

**В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ, М. В. СЛІПЧЕНКО**  
**НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ МИТТЄВО НАВАНТАЖЕНОГО ОСЦИЛЯТОРА В УМОВАХ**  
**НЕЛІНІЙНОГО ОПОРУ**

Розглянуто рух осцилятора, миттєво навантаженого сталою силою в умовах нелінійного зовнішнього опору, складовими якого є квадратичний в'язкий опір, сухе та позиційне тертя. Використовуючи перший інтеграл рівняння руху та функцію Ламберта, виведено компактні формули для обчислень розмахів коливань. З метою спрощення пошуку значень функції Ламберта наведено асимптотичні формули, які з похибкою меншою одного відсотка виражають цю спеціальну функцію через елементарні функції. Показано, що внаслідок дії сили опору, що включає сухе тертя, процес коливань має скінченну кількість циклів і обмежений у часі, бо осцилятор попадає в область застою, яка знаходиться в околі статичного відхилення осцилятора, спричиненого прикладеною зовнішньою силою. Коефіцієнт динамічності системи менший двох. Розглянуто приклади розрахунків, що ілюструють можливості викладеної теорії. Крім аналітичного дослідження, проведено чисельне комп'ютерне інтегрування, диференціального рівняння руху. Встановлено повну збіжність результатів, одержаних за допомогою виведених формул і чисельним інтегруванням, чим підтверджено, що використовуючи аналітичні розв'язки можна без чисельного інтегрування нелінійного диференціального рівняння визначати екстремальні переміщення осцилятора. Для спрощення розрахунків рекомендована також література, де надруковано таблиці функції Ламберта, що дають можливість знаходити її значення інтерполяцією табличних даних. В умовах нелінійного зовнішнього опору, складовими якого є квадратичний в'язкий опір, сухе та позиційне тертя процес коливань миттєво навантаженого осцилятора має обмежену кількість циклів. Отримані у роботі залежності з використанням функції Ламберта дають можливість визначити розмахи коливань без чисельного інтегрування нелінійного диференціального рівняння руху як для осцилятора з квадратичним в'язким опором і сухим тертям, так і для осцилятора з квадратичним опором та позиційним і сухим тертям.

**Ключові слова:** нелінійний осцилятор, миттєве навантаження, квадратичний в'язкий опір, функція Ламберта, розмахи коливань.

Рассмотрены движение осциллятора, мгновенно нагруженного постоянной силой в условиях нелинейного внешнего сопротивления, составляющими которого являются квадратичное вязкое сопротивление, сухое и позиционное трения. Используя первый интеграл уравнения движения и функцию Ламберта, выведены компактные формулы для вычисления размахов колебаний. С целью упрощения поиска значений функции Ламберта, приведены асимптотические формулы, которые с погрешностью менее одного процента выражают эту специальную функцию через элементарные функции. Показано, что в результате действия силы сопротивления, включая сухое трение, процесс колебаний имеет конечное число циклов и ограничен во времени, поскольку осциллятор попадает в область застоя, которая находится в окрестности статического отклонения осциллятора, вызванного приложенной внешней силой. Коэффициент динамичности системы менее двух. Рассмотрены примеры расчетов, иллюстрирующие возможности изложенной теории. Кроме аналитического исследования, проведено численное компьютерное интегрирование, дифференциального уравнения движения. Установлено полную сходимость результатов, полученных с помощью выведенных формул и численным интегрированием, чем подтверждено, что используя аналитические решения можно без численного интегрирования нелинейного дифференциального уравнения определять экстремальные перемещения осциллятора. Для упрощения расчетов рекомендуется также литература, где напечатаны таблицы функции Ламберта, позволяющие находить ее значение интерполяцией табличных данных. В условиях нелинейного внешнего сопротивления, составляющими которого являются квадратичный вязкое сопротивление, сухое и позиционное трения процесс колебаний мгновенно нагруженного осциллятора имеет ограниченное число циклов. Полученные в работе зависимости с использованием функции Ламберта дают возможность определять размахи колебаний без численного интегрирования нелинейного дифференциального уравнения движения как для осциллятора с квадратичным вязким сопротивлением и сухим трением, так и для осциллятора с квадратичным сопротивлением и позиционным и сухим трением.

