

Т.Є. ТРЕТЯК, О.Л. МИРОНЕНКО, С.О. МИРОНЕНКО
ПРОФІЛЮВАННЯ ФАСОННОЇ ЧЕРВ'ЯЧНОЇ ФРЕЗИ ДЛЯ ФОРМОУТВОРЕННЯ ЗУБЧАСТИХ КОЛІС З НЕЕВОЛЬВЕНТНИМ ПРОФІЛЕМ ЗУБІВ

З механічних передач, що застосовуються в машинобудуванні, найбільш поширеними є зубчасті передачі з евольвентним профілем бічних поверхонь зубів. Передачі, складені з таких коліс, відрізняються рядом переваг, однак мають і цілий ряд істотних недоліків. Тому однією з сучасних тенденцій є дослідження зубчастих передач зі складним неевольвентним профілем бічних поверхонь зубів, що мають переваги перед евольвентними зубчастими передачами в ряді областей застосування, а також розробка інструментів для їх обробки. Розрізняють два способи нарізування зубів циліндричних зубчастих коліс: метод копіювання і метод обкатки. Метод обкатки має переваги. Профіль інструменту, що працює за методом обкатки, не залежить від числа зубів колеса, що нарізається, тому одним і тим же інструментом можна нарізати зубчасті колеса з будь-яким числом зубів. Точність колеса, виготовленого за методом обкатки, значно вище точності колеса, виготовленого за методом копіювання. Це пояснюється, перш за все, безперервністю процесу обкатки. При нарізанні зубів методом обкатки поверхня зуба утворюється в результаті обробки інструментом, ріжучі кромки якого є профілем зуба сполученої рейки або профілем зуба сполученого зубчастого колеса, і під час обробки інструмент з заготовкою утворюють сполучену зубчасту пару. Найбільш поширеним інструментом для нарізування зубчастих коліс є черв'ячна фреза. Для виготовлення зубчастих коліс з неевольвентним профілем зубів використовується широко поширене в промисловості обладнання. Одним з варіантів обкатного зуборізного інструмента для формоутворення зубчастих коліс з неевольвентним профілем зубів може бути фасонна черв'ячна фреза. У статті описано розроблену методику профілювання ріжучої частини фасонної черв'ячної фрези для обробки зубчастих коліс нормальної точності. Для вирішення задачі використано єдину математичну базу – апарат багатопараметричних відображень простору – уніфіковану структуру відображення для зубчастих зачеплень і компактний набір уніфікованих операторів, параметрів і функціональних зв'язків.

Ключові слова: неевольвентне зубчасте зачеплення, формоутворення зубчастих коліс, поверхні, що сполучаються, профіль зуба, інструментальна рейка, фасонна черв'ячна фреза.

Из механических передач, применяющихся в машиностроении, наиболее распространенными являются зубчатые передачи с эвольвентным профилем боковых поверхностей зубьев. Передачи, составленные из таких колес, отличаются рядом преимуществ, однако имеют и целый ряд существенных недостатков. Поэтому одной из современных тенденций является исследование зубчатых передач со сложным неэвольвентным профилем боковых поверхностей зубьев, имеющих преимущества перед эвольвентными зубчатыми передачами в ряде областей применения, а также разработка инструментов для их обработки. Различают два способа нарезания зубьев цилиндрических зубчатых колес: метод копирования и метод обкатки. Метод обкатки имеет преимущества. Профиль инструмента, работающего по методу обкатки, не зависит от числа зубьев нарезаемого колеса, поэтому одним и тем же инструментом можно нарезать зубчатые колеса с любым числом зубьев. Точность колеса, изготовленного по методу обкатки, значительно выше точности колеса, изготовленного по методу копирования. Это объясняется, прежде всего, непрерывностью процесса обкатки. При нарезании зубьев методом обкатки поверхность зуба образуется в результате обработки инструментом, режущие кромки которого представляют собой профиль зуба сопряженной рейки или профиль зуба сопряженного зубчатого колеса, и во время обработки инструмент с заготовкой образуют сопряженную зубчатую пару. Наиболее распространенным инструментом для нарезания зубчатых колес является червячная фреза. Для изготовления зубчатых колес с неэвольвентным профилем зубьев используется широко распространенное в промышленности оборудование. Одним из вариантов обкаточного зуборезного инструмента для формообразования зубчатых колес с неэвольвентным профилем зубьев может быть фасонная червячная фреза. В статье описана разработанная методика профилирования режущей части фасонной червячной фрезы для обработки зубчатых колес нормальной точности. Для решения задачи использована единая математическая база – аппарат многопараметрических отражений пространства – унифицированная структура отображения для зубчатых зацеплений и компактный набор унифицированных операторов, параметров и функциональных связей.

