

Я. Ю. БЕСКРОВНИЙ, О. О. ЛАРІН

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОХИБКИ В ОЦІНЦІ СПЕКТРАЛЬНИХ СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

У даній роботі розроблений алгоритм числових симуляцій щодо розрахунку дискретної динамічної системи із стохастичним збуренням та проведений аналіз якості числових розв'язків. Для цього було розроблено алгоритм чисельного розв'язку диференційного рівняння II порядку із стохастичною правою частиною та реалізовано цей алгоритм у вигляді програми. Наступним кроком було проведення комплексу розрахункових досліджень при варіюванні параметрів чисельного інтегрування із подальшою оцінкою їх впливу на похибку та точність симуляцій. Для оцінки спектральної щільності використовувався метод періодограм Уелча. Для перевірки якості симуляцій та оцінки точності розв'язків пропонується здійснити порівняння результатів чисельного інтегрування та наступної цифрової обробки з аналітичними розв'язками, які є відомими для лінійної задачі, що задається рівнянням. У результаті роботи був проведений порівняльний аналіз дисперсії переміщень відносно довжин сигналів за різної кількості блоків, на які розбивається сигнал для методу Уелча; довірчий інтервал похибки при різній довжині сигналу та довірчий інтервал похибки з різною кількістю блоків при певній довжині сигналу. Порівняння дисперсії при різній кількості блоків показало що при довжині сигналу 30 с та від 90 с відбувається незначний розкид значень дисперсії в межах похибки $\pm 5\%$.

Ключові слова: стохастичне збурення коливаль, численне моделювання, задача статистичної динаміки, метод Уелча, спектральна щільність.

В данной работе разработан алгоритм числовых симуляций по расчету дискретной динамической системы с стохастическим возмущением и проведен анализ качества численных решений. Для этого был разработан алгоритм численного решения дифференциального уравнения II порядка с стохастической правой частью и реализован этот алгоритм в виде программы. Следующим шагом было проведение комплекса расчетных исследований при варьировании параметров численного интегрирования с последующей оценкой их влияния на погрешность и точность симуляций. Для оценки спектральной плотности использовался метод периодограммы Уэлча. Для проверки качества симуляций и оценки точности решений предлагается осуществить сравнение результатов численного интегрирования и последующей цифровой обработки с аналитическими решениями, которые известны для линейной задачи, задается уравнением. В результате работы был проведен сравнительный анализ дисперсии перемещений относительно длин сигналов с разного количества блоков, на которые разбивается сигнал для метода Уэлча; доверительный интервал погрешности при разной длине сигнала и доверительный интервал погрешности с разным количеством блоков при определенной длине сигнала. Сравнение дисперсии при разном количестве блоков показало, что при длине сигнала 30 с и от 90 с отбывается незначительный разброс значений дисперсии в пределах погрешности $\pm 5\%$.

Ключевые слова: стохастическое возбуждение колебаний, численное моделирование, задача статистической динамики, метод Уелча, спектральная плотность.

In this paper, an algorithm for numerical simulations is developed for calculating a discrete dynamic system with a stochastic perturbation and an analysis of the quality of numerical solutions is carried out. For this, an algorithm for the numerical solution of a second-order differential equation with a stochastic right-hand side was developed and this algorithm was implemented as a program. The next step was to carry out a set of computational studies by varying the parameters of numerical integration with the subsequent assessment of their impact on the error and accuracy of simulations. To estimate the spectral density, the Welch periodogram method was used. To check the quality of simulations and assess the accuracy of solutions, it is proposed to compare the results of numerical integration and subsequent digital processing with analytical solutions that are known for the linear problem, given by the equation. As a result of the work, a comparative analysis of the dispersion of displacements relative to the lengths of signals from a different number of blocks was carried out, into which the signal is divided for the Welch method; the confidence interval of the error at different signal lengths and the confidence interval of the error with a different number of blocks at a certain signal length. Comparison of the variance with a different number of blocks showed that with a signal length of 30 s and from 90 s, there is a slight scatter of the variance values within an error of $\pm 5\%$.

Key words: stochastic excitation of oscillations, numerical modeling, the problem of statistical dynamics, Welch's method, spectral density.