**Ключевые слова:** нелинейный осциллятор, мгновенное нагружение, квадратичное вязкое сопротивление, функция Ламберта, размахи колебаний.

The motion of an oscillator instantaneously loaded with a constant force under conditions of nonlinear external resistance, the components of which are quadratic viscous resistance, dry and positional friction, are considered. Using the first integral of the equation of motion and the Lambert function, compact formulas for calculating the ranges of oscillations are derived. In order to simplify the search for the values of the Lambert function, asymptotic formulas are given that, with an error of less than one percent, express this special function in terms of elementary functions. It is shown that as a result of the action of the resistance force, including dry friction, the oscillation process has a finite number of cycles and is limited in time, since the oscillator enters the stagnation region, which is located in the vicinity of the static deviation of the oscillator caused by the applied external force. The system dynamic factor is less than two. Examples of calculations that illustrate the possibilities of the stated theory are considered. In addition to analytical research, numerical computer integration of the differential equation of motion was carried out. The complete convergence of the results obtained using the derived formulas and numerical integration is established, which confirms that using analytical solutions it is possible to determine the extreme displacements of the oscillator without numerical integration of the nonlinear differential equation. To simplify the calculations, the literature is also recommended, where tables of the Lambert function are printed, allowing you to find its value for interpolating tabular data. Under conditions of nonlinear external resistance, the components of which are quadratic viscous resistance, dry and positional friction, the process of oscillations of an instantly loaded oscillator has a limited number of cycles. The dependences obtained in this work using the Lambert function make it possible to determine the range of oscillations without numerical integration of the nonlinear differential equation of motion both for an oscillator with quadratic viscous resistance and dry friction, and for an oscillator with quadratic resistance and positional and dry friction.

**Keywords:** nonlinear oscillator, instantaneous loading, quadratic viscous resistance, Lambert function, oscillation amplitude.

**Вступ.** Дослідженню коливань присвячено багато робіт. Лінійні коливання і їх розв'язок досить детально описані в літературі. Дослідження нелінійних коливань під дією імпульсних навантажень є більш складним. Обчислення розмахів коливань проводять як аналітичними так і чисельними методами. Для отримання компактних розв'язків в даній роботі застосовано функцію Ламберта, що дає можливість отримати результати, близькі до значень

отриманих чисельним розв'язком.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.**

Існуючі публікації за названою темою, в тому числі й останніх років, стосуються в основному імпульсно навантажених лінійних механічних систем. В них різними методами з використанням комп'ютерів проводять розрахунок міцності шаруватих і неоднорідних (підкріплених) тонкостінних тіл [1-4] та

зокрема в закордонних виданнях [5, 6] при заданих нестационарних динамічних навантаженнях. Поряд з цим є значний успіх і в розв'язуванні обернених математично некоректних задач ідентифікації невідомих динамічних навантажень на тонкостінні елементи конструкцій за даними експериментального вимірювання в них переміщень або деформацій [7-11]. Тут суттєву роль відіграє принцип суперпозиції, що зводить проблему до розв'язування інтегральних рівнянь типу Вольтера. Але цей принцип не спрацьовує для нелінійних систем і їх коливанням в умовах короточасних навантажень присвячено значно менше публікацій. Із робіт, в яких аналітично розв'язані нелінійні задачі динаміки імпульсно навантажених пружно нелінійних осциляторів виділимо [12-14]. Дві перших з них розв'язано з використанням Атев-функцій і еліптичних функцій Якобі. Тут розглядаємо рух пружно лінійного осцилятора, але в умовах нелінійного зовнішнього опору. Сила опору є сумою сил квадратичного в'язкого опору та сухого тертя Кулона. В більш загальному випадку до них може залучатись і третя сила, а саме сила позиційного тертя. Для обчислень екстремальних переміщень осцилятора використовуємо перший інтеграл рівняння руху та відому спеціальну функцію Ламберта [15-18].