Ключевые слова: неэвольвентное зубчатое зацепление, формообразование зубчатых колес, сопрягаемые поверхности, профиль зуба, инструментальная рейка, фасонная червячная фреза.

Of the mechanical transmissions used in mechanical engineering, the most common are gears with an involute profile of the teeth flanks. Gears made up of such wheels have a number of advantages, but they also have a number of significant disadvantages. Therefore one of the current trends is the study of gears with a complex non-involute profile of the teeth flank which have advantages over involute gears in a number of applications, as well as the development of tools for their processing. There are two ways of gear teeth cutting: the copying method and the rolling-in method. The rolling-in method has advantages. The profile of the tool working by the rolling-in method does not depend on the number of teeth of the gear being cut, therefore, the same tool can be used to cut gears with any number of teeth. The accuracy of a gear made by the rolling-in method is significantly higher than the accuracy of a gear made by the copying method. This is primarily due to the continuity of the rolling-in process. When cutting teeth by the rolling method, the tooth surface is formed as a result of processing with a tool, the cutting edges of which are the tooth profile of the mating rack or the tooth profile of the mating gear, and during processing the tool and the workpiece form a mating gear pair. The most common gear cutting tool is the hob cutter. For the machining of gear wheels with a non-involute tooth profile widely used in industry equipment is used. One of the options for a rolling gear cutting tool for shaping gear wheels with a non-involute tooth profile can be a shaped worm cutter. The article describes the method of profiling of the cutting part of shaped hob cutter for machining of gear wheels with normal accuracy.

To solve the problem the unified mathematical base – the apparatus of multiparameter mappings of space – the unified structure of mappings for gears and a compact set of unified operators, parameters and functional connections is used.

Keywords: non-involute gearing, shaping of gears, mating surfaces, tooth profile, tool rail, shaped hob cutter.

Вступ. Однією з сучасних тенденцій є дослідження зубчастих передач зі складним неевольвентним профілем бічних поверхонь зубів, що мають переваги перед евольвентними зубчастими передачами в ряді областей застосування, а також розробка інструментів для їх обробки. Розрізняють два способи нарізування зубів циліндричних зубчастих коліс: метод копіювання і метод обкатки. Метод обкатки має переваги – профіль інструменту, що працює за методом обкатки, не залежить від числа зубів колеса, що нарізається, точність колеса, виготовленого за методом обкатки, значно вище точності колеса, виготовленого за методом копіювання.

Найбільш поширеним інструментом для нарізування зубчастих коліс є черв'ячна фреза. Для виготовлення зубчастих коліс з неевольвентним профілем зубів використовується поширене в промисловості обладнання. Одним з варіантів обкатного зуборізного інструментів для

формування зубчастих коліс з невольвентним профілем зубів може бути фасонна черв'ячна фреза.

Задача профілювання різального інструменту полягає в тому, щоб за заданим профілем деталі і заданим рухам деталі і інструменту знайти профіль ріжучої кромки або профіль задньої поверхні інструмента [1-5].

Профілюванню підлягають інструменти, що утворюють поверхню деталі рухом інструментальної поверхні або рухом фасонної ріжучої кромки.

У загальному випадку профілювання складається з наступних етапів:

1) по заданій поверхні деталі і заданим рухам деталі і інструменту визначається інструментальна поверхня;

2) визначаються координати точок ріжучої кромки як лінії перетину інструментальної і передньої поверхонь;

3) визначається профіль задньої поверхні в нормальному перетині.

Перший етап профілювання черв'ячної фрези.

Перший етап профілювання черв'ячної фрези полягає в знаходженні інструментальної поверхні черв'яка як огинаючої заданої бічної поверхні оброблюваного зубчастого колеса.

Бічні поверхні зубів коліс, що є фасонними циліндричними [6-7], і гвинтова інструментальна поверхня черв'яка розташовані в реперах $x_1y_1z_1$ і $x_3y_3z_3$ (див. рис. 1). При цьому осі y_1 і y_3 , z_1 і z_3 схрещуються під кутом ν . У проміжному репері $x_2y_2z_2$ знаходяться циліндричні бічні поверхні зубів уявної рейки, що має миттєве лінійне торкання і з зубчастим колесом, і з черв'яком. Точка перетинання ліній миттєвого торкання є точкою миттєвого торкання зубчастого колеса, рейки та черв'яка [8-10].