Вступ. Дискретні динамічні системи є типовою моделлю для багатьох технічних [1-10] і соціально-економічних [12] процесів. Умови реальної роботи цих систем характеризуються суттєвою невизначеністю, яка досить часто може бути представлена в якості випадкового зовнішнього впливу. Комп'ютерне та математичне моделювання цих процесів є важливим інструментом аналізу та прогнозу поведінки систем, що дозволяють робити висновки та корегувати рішення.

Реальні динамічні системи зазвичай не мають аналітичних розв'язків через наявність складних граничних умов або нелінійностей у математичній постановці.

Таким чином, виникає актуальна проблема створення ефективних числових алгоритмів визначення випадкових характеристик відгуку динамічної системи, що знаходиться під дією стохастичного впливу. При цьому, похибка в оцінці спектральних статистичних характеристик значно варіюється при чисельному

розв'язку з різними значеннями параметрів. Тому необхідні обґрунтовані рекомендації щодо правильного підбору розрахункових параметрів: довжина вікна, ефективна частота дискретизації, довжина сигналу тощо.

Постановка задачі. Метою даної роботи є розробка алгоритму числових симуляцій щодо розрахунку дискретної динамічної системи із стохастичним збуренням та проведення аналізу якості розв'язків.

Для вирішення цього питання в даній статті пропонується:

- розробити алгоритм чисельного розв'язку диференційного рівняння II порядку із стохастичною правою частиною;
- реалізувати алгоритм у вигляді програми;
- провести комплекс розрахункових досліджень при варіюванні параметрів чисельного інтегрування із подальшою оцінкою їх впливу на похибку та точність симуляцій.

Розробка алгоритму. У даній роботі пропонується розглянути диференційне рівняння з постійними коефіцієнтами та випадковою правою частиною

$$\ddot{x} \cdot m + \mu \cdot \dot{x} + c \cdot x = F(t) \quad (1)$$

де m – маса, c – жорсткість, μ – коефіцієнт тертя, $F(t)$ – випадкова стаціонарна функція з відомими ймовірнісними характеристиками, яка представляє собою усічений білий шум.

Пропонується застосувати чисельну процедуру для інтегрування даного диференційного рівняння методом Рунге-Кутти 4-го порядку. Для цього спочатку формується випадковий процес, який моделюватиме стохастичну праву частину. Відповідна процедура складається зі створення масиву незалежних випадкових величин, що генерується за допомогою випадкових вибірок із нормального (гауссового) розподілу з нульовим математичним очікуванням та заданою дисперсією σ_0^2 . Даний масив інтерполюється кусково-лінійними функціями для задання правої частини диференційного рівняння.

У результаті виконання цієї процедури отримуємо масив випадкових значень відгуку системи для заданих моментів часу, які визначались кроком інтегрування. Даний масив, що представляє собою числовий запис випадкових процесів відгуку (значення функції та її швидкості) пропонується обробляти за допомогою підходів до цифрової обробки сигналів.

Є два формальних еквівалентних методів визначення спектральної щільності потужності (СЩП) [13]. Непрямий метод заснований на використанні нескінченної послідовності даних для розрахунку автокореляційної послідовності, перетворення Фур'є якої дає шанку СЩП.

Прямий метод визначення СЩП заснований на обчисленні квадрата модуля перетворення Фур'є для нескінченної послідовності даних з використанням

відповідного статистичного усереднення. СЩП, отримана без такого усереднення виявляється незадовільною, оскільки середньоквадратичну помилку такої оцінки можна порівняти з її середнім значенням.

Оцінки СЩП, засновані на прямому перетворенні даних і подальшому усередненні, отримали назву періодограм [13].

У методі Бартлетта [14] аналізований сигнал ділиться на сегменти, що не перекриваються, для кожного сегмента обчислюється періодограма й потім вони усереднюються. Якщо кореляційна функція сигналу на тривалості сегмента загасає до дуже малих значень, то періодограми окремих сегментів можна вважати незалежними. У цьому випадку дисперсія періодограми Бартлетта обернено пропорційна числу використаних сегментів, однак зі зростанням числа сегментів падає спектральний дозвіл (за рахунок того, що сегменти стають коротшими) [15].