**Метою статті** є побудова та апробація розрахунками формул для обчислення розмахів коливань миттєво навантаженого дисипативного осцилятора сталою силою.

Внаслідок дії сили опору, особливо сили сухого тертя, рух осцилятора включає обмежену кількість циклів і займає скінченний проміжок часу до повної його зупинки.

## Викладення основного матеріалу

### 1. Осцилятор з квадратичним в'язким опором і сухим тертям.

Тут розглядаємо рух коливальної системи з подвійною нелінійністю у виразі сили опору. Перша стосується в'язкого опору, а друга – сухого тертя. Вільні коливання таких систем методом енергетичного балансу досліджували в [19, 20].

За вихідне приймаємо диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} + \mu|\dot{x}|\dot{x} + F_T \text{sign}(\dot{x}) + cx = P_1 H(t), \quad (1)$$

в якому  $m$  – маса осцилятора;  $\mu$  – коефіцієнт квадратичного в'язкого опору;  $F_T$  – сила сухого тертя;  $c$  – коефіцієнт пружності;  $P_1$  – зовнішня сила;  $H(t)$  – функція Хевісайда;  $x = x(t)$  – переміщення осцилятора у часі  $t$ ; крапка означає похідну по  $t$ .

Переходом до нової функції  $y = \dot{x}^2$  рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$m \frac{dy}{dx} + (2\mu y + 2F_T) \text{sign}(\dot{x}) + 2cx = 2P_1 \cdot H(t). \quad (2)$$

Його розв'язуємо при нульових початкових умовах:

$$y(0) = 0. \quad (3)$$

На проміжку  $x \in [0; a_1]$ , де  $\dot{x} \geq 0$ , замість (2) маємо:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2\mu}{m} y + \frac{2c}{m} x = \frac{2Q}{m}, \quad (4)$$

де  $Q = P_1 - F_T > 0$ .

Якщо  $Q < 0$ , то сила  $P_1$  не виведе осцилятор із стану спокою.

Загальним розв'язком лінійного диференціального рівняння (4) є:

$$y(x) = b \cdot \exp\left(-\frac{2\mu}{m}x\right) + \frac{1}{\mu} \left(Q + \frac{mc}{2\mu} - cx\right). \quad (5)$$

Тут  $b$  довільна стала.

Далі прийнемо, що при  $x = x_0$ ,  $y(x_0) = 0$ . Тоді:

$$b = -\frac{1}{\mu} \left(Q + \frac{mc}{2\mu} - cx_0\right) \exp\left(\frac{2\mu}{m}x_0\right). \quad (6)$$

Зазначимо, що згідно (3),  $x_0 = 0$  і це використаємо потім.

В кінці виділеного проміжку руху, коли  $x = a_1$ ,  $y(a_1) = 0$ .

Це призводить до рівняння:

$$\exp\left(-\frac{2\mu}{m}a_1\right) + \frac{1}{\mu b} \left(Q + \frac{mc}{2\mu} - ca_1\right) = 0$$

або

$$\exp\left(-\frac{2\mu}{m}a_1\right) = \frac{mc}{2\mu^2|b|} \left[\frac{2\mu}{m} \left(\frac{Q}{c} + \frac{m}{2\mu}\right) - \frac{2\mu}{m}a_1\right].$$

Прологарифмувавши останнє, одержуємо:

$$-\frac{2\mu}{m}a_1 = \ln \left[\frac{2\mu}{m} \left(\frac{Q}{c} + \frac{m}{2\mu}\right) - \frac{2\mu}{m}a_1\right] + \ln \frac{mc}{2\mu^2|b|}.$$

Після подальших перетворень приходимо до рівняння:

$$f - \ln f = \xi, \quad (7)$$

в якому:

$$f = 1 + \frac{2\mu Q}{mc} - \frac{2\mu}{m}a_1; \quad \xi = 1 + \frac{2\mu Q}{mc} + \ln \frac{mc}{2\mu^2|b|}. \quad (8)$$