На першому етапі профілювання черв'ячної фрези вихідна інформація включає: координати точок профілю оброблюваного зубчастого колеса x_{1k} , y_{1k} в репері колеса $x_1y_1z_1$ і найбільший діаметр черв'яка D_3 . Шуканими є координати точок інструментальної поверхні x_{3i} , y_{3i} , z_{3i} в репері черв'яка $x_3y_3z_3$. Перший етап профілювання може бути виконаний в такій послідовності:

– спочатку знайдемо бічну поверхню зуба уявної рейки як огинаючу заданої бічної поверхні зуба колеса;

– потім визначимо лінію торкання зубів черв'яка та уявної рейки і, задавши їй гвинтовий рух, знайдемо бічну поверхню зуба черв'яка як огинаючу поверхні зуба рейки.

На першому кроці першого етапу профілювання для знаходження координат точок профілю бічної поверхні зуба рейки x_{2p} , y_{2p} може бути використаний алгоритм розрахунку огинаючих поверхонь для обкатних інструментів і оброблюваних зубчастих коліс [11].

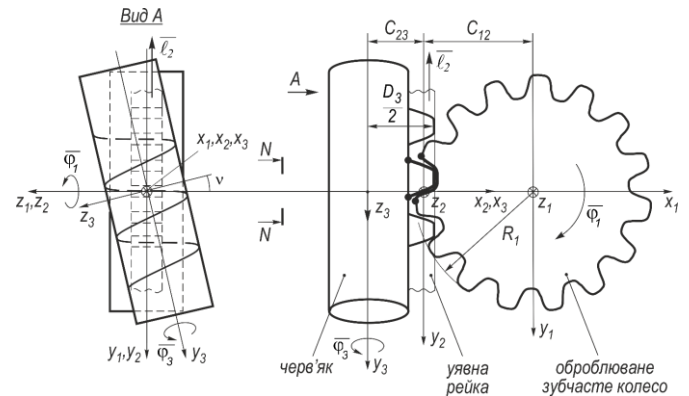


Рис. 1 – До розрахунку профілю фасонної черв'ячної фрези

Вирішимо зворотню задачу формування для випадку, коли як основа інструменту розглядається виробляючий рейковий контур.

Кожна точка вихідного профілю оброблюваного зубчастого колеса в нормальному перетині x_1y_1 може бути задана її координатами x_1 і y_1 (або параметрами ρ і μ) і значенням кута η в даній точці. Використовуючи узагальнену уніфіковану структуру відображення для зубчастих зачеплень [12-14], опишемо рух оброблюваного зубчастого колеса відносно уявної рейки. Зубчасте колесо в своєму складному русі відносно рейки зазнає наступні однопараметричні відображення (рис. 1):

– обертання $\bar{\phi}_1$ в репері $x_1y_1z_1$ навколо осі z_1 з параметром ϕ_1 і кутовою швидкістю ω_1 ;

– перехід \bar{c}_{12} від репера $x_1y_1z_1$ до реперу $x_2y_2z_2$ з координатним параметром c_{12} ;

– паралельний перенос \bar{l}_2 в репері $x_2y_2z_2$ вздовж осі y_2 з параметром l_2 і лінійною швидкістю v_2 .

Параметри операторів рухів пов'язані незалежним параметром t наступними співвідношеннями:

$$\phi_1 = \omega_1 \cdot t; \quad l_2 = v_2 \cdot t; \quad \phi_1 = i \cdot l_2, \quad \text{де } i = \frac{1}{c_{12}}. \quad (1)$$

Рівняння складного руху оброблюваного зубчастого колеса в репері $x_2y_2z_2$, пов'язаному з рейкою, мають наступний операторний та матричний запис:

$$\bar{r}_2 = \bar{\phi}_1 \cdot \bar{r}_1 + \bar{c}_{12} + \bar{l}_2, \quad (2)$$

$$m_{r_2} = m_{\phi_1} \cdot m_{r_1} + c_{12} + m_{l_2}, \quad (3)$$

де

$$m_{r_i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}; \quad m_{\phi_1} = \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$m_{c_{12}} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad m_{l_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У відповідності зі структурою (2) рівняння

складного руху рейки в репері $x_1y_1z_1$, пов'язаному з оброблюваним зубчастим колесом, мають наступний матричний запис:

$$m_{r_1} = m_{\phi_1}^m (m_{r_2} - m_{c_{12}} - m_{l_2}), \quad (5)$$

$$\text{де } m_{\phi_1}^m = \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (6)$$

матриці m_{r_1} , $m_{c_{12}}$ і m_{l_2} обчислюються відповідно до залежностей (4).