Спектральна роздільна здатність (коротко - спектральний дозвіл) - здатність методу розрізняти спектри, з близькими довжинами хвиль. Іншими словами - це мінімальна різниця двох довжин хвиль спектрів, які спостерігаються роздільно. При цьому вони повинні підкорятися критеріям Релея.

Уелч вніс у метод Бартлетта два удосконалення: використання вагової функції і розбиття сигналу на фрагменти, що перекриваються. Перекриття сегментів введено для того, щоб збільшити їх число і зменшити дисперсію оцінки. Обчислення при використанні методу Уелча [14] (він називається ще методом усереднення модифікованих періодограм - averaged modified periodogram) організовуються у такий спосіб:

1. Вектор відліків сигналу ділиться на сегменти, що перекриваються. Кожен сегмент множить на вагову функцію, що використовується.

2. Для зважених сегментів обчислюються модифіковані періодограми.

3. Періодограми всіх сегментів усереднюються.

Також як для періодограми Бартлетта, дисперсія оцінки, одержуваної методом Уелча, зменшується приблизно пропорційно числу сегментів. Завдяки перекриттю у методі Уелча використовується більше сегментів, тому дисперсія оцінки спектра потужності виявляється менше, ніж для методу Бартлетта. Метод Уелча, згідно [14], є зараз найбільш популярним періодограмним методом спектрального аналізу випадкових процесів.

Таким чином, загальний алгоритм комп'ютерного моделювання стохастичної динаміки дискретної динамічної системи полягає у наступному:

- 1) Згенерувати масив незалежних випадкових величин із заданою дисперсією.
- 2) Сформувати з даного масиву ряд довжиною у досліджуваній час сигналу, й утворити у такий спосіб цифровий аналог сигналу білого шуму.
- 3) За допомогою різницевої схеми інтегрування (використання методу Рунге-Кутти IV порядку) вирішити диференційне рівняння II порядку з правою частиною, яка задана як білий шум.

4) Отриманий дискретний сигнал випадкового відгуку обробити методом Уелча для спектрального аналізу.

5) Чисельним інтегруванням визначити дисперсію та побудувати відповідні графіки залежностей.

Даний алгоритм схематично представлений у вигляді блок-схеми на рис. 1.

Точність результатів такого чисельного аналізу стохастичного диференційного рівняння суттєво залежить від параметрів інтегрування так само як і від параметрів обробки результатів.

Фактично слід контролювати крок інтегрування у процедурі методу Рунге-Кутта та параметри методу Уелча: розмір вікна, кількість його повторень, що застосовується для усереднення, та зона перекриття вікон.

Попередні апріорні оцінки по кроку інтегрування визначаємо з міркувань достатньої апроксимації осциляцій можливого відгуку, тобто з періоду коливань. Вважатимемо, що достатньо 10 точок на період одного коливань відгуку для якісної апроксимації.

$$dt = \frac{T}{10}, T = \frac{2\pi}{p}$$



Рисунок 1 – Блок-схема алгоритму визначення спектральних характеристик відгуку системи

Аналогічно оцінки апріорні по розмірам вікна визначаємо з швидкого перетворення Фур'є, відповідно до яких коректність визначення спектру майже гармонічного сигналу забезпечується, якщо довжина сигналу має щонайменше 10 періодів. Тому розміри вікна в методі Уелча мають бути не менше за цю рекомендацію, водночас процедура усереднення буде вимагати значної кількості повторення вікон періодограми – вважатимемо що менше 10 повторень є гарантовано некоректним.

Для перевірки якості симуляції та оцінки точності розв'язків пропонується здійснити порівняння результатів чисельного інтегрування та наступної цифрової обробки з аналітичними розв'язками, які є відомими для лінійної задачі, що задається рівнянням (1).

Диференційне рівняння (1) має аналітичні розв'язки по спектральній щільності:

$$S_x(\omega) = S_F(\omega) \cdot |H(i \cdot \omega)|^2$$

де $S_x(\omega)$ – спектральна щільність відгуку системи, $S_F(\omega)$ – спектральна щільність зовнішнього навантаження $S_F(\omega) = \begin{cases} S_0, \omega \in (\Delta\omega_1, \Delta\omega_2) \\ 0, \omega \notin (\Delta\omega_1, \Delta\omega_2) \end{cases}$, ω – кутова частота, $(\Delta\omega_1, \Delta\omega_2)$ – діапазон визначення спектральної щільності; $H(i \cdot \omega)$ – детермінована передавальна функція, що представляє собою амплітудно-частотну характеристику системи (АЧХ):

$$H(i \cdot \omega) = \frac{1}{p^2 - \omega^2 + i \cdot \mu \cdot \omega}$$

де p – власна частота системи, $p = \sqrt{c/m}$, $i = \sqrt{-1}$.