Розв'язок рівняння (7) виражається через функцію Ламберта від'ємного аргументу [15, 16]:

$$f = -W_1[-\exp(-\xi)].$$

Тому:

$$\max x(t) = a_1 = \frac{m}{2\mu} \left\{ 1 + \frac{2\mu Q}{mc} + W_1[-\exp(-\xi)] \right\}. \quad (9)$$

Тут  $W_1[-\exp(-\xi)]$  – перша гілка двохзначної функції Ламберта від'ємного аргументу.

Щоб обчислити максимальне переміщення осцилятора при початкових умовах (3), задамо в (6), (8)  $x_0 = 0$ . Тоді:

$$|b| = \frac{1}{\mu} \left(Q + \frac{mc}{2\mu}\right); \quad \xi = 1 + \frac{2\mu Q}{mc} - \ln \left(1 + \frac{2\mu Q}{mc}\right)$$

і (9) зводиться до формули:

$$\max x(t) = a_1 = \frac{m}{2\mu} \times \left\{ 1 + \frac{2\mu Q}{mc} + W_1 \left[ - \left( 1 + \frac{2\mu Q}{mc} \right) \exp \left( -1 - \frac{2\mu Q}{mc} \right) \right] \right\}, \quad (10)$$

Коефіцієнт динамічності системи становить:

$$K_g = \frac{a_1 \cdot c}{Q} = \frac{m}{2\mu Q} \times \left\{ 1 + \frac{2\mu Q}{mc} + W_1 \left[ - \left( 1 + \frac{2\mu Q}{mc} \right) \exp \left( -1 - \frac{2\mu Q}{mc} \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

В формулах (10), (11) маємо невизначеність типу  $|0/0|$  при  $\mu \rightarrow 0$ . Для таких  $\mu$ :

$$W_1 \left[ - \left( 1 + \frac{2\mu Q}{mc} \right) \exp \left( -1 - \frac{2\mu Q}{mc} \right) \right] \sim \\ \sim W_1 \left[ - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \left( \frac{2\mu Q}{mc} \right)^2 \right].$$

З'ясуємо поведінку  $W_1 \left( -\frac{1}{e} + \eta \right)$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Оскільки  $W_1 \left( -\frac{1}{e} \right) = -1$  то можна прийняти

$W_1 \left( -\frac{1}{e} + \eta \right) \sim -1 + \varepsilon$ , де  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Далі використаємо рівняння, якому задовольняє функція Ламберта:

$$W_1 e^{W_1} = -\frac{1}{e} + \eta.$$

При малих  $\varepsilon$  маємо:

$$\left( -1 + \varepsilon \right) e^{-1 + \varepsilon} \approx -\frac{1}{e} (1 - \varepsilon^2) = -\frac{1}{e} + \eta.$$

Звідки випливає, що  $\varepsilon = \sqrt{e\eta}$ ;

$$W_1 \left( -\frac{1}{e} + \eta \right) \sim -1 + \sqrt{e\eta}.$$

Оскільки в нашому випадку  $\eta = \frac{1}{e} \left( \frac{2\mu Q}{mc} \right)^2$ , то при  $\mu \rightarrow 0$ :

$$W_1 \left[ - \left( 1 + \frac{2\mu Q}{mc} \right) \exp \left( -1 - \frac{2\mu Q}{mc} \right) \right] \sim -1 + \frac{2\mu Q}{mc}.$$

Тоді  $\lim_{\mu \rightarrow 0} K_g = 2$ ;  $\lim_{\mu \rightarrow 0} a_1 = \frac{2Q}{c}$ , що відповідає лінійному осцилятору без в'язкого опору.

На проміжку руху  $x \in [a_1; a_2]$ , де  $\dot{x} \leq 0$ , рівняння (2) приймає форму:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2\mu}{m} y + \frac{2c}{m} x = \frac{2S}{m}, \quad (12)$$

де  $S = P_1 + F_T$ .