У разі задання поверхні оброблюваного зубчастого колеса в полярній системі координат умова торкання поверхонь колеса та рейки записується у вигляді рівняння:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mu} & \frac{\partial y_1}{\partial \mu} & \frac{\partial z_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial z_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial z_1}{\partial \phi_1} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

За допомогою цього рівняння визначається параметр руху ϕ_1 , відповідний моменту торкання поверхонь в даній точці, а потім за допомогою підстановки його в рівняння (3) визначаються шукані координати точок поверхні уявної рейки в репері $x_2y_2z_2$ [15].

На другому кроці першого етапу профілювання знаходження координат точок бокової поверхні зуба черв'яка x_{2i}, y_{2i}, z_{2i} може бути виконано за схемою, описаною в алгоритмі розрахунку огинаючих поверхонь для обкатних інструментів і оброблюваних зубчастих коліс [11]. Як вихідний профіль розглянемо профіль бічної поверхні зуба уявної рейки. Кожна точка профілю в нормальному перетині x_2y_2 може бути задана її координатами x_2 і y_2 (або параметрами ρ і μ) і значенням кута η в даній точці.

За допомогою узагальненої уніфікованої структури відображення для зубчастих зачеплень [12] опишемо рух уявної рейки відносно черв'яка.

Рейка в своєму складному русі відносно черв'яка зазнає наступні однопараметричні відображення (рис. 1):

- паралельний перенос \bar{l}_2 в репері $x_2y_2z_2$ вздовж осі y_2 з параметром l_2 і лінійною швидкістю v_2 ;
- поворот (перехід) \bar{v}_{23} від репера $x_2y_2z_2$ до реперу $x_3y_3z_3$ з координатним параметром v_{23} ;
- перехід \bar{c}_{23} від репера $x_2y_2z_2$ до реперу $x_3y_3z_3$ з координатним параметром c_{23} ;
- обертання $\bar{\phi}_3$ в репері $x_3y_3z_3$ навколо осі y_3 з параметром ϕ_3 і кутовою швидкістю ω_3 .

Параметри відображаючих операторів рухів

пов'язані між собою незалежним параметром t :

$$l_2 = v_2 \cdot t; \quad \phi_3 = \omega_3 \cdot t; \quad (8)$$

$$l_2 = p \cdot \phi_3, \text{ де } p - \text{параметр гвинта};$$

$$p = c_{23} \cdot \text{tg} \nu. \quad (9)$$

Рівняння складного руху рейки в репері $x_3y_3z_3$, пов'язаному з черв'яком, мають вигляд:

$$\bar{r}_3 = \bar{\phi}_3 (\bar{v}_{23} \bar{r}_2 + \bar{c}_{23} + \bar{l}_2), \quad (10)$$

$$m_{r_3} = m_{\phi_3} (m_{v_{23}} m_{r_2} + m_{c_{23}} + m_{l_2}), \quad (11)$$

де

$$m_{r_i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}; \quad m_{\phi_3} = \begin{pmatrix} \cos \phi_3 & 0 & \sin \phi_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_3 & 0 & \cos \phi_3 \end{pmatrix};$$

$$m_{v_{23}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu & \sin \nu \\ 0 & -\sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix}; \quad m_{c_{23}} = \begin{pmatrix} c_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (12)$$

$$m_{l_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -l_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння складного руху черв'яка в репері $x_2y_2z_2$, пов'язаному з уявною рейкою, відповідно до структури (10) мають наступний матричний запис:

$$m_{r_2} = m_{v_{23}}^m (m_{\phi_3}^m \cdot m_{r_3} - m_{c_{23}} - m_{l_2}), \quad (13)$$

де

$$m_{v_{23}}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \nu_1 & -\sin \nu \\ 0 & \sin \nu & \cos \nu \end{pmatrix}; \quad m_{\phi_3}^m = \begin{pmatrix} \cos \phi_3 & 0 & -\sin \phi_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_3 & 0 & \cos \phi_3 \end{pmatrix};$$

матриці m_{r_1} , $m_{c_{23}}$ і m_{l_2} обчислюються за залежностями (12).