Дисперсія випадкового процесу σ^2 визначається з інтегралу по області визначення спектральної щільності, тому для відгуку системи та для усередненого білого шуму відповідно матиме вид:

$$\sigma_x^2 = \int_{\Delta\omega_1}^{\Delta\omega_2} S_x(\omega) d\omega, \sigma_F^2 = \int_{\Delta\omega_1}^{\Delta\omega_2} S_F(\omega) d\omega = S_0.$$

А спектральна щільність зовнішнього навантаження, у випадку білого шуму, обчислюється як:

$$S_F(\omega) = \frac{2 \cdot \sigma_0}{\omega_{max} - \omega_0}$$

де σ_0 – стандартне відхилення (поширення або «ширина») розподілу, ω_{max} – максимальна величина кутової частоти, ω_0 – мінімальна величина кутової частоти.

Задаючи параметри такі як крок дискретизації, довжина сигналу та розмір вікна, було проведено серію розрахунків по визначенню впливу довжини сигналу на точність розв'язку з одночасним варіюванням розміру вікна у періодограмах. Фактично при цьому варіювалась кількість повторень в усередненні періодограм за фіксованих інших параметрів. Результати порівняння наведено на рис. 2-5.

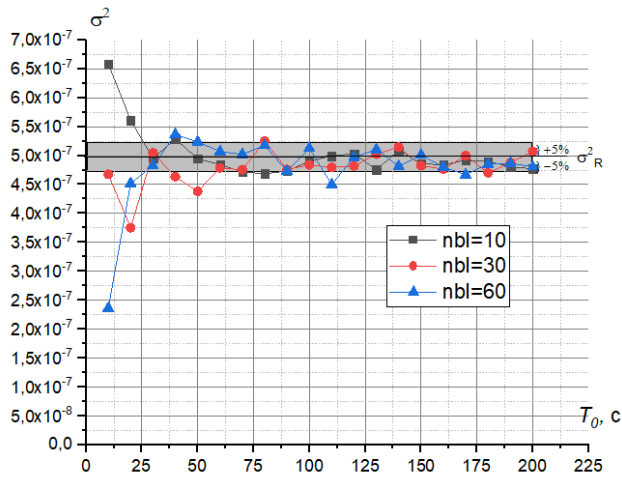


Рисунок 2 – Порівняння дисперсії переміщень при різній кількості блоків, де nbl – кількість блоків на які розбивається сигнал для методу Уелча

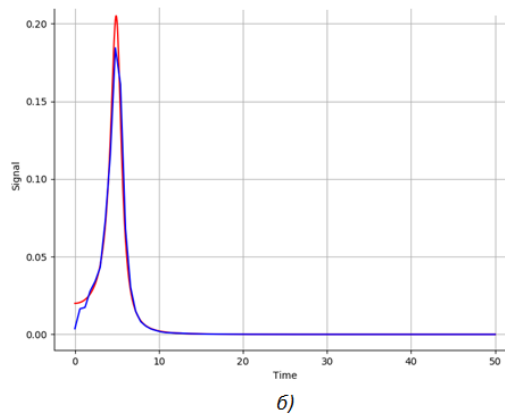
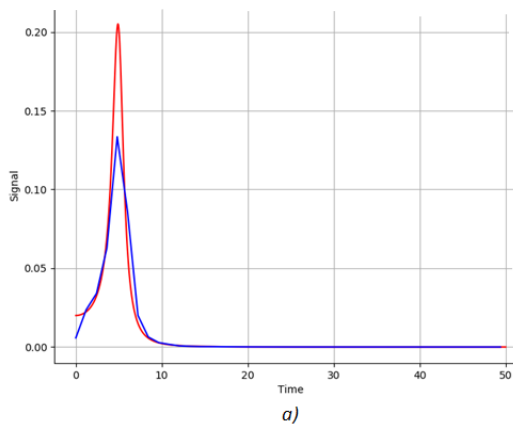


