.– Вып. 3.– С. 105–112.
12. Панов А.П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецесии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987.– Вып. 73.– С. 3–9.
13. Панов А.П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1988.– Вып. 77.– С.47–52.
14. Gusinsky V.Z., Lesyuchevsky V.M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G.T. Optimization of strapdown attitude algorithms // Proceedings of the 2d Saint Petersburg international conference on

gyroscopic technology and navigation, Part II, May 24-25, 1995. PP.110-121.

15. *Gusinsky V.Z., Lesyuchevsky V.M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G.T.* New procedure for strapdown attitude algorithms optimization as applied to stochastic motion input // Proceedings of the 3d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 28-29, 1996. P.3-12.

16. *Kuznyetsov, Yu., Oleynik, S., Demenkov, V., Plakhsy, Yu.* Application of the models of rotation for the error analysis of algorithms for gimballess inertial attitude systems of moving objects //17th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2010 - Proceedings.– 2010. – P. 118-120.

17. *Plakhsy Yu. A.* Multiplicative three-frequency models of a rigid body rotation in error analysis for algorithms of determination of orientation //The 7-th world Congress “AVIATION IN THE XXI CENTURY” Safety in Aviation And Space Technologies, September 19-21, 2016, Kyiv – Proceedings –2016.

18. *Kuznetsov, Yu.A., Plakhsy, Yu.A.* Algorithms for strapdown inertial orientation systems of moving objects: Practical aspects of the development, error analysis and implementation //21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014 - Proceedings.– 2014. -P. 357-360.

#### References (transliterated)

1. *Branec V. N., Shmyglevskiy I. P.* Vvedenie v teoriyu besplatformennykh inercial'nykh navigatsionnykh sistem. [Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems] – M.: Nauka, 1992. – 280 s.

2. *Branets V.N., Shmyglevskiy I.P.* Primenenie kvaternionov v zadachah orientatsii tverdogo tela [The use quaternions in problems of a rigid body orientation]. M.: Nauka. 1973. 320 p.

3. *Savage P.G.* Strapdown inertial navigation integration algorithm design Part 1: Attitude algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 21, No 1, 1998. PP.19–28.

4. *Panov A.P.* Matematicheskie osnovy teorii inertialnoy navigatsii. [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation] – K.: Nauk. dumka, 1995. – 280 s.

5. *Panov A.P.* Dvushagovyye algoritmy vyichisleniy parametrov orientatsii [Two-step algorithms for calculating orientation parameters]// Kosmich. issled. na Ukraine [Space research in Ukraine]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1974, no 5, pp.76–82.

6. *Panov A.P.* Asimptoticheskie otsenki pogreshnostey metodov vyichisleniya parametrov orientatsii tverdogo tela [Asymptotic error estimates for methods for calculating the orientation parameters of a rigid body]// Kibernetika i vyichisl. Tehnika [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1980, vol. 47, pp. 59-71.

7. *Miller R.B.* A new strapdown attitude algorithm. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, No 4, 1983. PP.287–291.

8. *Plakhsy Yu.A.* Stepenevi alhorytmy vyznachennia kvaternioniv oriantatsii ta yikh interpoliatsiini modyfikatsii [Degree algorithms for

determining quaternions olakhsyf orientation and their interpolation modifications]. // Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dynamika i mitsnist mashyn [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines], – Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2013, no 58 (1031), pp.168–177.

9. *Savage P.G.* Strapdown System Performance Analysis. – RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints.

10. *Ignagni M.B.* Optimal strapdown attitude integration algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.13, No 2, 1990. P.363–369.

11. *Panov A.P.* Optimizatsiya metodov vyichisleniya kvaternionov pri konicheskikh kolebaniyakh tverdogo tela [Optimization of methods for calculating quaternions with conic vibrations of a rigid body]// Mekh. girosk. sistem. [Mechanics of Gyroscopic Systems]. Kyiv, 1984, vol. 3, pp. 105–112.

12. *Panov A.P.* Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vyichisleniya kvaternionov v sluchae precessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of a precession of a rigid body]. Kibernetika i vyichislitel'naya tekhnika . K. 1987. Vyp. 73, pp. 3–9.

13. *Panov A.P.* Adaptivnyye pretsessionnyye algoritmy vyichisleniy kvaternionov vrascheniya tverdogo tela [Adaptive precession algorithms for computing quaternions of rotation of a rigid body]// Kibernet. i vyichisl. tekh [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1988, vol. 77, pp. 47–52.

14. *Gusinsky V.Z., Lesyuchevsky V.M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G.T.* Optimization of strapdown attitude algorithms // Proceedings of the 2d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 24-25, 1995. PP.110-121.

15. *Gusinsky V.Z., Lesyuchevsky V.M., Litmanovich Yu. A., Musoff H., Schmidt G.T.* New procedure for strapdown attitude algorithms optimization as applied to stochastic motion input // Proceedings of the 3d Saint Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation, Part II, May 28-29, 1996. P.3-12.

16. *Kuznyetsov, Yu., Oleynik, S., Demenkov, V., Plakhsy, Yu.* Application of the models of rotation for the error analysis of algorithms for gimballess inertial attitude systems of moving objects //17th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2010 - Proceedings.– 2010. – P. 118-120.

17. *Plakhsy Yu. A.* Multiplicative three-frequency models of a rigid body rotation in error analysis for algorithms of determination of orientation //The 7-th world Congress “AVIATION IN THE XXI CENTURY” Safety in Aviation And Space Technologies, September 19-21, 2016, Kyiv – Proceedings –2016.

18. *Kuznetsov, Yu.A., Plakhsy, Yu.A.* Algorithms for strapdown inertial orientation systems of moving objects: Practical aspects of the development, error analysis and implementation //21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014 - Proceedings.– 2014. -P. 357-360.

Надійшла (received) 20.11.2021

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Плаксієв Юрій Андрійович** – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ «ХПІ», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: [plakhsy.yu@gmail.com](mailto:plakhsy.yu@gmail.com).

**Plakhsy Yuriy Andriyovich** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Professor NTU «KhPI», National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-64-36; e-mail: [plakhsy.yu@gmail.com](mailto:plakhsy.yu@gmail.com).

**Гомозкова Ірина Олександрівна** – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-54, 097-28-59-510; email: [arinhomozkova@gmail.com](mailto:arinhomozkova@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1524-170X>

**Homozkova Iryna Oleksandrivna** – PhD student of the department of computer modeling of processes and systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-64-54, 097-28-59-510; email: [arinhomozkova@gmail.com](mailto:arinhomozkova@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1524-170X>