Для випадку задання поверхні уявної рейки в полярній системі координат параметричними рівняннями умова торкання поверхонь рейки та черв'яка записується у вигляді рівняння:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \mu} & \frac{\partial y_2}{\partial \mu} & \frac{\partial z_2}{\partial \mu} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} & \frac{\partial z_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \phi_3} & \frac{\partial y_2}{\partial \phi_3} & \frac{\partial z_2}{\partial \phi_3} \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

За допомогою цього рівняння визначається координата точки дотику поверхонь, а потім за допомогою підстановки її в рівняння (11) визначається шукана лінія торкання поверхонь рейки та черв'яка в репері $x_3y_3z_3$. Задавши лінії торкання на поверхні черв'яка гвинтовий рух уздовж осі y_3 , отримаємо гвинтову поверхню черв'яка в репері $x_3y_3z_3$, що є інструментальною поверхнею.

Інструментальна поверхня може бути утворена дією операторів паралельного переносу \bar{l}_i вздовж осі

y_3 і обертання $\bar{\phi}_i$ навколо осі y_3 на лінію торкання рейки та черв'яка [3] при наступному зв'язку між параметрами операторів:

$$l_u = p \cdot \phi_u, \quad (15)$$

де p – параметр гвинта, який обчислюється за формулою (9).

У репері черв'яка $x_3 y_3 z_3$ інструментальна поверхня має наступний операторний та матричний запис з параметрами l_i і ϕ_i :

$$\bar{r}_3 = \bar{\phi}_u (\bar{r}_{3лк} + \bar{l}_u), \quad (16)$$

$$m_{r_3} = m_{\phi_u} (m_{r_{3лк}} + m_{l_u}), \quad (17)$$

де

$$m_{r_3} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}; \quad m_{\phi_u} = \begin{pmatrix} \cos \phi_u & 0 & \sin \phi_u \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_u & 0 & \cos \phi_u \end{pmatrix}; \quad (18)$$

$$m_{r_{3лк}} = \begin{pmatrix} x_{3лк} \\ y_{3лк} \\ z_{3лк} \end{pmatrix}; \quad m_{l_u} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Другий етап профілювання черв'ячної фрези.

На другому етапі профілювання черв'ячної фрези вихідна інформація включає координати точок гвинтової інструментальної поверхні в репері черв'яка $x_3 y_3 z_3$ і передній кут інструменту $\gamma = 0$. Шуканими є координати фасонної ріжучої кромки в тому ж репері $x_3 y_3 z_3$.

Рівняння гвинтової інструментальної поверхні в операторному та матричному запису представлено виразами (16)-(18). Гвинтову лінійчату передню поверхню з $\gamma = 0$ отримуємо гвинтовим рухом лінії, перпендикулярної осі y_3 . Передня поверхня утворюється дією операторів паралельного переносу \bar{l}_{1n} вздовж осі y_3 і обертання $\bar{\phi}_n$ навколо осі y_3 на базову точку ріжучої кромки з координатами $x_{3б}, y_{3б}, z_{3б}$ [3]. При цьому має місце наступний зв'язок параметрів операторів:

$$l_{2n} = p_n \cdot \phi_n, \quad (19)$$

де p_n – параметр гвинта по передній поверхні;

$$p_n = c_{23} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right). \quad (20)$$

Запишемо операторне та матричне рівняння передньої поверхні в репері черв'яка $x_3 y_3 z_3$ з параметрами l_{1n} , l_{2n} і ϕ_n :

$$\bar{r}_3 = \bar{\phi}_n (\bar{r}_{3б} + \bar{l}_{1n} + \bar{l}_{2n}), \quad (21)$$

$$m_{r_3} = m_{\phi_n} (m_{r_{3б}} + m_{l_{1n}} + m_{l_{2n}}), \quad (22)$$

де

$$m_{\phi_n} = \begin{pmatrix} \cos \phi_n & 0 & \sin \phi_n \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_n & 0 & \cos \phi_n \end{pmatrix}; \quad m_{r_{3б}} = \begin{pmatrix} x_{3б} \\ y_{3б} \\ z_{3б} \end{pmatrix}; \quad (23)$$

$$m_{l_{1n}} = \begin{pmatrix} l_{1n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad m_{l_{2n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_{2n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тут} \quad x_{3б} &= c_{23}; \\ y_{3б} &= 0; \\ z_{3б} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Умову перетинання інструментальної та передньої поверхонь в матричному запису отримуємо, прівнявши праві частини рівнянь (17) и (22):

$$m_{\phi_u} (m_{r_{3лк}} + m_{l_u}) = m_{\phi_n} (m_{r_{3б}} + m_{l_{1n}} + m_{l_{2n}}). \quad (25)$$

Ця умова включає три рівняння з невідомими параметрами інструментальної та передньої поверхонь. Їх рішення з урахуванням формул (15) і (19) дозволяє визначити незалежні параметри ϕ_i , ϕ_n і l_{1n} , а потім залежні від них параметри l_i і l_{2n} . Після цього за допомогою рівнянь (17) або (22) можна обчислити координати точок ріжучої кромки X_3 , Y_3 і Z_3 в репері черв'яка $x_3 y_3 z_3$.