Рисунок 3 – Порівняння реального та розрахункового сигналу з похибкою: а) 9.46%, б) 1.63%

На рис. 2 показані графіки дисперсії переміщень σ^2 відносно довжин сигналів T_0 за різної кількості блоків nbl . Тут можна побачити, що при довжині сигналу 30 с та від 90 с відбувається незначний розкид значень дисперсії в межах похибки $\pm 5\%$. А на рис. 3 порівнюються реальний та розрахунковий сигнали з різних розрахунків із різною похибкою. З цього рису-

нку видно що графік б) розрахункового сигналу досить добре повторює реальний, де похибка склала 1.63 %, а графік а) – не зовсім точно, де похибка склала 9.46%.

Кожен запуск рішення це своя реалізація, хоч і усереднена, оскільки вона залежить від того яким чином був згенерований білий шум, того яким чином була вибрана довжина відрізка. Тому похибка є оцінкою, яка у свою чергу теж має випадковий характер і по ній треба оцінити довірчий інтервал. На рис.4 показано як веде себе похибка при зміні довжини сигналу T_0 , коли інші параметри однакові для всіх розрахунків. Тобто на кожному значенні довжини сигналу здійснено 10 однакових розрахунків і побудований довірчий інтервал похибки. Як можна побачити, зі зростанням довжини сигналу розкид і значення похибки зменшуються.

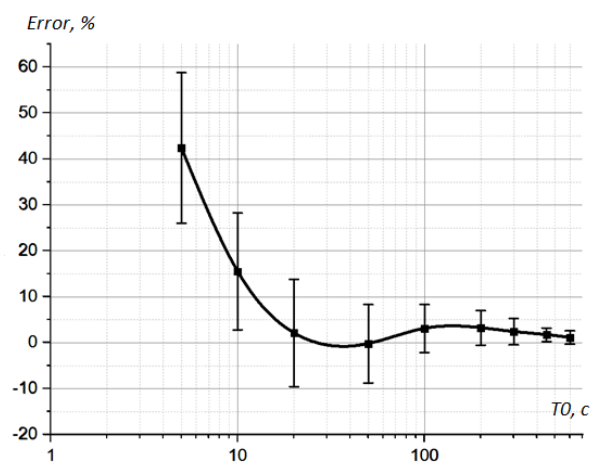


Рисунок 4 – Довірчий інтервал похибки при різній довжині сигналу

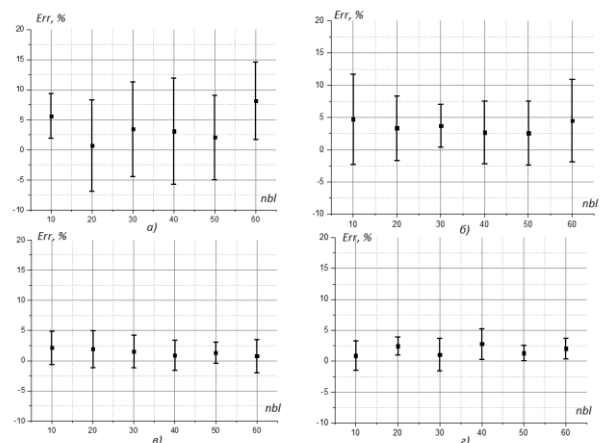


Рисунок 5 – Порівняння довірчого інтервалу похибки з кількістю блоків nbl від 10 до 60 при довжині сигналу T_0 : а) 250T; б) 500T; в) 1500T; г) 3000T

де nbl – кількість блоків на які розбивається сигнал для методу Уелча, Err – значення похибки у %, T – період коливаль, який у даному випадку дорівнює 0.2с.

На рис.5 показан довірчий інтервал похибки за різної кількості блоків, на який розбивається сигнал для методу Уелча, при різній довжині сигналу. Можна побачити, що при $T_0 \geq 1500T$ розмах похибки не такий значний, як при 250T і 500T, де кількість блоків краще вибрати 10 та 30 відповідно.