Третій етап профілювання черв'ячної фрези.

Третій етап профілювання черв'ячної фрези полягає в описі гвинтової задньої поверхні в репері черв'яка і знаходженні профілю цієї поверхні в нормальному перетині.

Вихідна інформація на цьому етапі включає координати точок ріжучої кромки та задній кут інструменту α . Гвинтова задня поверхня черв'яка може бути утворена рухом ріжучої кромки по архімедовій спіралі уздовж осі y_3 , тобто дією операторів паралельного переносу \bar{l}_{13} вздовж осі y_3 , паралельного переносу \bar{l}_{23} вздовж осі x_3 і обертання $\bar{\phi}_3$ навколо осі y_3 на ріжучу кромку [3]. При цьому параметри операторів зв'язані наступними залежностями:

$$l_{13} = p \cdot \phi_3; \quad (26)$$

$$l_{23} = c_{23} \cdot \phi_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (27)$$

Операторне та матричне рівняння задньої поверхні в репері черв'яка $x_3 y_3 z_3$ з параметрами l_{13} , l_{23} і ϕ_3 запишемо в наступному вигляді:

$$\bar{r}_3 = \bar{\phi}_3 (\bar{r}_{3рк} + \bar{l}_{13} + \bar{l}_{23}), \quad (28)$$

$$m_{r_3} = m_{\phi_3} (m_{r_{3рк}} + m_{l_{13}} + m_{l_{23}}), \quad (29)$$

де

$$m_{r_{3рк}} = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}; \quad m_{\phi_3} = \begin{pmatrix} \cos \phi_3 & 0 & \sin \phi_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_3 & 0 & \cos \phi_3 \end{pmatrix}; \quad (30)$$

$$m_{l_{13}} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_{13} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad m_{l_{23}} = \begin{pmatrix} l_{23} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проведемо площину нормального перетину $N-N$. Операторне та матричне рівняння цієї площини з параметрами x_{3n} , y_{3n} і z_{3n} в репері черв'яка $x_3y_3z_3$ мають такий вигляд:

$$\bar{r}_3 = \bar{r}_{3n}, \quad (31)$$

$$m_{r_3} = m_{r_{3n}}, \quad (32)$$

де

$$m_{r_{3n}} = \begin{pmatrix} x_{3n} \\ y_{3n} \\ z_{3n} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Привіряємо праві частини рівнянь (29) і (32) і отримуємо умову перетинання задньої поверхні черв'яка та площини нормального перетину в матричному запису:

$$m_{\phi_3} (m_{r_{3pk}} + m_{l_{13}} + m_{l_{23}}) = m_{r_{3n}}. \quad (34)$$

Ця умова включає три рівняння з параметрами задньої поверхні та поверхні нормального перетину. Вирішивши їх, можна визначити невідомі параметри ϕ_3 , x_{3n} , y_{3n} і пов'язані з ними параметри l_{13} , l_{23} , z_{3n} і таким чином знайти координати точок шуканого профілю задньої поверхні черв'яка в нормальному перетині.

Після знаходження ϕ_3 , x_{3n} , y_{3n} обчислюється $z_{3n} = y_{3n} \operatorname{tg} \nu$, а також l_{13} і l_{23} за формулами (26) і (27).

Висновки. Одним з варіантів обкатного зуборізного інструменту для формоутворення зубчастих коліс з невольвентним профілем зубів може бути фасонна черв'ячна фреза. Розроблено методику профілювання ріжучої частини фасонної черв'ячної фрези для обробки зубчастих коліс нормальної точності. Для вирішення задачі використано єдину математичну базу – апарат багатопараметричних відображень простору.