Висновки. Таким чином, у даній роботі створено програмне забезпечення та алгоритм числових симуляцій щодо розрахунку дискретної динамічної системи із стохастичним збуренням та проведено аналіз якості чисельних розв'язків. Розглянуто алгоритм чисельного розв'язку диференційного рівняння II порядку із стохастичною правою частиною на базі методу Рунге-Кутта, який реалізовано у вигляді програми на Python та проведено комплекс розрахункових досліджень при варіюванні параметрів чисельного інтегрування із подальшою оцінкою їх впливу на похибку та точність симуляцій.

Порівняння дисперсії при різній кількості блоків показало що при довжині сигналу 30 с та від 90 с відбувається незначний розкид значень дисперсії в межах похибки $\pm 5\%$.

Крок інтегрування повинен бути не більше ніж 0.02с з періодом коливань 0.2с у лінеаризованій задачі. Довжина сигналу для усереднення повинна бути від 100 секунд. Кількість періодів на вікно для такої системи має бути не менше ніж 10.

Список літератури

1. Голубенко А. Л. Теория технических систем: учеб. пособие для вузов / А. Л. Голубенко, А. С. Петров, А. Л. Кашура. — К.: Арістей, 2004. — 239 с.
2. Spanos, P. D., On the determination of the power spectrum of randomly excited oscillators via stochastic averaging: An alternative perspective / Spanos, P. D., Kougioumtzoglou, I. A. Soize, C / Probabilistic Eng. Mech. — 26, 1 — 2011. С. 10–15.
<https://doi.org/10.1016/J.PROBENGMECH.2010.06.001>.
3. Kang, J. A novel time-domain representation of transmissibility and its applications on operational modal analysis in the presence of non-white stochastic excitations / Kang, Jie, Liu, Li, Zhou, Si Da, Shao, Yu Pei / J. Sound Vib. № 457.— 2019.— С.157–180.
<https://doi.org/10.1016/J.JSV.2019.05.047>.
4. Li X. . Dynamic responses of a two-degree-of-freedom bistable electromagnetic energy harvester under filtered band-limited stochastic excitation / Li Xuefeng, Zhang Jingyu, Li Renfu, Dai Lu, Wang Wei, Yang Kai / J. Sound Vib. 511. — 2019.
<https://doi.org/10.1016/J.JSV.2021.116334>.
5. Zhang, X. Probability density function for stochastic response of non-linear oscillation system under random excitation / Zhang Xufang, Pandey M. D, Zhang Yimin, Zhao Yuee / Int. J. Non. Linear. Mech. № 45 (8) .— 2010.— . С. 800–808.
<https://doi.org/10.1016/J.IJNONLINMEC.2010.06.002>.
6. P.D. Spanos, , Nonstationary response envelope probability densities of nonlinear oscillators / P.D Spanos, A Sofi, Di Paola/ ASME Journal of Applied Mechanics №74 (2).— 2007.— С. 315–324
7. L.L. Zhang Dynamic response and reliability analysis of tall buildings subject to wind loading / L.L. Zhang, J Li, YB.

Peng/ Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics №96 (1) .— 2008.— С. 25–40

8. K. Motte, Operational modal analysis in the presence of harmonic excitations: a review, / K. Motte, W. Weijtjens, C. Devriendt, P. Guillaume / in: Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, Springer, Cham, Caicedo J., Pakzad S., 2015

9. Yan, Y. Statistical basin of attraction in time-delayed cutting dynamics / Yan Y., Xu J., Wiercigroch M., Guo, Q. / Modelling and computation. Physica D: Nonlinear Phenomena, №416,.) — 2021. С. 132779
<https://doi.org/10.1016/J.PHYSD.2020.132779>

10. von Smekal, L. Spectral functions and critical dynamics of the O(4) model from classical-statistical lattice simulations. / von Smekal, L. / Nuclear Physics. — 2020.С. 1-22
<https://doi.org/10.1016/J.NUCLPHYSB.2019.114868>

11. Голиков А. П., Дейнека О. Г., Позднякова Л. О., Черномаз П. О. Регіональна економіка та природокористування / За ред. Голикова А. П.: Навчальний посібник. — К. : Центр учбової літератури, 2009. — 352 с.

12. Медведев С.Ю. Преобразование Фурье и классический цифровой спектральный анализ. — Режим доступа: http://www.vibration.ru/preobraz_fur.shtml, 20/03/2020.

13. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. — СПб., Питер, 2003г.

14. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М., Мир, 1990г.

References (transliterated)

1. Golubenko A.L. Theory of technical systems: textbook manual for universities / A. L. Golubenko, A. S. Petrov, A. L. Kashura. - K.: Aristey, 2004. - 239 p.
2. Spanos, P. D., On the determination of the power spectrum of randomly excited oscillators via stochastic averaging: An alternative perspective / Spanos, P. D., Kougioumtzoglou, I. A. Soize, C / Probabilistic Eng. Mech. — 26, 1 — 2011. С. 10–15.
<https://doi.org/10.1016/J.PROBENGMECH.2010.06.001>.
3. Kang, J. A novel time-domain representation of transmissibility and its applications on operational modal analysis in the presence of non-white stochastic excitations / Kang, Jie, Liu, Li, Zhou, Si Da, Shao, Yu Pei / J. Sound Vib. № 457.— 2019.— С.157–180.
<https://doi.org/10.1016/J.JSV.2019.05.047>.
4. Li X. . Dynamic responses of a two-degree-of-freedom bistable electromagnetic energy harvester under filtered band-limited stochastic excitation / Li Xuefeng, Zhang Jingyu, Li Renfu, Dai Lu, Wang Wei, Yang Kai / J. Sound Vib. 511. — 2019.
<https://doi.org/10.1016/J.JSV.2021.116334>.
5. Zhang, X. Probability density function for stochastic response of non-linear oscillation system under random excitation / Zhang Xufang, Pandey M. D, Zhang Yimin, Zhao Yuee / Int. J. Non. Linear. Mech. № 45 (8) .— 2010.— . С. 800–808.
<https://doi.org/10.1016/J.IJNONLINMEC.2010.06.002>.
6. P.D. Spanos, , Nonstationary response envelope probability densities of nonlinear oscillators / P.D Spanos, A Sofi, Di Paola/ ASME Journal of Applied Mechanics №74 (2).— 2007.— С. 315–324
7. L.L. Zhang Dynamic response and reliability analysis of tall buildings subject to wind loading / L.L. Zhang, J Li, YB. Peng/ Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics №96 (1) .— 2008.— С. 25–40
8. K. Motte, Operational modal analysis in the presence of harmonic excitations: a review, / K. Motte, W. Weijtjens, C. Devriendt, P. Guillaume / in: Conference Proceedings of the

Society for Experimental Mechanics Series, Springer, Cham, Caicedo J., Pakzad S., 2015

9. Yan, Y. Statistical basin of attraction in time-delayed cutting dynamics / Yan Y., Xu J., Wiercigroch M., Guo, Q. / Modelling and computation. Physica D: Nonlinear Phenomena, №416,.) — 2021. С. 132779

<https://doi.org/10.1016/J.PHYSD.2020.132779>

10. von Smekal, L. Spectral functions and critical dynamics of the O(4) model from classical-statistical lattice simulations. / von Smekal, L. / Nuclear Physics. – 2020.С. 1-22

<https://doi.org/10.1016/J.NUCLPHYSB.2019.114868>

11. Golikov A. P., Deineka O. G., Pozdnyakova L. O., Chernomaz P. O. Regional Economics and Natural Resources / Ed. A.P. Golikova: Navchalnyy posibnik. - K.: Center for Educational Literature, 2009. - 352 p.

12. Medvedev S.Yu. Fourier transform and classical digital spectral analysis. - Available at: http://www.vibration.ru/preobraz_fur.shtml, 20/03/2020.

13. Sergienko A.B. Digital signal processing. - SPb., Peter, 2003.

14. Marple Jr. S.L. Digital spectral analysis and its applications. - M., Mir, 1990.

Поступила (received) 10.06.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ларін Олексій Олександрович (Ларин Алексей Александрович, Larin Oleksiy Oleksandrovych) – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», директор навчально-наукового інженерно-фізичного інституту, м. Харків, Україна; e-mail: AlexeyA.Larin@gmail.com.

Бескровний Ярослав Юрійович (Бескровный Ярослав Юрьевич, Beskrovnyi Yaroslav Yuriyovich) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант; м. Харків, Україна; e-mail: beskrovnyyar@gmail.com.