Список літератури

1. Родин П.Р. Основы формообразования поверхностей резанием / П.Р. Родин. – К.: Вища шк., 1977. – 192 с.
2. Перепелица Б.А. Отображение аффинного пространства в теории формообразования поверхности резанием / Б.А. Перепелица. – Харьков: Вища шк., 1981. – 152 с.
3. Перепелица Б.А. Автоматизированное профилирование режущих инструментов (теория и алгоритмы): Учебное пособие / Б.А. Перепелица. – Харьков: ХПИ, 1985. – 107 с.
4. Цвис Ю.В. Профилирование режущего обкатного инструмента / Ю.В. Цвис. – М.: Mashgiz, 1961. – 156 с.
5. Radzevich S.P. Theory of gearing: Kinematics, Geometry and Synthesis. Second Edition / S.P. Radzevich. – Boca Raton, Florida: CRC Press, 2018. – 898 p.
6. Кривошея А.В. Структурный подход к математическому описанию кинематических кривых / А.В. Кривошея, Т.Е. Третьяк, Е.Б. Кондусова // Резание и инструмент в технологических системах. 2001. Вып. 59. – С. 129-134.
7. Tretyak Tatyana. Structural approach to the mathematical description and computer visualization of plane kinematic curves for the display of gears / Tatyana Tretyak, Alexander Mironenko, Yury Gutsalenko, Natalia Krukova, Sergey Mironenko // *Fiabilitate si Durabilitate – Fiability & Durability*. Targu Jiu: Editura «Academica Brancusi», 2018. – № 1. – P. 7-11.
8. Иноземцев Г.Г. Проектирование металлорежущих инструментов: Учеб. пособие для втузов / Г.Г. Иноземцев. – М.:

Машиностроение, 1984. – 272 с.

9. Иноземцев Г.Г. Червячные фрезы с рациональными конструктивными и геометрическими параметрами / Г.Г. Иноземцев. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1961. – 224 с.

10. Ляшков А.А. Моделирование формообразования зубчатых колес методом центроидного огибания / А.А. Ляшков // Известия Транссиба. – 2012. – № 2(10). – С. 109-116.

11. Кондусова Е.Б. Алгоритм расчета профиля огибающих поверхностей для обкаточных инструментов и деталей / Е.Б. Кондусова, Т.Е. Третьяк, А.В. Кривошея // Труды пятой междунар. конференции «Новые технологии в машиностроении». Proceeding Fifth International Conference «New Leading-Edge Technologies in Machinebuilding». – Rybachie, 1996. – С. 140-141.

12. Кривошея А.В. Структура многопараметрического отображения, обобщающая станочные и рабочие зубчатые зацепления / А.В. Кривошея // Высокие технологии в машиностроении: моделирование, оптимизация, диагностика: Тезисы докл. – Харьков: ХГПУ, 1995. – С. 71.

13. Третьяк Т.Е. Введение в опыт общей методологии приложения математического аппарата отображений аффинного пространства к формообразованию зубчатых колес / Т.Е. Третьяк, А.Н. Шелковой, Ю.Г. Гуцаленко, С.А. Мироненко // Актуальные научные исследования в современном мире. – Переяслав-Хмельницкий, 2018. – Вып. 12 (44), ч. 1. – С. 52-57.

14. Третьяк Т.Е. Опыт многопараметрических отображений аффинного пространства в теории формообразования зубчатых колес / Т.Е. Третьяк, Ю.Г. Гуцаленко, С.А. Мироненко // Наукое мислення: Збірник статей учасників двадцять п'ятої всеукраїнської практично-пізнавальної інтернет-конференції «Наукова думка сучасності і майбутнього». – Дніпро: Видавництво НМ. – 2019. – С. 40-43.

15. Зубкова Н.В. Матричные описания условия касания и кинематических углов при обработке резанием / Н.В. Зубкова, Е.Б. Кондусова, Т.Е. Третьяк // Резание и инструмент в технологических системах. – Харьков: ХГПУ, 2001. – Вып. 59. – С. 106-110.

References (transliterated)

1. Rodin P.R. *Osnovy formoobrazovaniya poverhnostey rezaniem* / P.R. Rodin. – K.: Visha shk., 1977. – 192 s.
2. Perepelica B.A. *Otobrazhenie affinnogo prostranstva v teorii formoobrazovaniya poverhnosti rezaniem* / B.A. Perepelica. – Harkov: Visha shk., 1981. – 152 s.
3. Perepelica B.A. *Avtomatizirovanne profilirovanie rezhushih instrumentov (teoriya i algoritmy): Uchebnoe posobie* / B.A. Perepelica. – Harkov: HPI, 1985. – 107 s.
4. Cvis Yu.V. *Profilirovanie rezhushhego obkatnogo instrumenta* / Yu.V. Cvis. – M.: Mashgiz, 1961. – 156 s.
5. Radzevich S.P. *Theory of gearing: Kinematics, Geometry and Synthesis*. Second Edition / S.P. Radzevich. – Boca Raton, Florida: CRC Press, 2018. – 898 p.
6. Krivosheya A.V. *Strukturnyj podhod k matematicheskomu opisaniju kinematicheskikh krivyh* / A.V. Krivosheya, T.E. Tretyak, E.B. Kondusova // *Rezanie i instrument v tehnologicheskikh sistemah*. 2001. Vyp. 59. – S. 129-134.
7. Tretyak Tatyana. *Structural approach to the mathematical description and computer visualization of plane kinematic curves for the display of gears* / Tatyana Tretyak, Alexander Mironenko, Yury Gutsalenko, Natalia Krukova, Sergey Mironenko // *Fiabilitate si Durabilitate – Fiability & Durability*. Targu Jiu: Editura «Academica Brancusi», 2018. – № 1. – P. 7-11.
8. Inozemcev G.G. *Proektirovanie metallovezhushih instrumentov: Ucheb. posobie dlya vtuzov* / G.G. Inozemcev. – M.: Mashinostroenie, 1984. – 272 s.
9. Inozemcev G.G. *Chervyachnye frezy s racionalnymi konstruktivnymi i geometricheskimi parametrami* / G.G. Inozemcev. – Saratov: Izd-vo Saratov. un-ta, 1961. – 224 s.
10. Lyashkov A.A. *Modelirovanie formoobrazovaniya zubchatykh koles metodom centroidnogo ogibaniya* / A.A. Lyashkov // *Izvestiya Transsiba*. – 2012. – № 2(10). – S. 109-116.
11. Kondusova E.B. *Algoritm rascheta profilya ogibayushih poverhnostey dlya obkatocnyh instrumentov i detalej* / E.B. Kondusova, T.E. Tretyak, A.V. Krivosheya // *Tруды пятой междунар. конференции «Новые технологии в машиностроении». Proceeding Fifth International Conference «New Leading-Edge Technologies in Machinebuilding»*. –

Rybachie, 1996. – S. 140-141.

12. Krivosheya A.V. Struktura mnogoparametricheskogo otobrazheniya, obobshchayushaya stanochnye i rabochie zubchatye zacepleniya / A.V. Krivosheya // *Vysokie tehnologii v mashinostroenii: modelirovanie, optimizaciya, diagnostika: Tezisy dokl.* – Harkov: HGPU, 1995. – S. 71.

13. Tretyak T.E. Vvedenie v opyt obshej metodologii prilozheniya matematicheskogo apparata otobrazhenij affinnogo prostranstva k formoobrazovaniyu zubchatyh koles / T.E. Tretyak, A.N. Shelkovej, Yu.G. Gucalenko, S.A. Mironenko // *Aktualnye nauchnye issledovaniya v sovremennom mire.* – Pereyaslav-Hmelnickij, 2018. – Вып. 12 (44), чл. 1. – S. 52-57.

14. Tretyak T.E. Opyt mnogoparametricheskikh otobrazhenij affinnogo prostranstva v teorii formoobrazovaniya zubchatyh koles / T.E. Tretyak, Yu.G. Gucalenko, S.A. Mironenko // *Naukove mislennya: Zbirnik statej uchasnykiv dvadcyat p'yatoyi vseukrayinskoj praktichno-piznavalnoyi internet-konferenciyi «Naukova dumka suchasnosti i majbutnogo».* – Dnipro: Vidavnytvo NM. – 2019. – S. 40-43.

15. Zubkova N.V. Matrichnye opisaniya usloviya kasaniya i kinematischeukh uglov pri obrabotke rezaniem / N.V. Zubkova, E.B. Kondusova, T.E. Tretyak // *Rezanie i instrument v tehnologicheskikh sistemah.* – Harkov: HGPU, 2001. – Вып. 59. – S. 106-110.

Надійшла (received) 05.12.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Третьяк Тетяна Євгенівна (Третьяк Татьяна Евгеньевна, Tretyak Tetyana Yevgenivna) – ст. викладач кафедри ІТМ НТУ «ХПІ»; e-mail: tretyak.t.e@gmail.com

Мироненко Александр Леонидович (Мироненко Олександр Леонідович, Myronenko Oleksandr Leonidovych) – канд. техн.наук, доцент кафедри ІТМ НТУ «ХПІ»; e-mail: mir.soliy@com.ua

Мироненко Сергей Александрович (Мироненко Сергій Олександрович, Myronenko Sergij Oleksandrovych) - студент гр. КІТ М 1206 НТУ «ХПІ»; e-mail: serg1prime@gmail.com