Рівняння (12) має розв'язок:

$$y(x) = d \cdot \exp \left( \frac{2\mu}{m} x \right) - \frac{1}{\mu} \left( S - \frac{mc}{2\mu} - cx \right).$$

Він задовольняє умові  $y(a_1) = 0$ , коли:

$$d = \frac{1}{\mu} \left( S - \frac{mc}{2\mu} - a_1 c \right) \cdot \exp \left( -\frac{2\mu}{m} a_1 \right). \quad (13)$$

Оскільки  $y(a_2) = 0$ , то  $a_2$  є розв'язком рівняння:

$$d \cdot \exp \left( \frac{2\mu}{m} a_2 \right) = \frac{1}{\mu} \left( S - \frac{mc}{2\mu} - c a_2 \right).$$

Цей розв'язок теж виражається через функцію Ламберта і подається виразом:

$$\min x(t) = a_2 = \frac{m}{2\mu} \left\{ \frac{2\mu S}{mc} - 1 - W_1 \left[ -\exp(-\eta) \right] \right\}, \quad (14)$$

у якому:  $\eta = 1 + \ln \frac{mc}{2|d|\mu^2} - \frac{2\mu S}{mc}$ .

Обчислення подальших екстремальних переміщень осцилятора зводиться до послідовного використання формул (9) і (14).

Тепер при визначенні  $a_3$  по формулі (9) треба замінити  $a_1$  на  $a_3$ , а в (6) замість  $x_0$  підставити  $a_2$ , а при визначенні  $a_4$  по формулі (14) в ній замінити  $a_2$  на  $a_4$  і в (13) замість  $a_1$  задати  $a_3$ .

Значення функції Ламберта від'ємного аргументу можна знаходити інтерполяцією табличних даних, надрукованих в [19, 20] або за допомогою асимптотичних формул, виведених в [20]. Так при  $z \in \left[ 0,25; \frac{1}{e} \right]$  з похибкою меншою 0,35 % [20]:

$$W_1(-z) \approx 2 \left( \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\alpha}{3} - 1 \right), \quad (15)$$

де  $p = 2ez_1 - 3$ ;  $q = 2 - 8ez_1$ ;

$$\alpha = \arccos \left( -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}} \right), \quad z_1 = \frac{1}{e} - z.$$

Якщо  $x \in [0; 0,25]$ , то з похибкою меншою 0,31 % [20]:

$$W(-x) \approx -x - x^2 - \frac{3}{2} x^3 - \frac{8x^4}{3 \left( 1 - \frac{125}{64} x \right)}. \quad (16)$$

Інформація про властивості функції Ламберта та її використання в розв'язках задач удару є також в [22-24].

**Приклад.** Для проведення розрахунків задаємо:  $m = 2$  кг;  $c = 5000$  Н/м;  $\mu = 50$  Н·с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;  $P_1 = 45$  Н;  $F_T = 5$  Н. При таких вхідних даних:  $Q = 40$  Н;  $\frac{2\mu Q}{mc} = 0,4$ ;  $\left( 1 + \frac{2\mu Q}{mc} \right) \exp \left( -1 - \frac{2\mu Q}{mc} \right) \approx 0,3452 < \frac{1}{e}$ . За формулою (15)  $W_1(-0,3452) \approx -0,6841$  і згідно з (9)  $a_1 \approx 0,0143$  м. Це максимальне переміщення осцилятора під дією миттєво прикладеної сили  $P_1$ . Йому відповідає обчислений по (11) коефіцієнт динамічності  $K_g \approx 1,788$ . Далі знаходимо, що  $S = 50$

Н;  $|d| \approx 1,18874 \text{ м}^2/\text{с}^2$ ;  $\eta \approx 1,02025$ ;  $\exp(-\eta) \approx 0,3605 < 1/e$ . За формулою (15) одержуємо  $W_1(-0,3605) \approx -0,8119$  і згідно з (14)  $a_2 \approx 0,006238 \text{ м}$ . Підставивши, це значення  $a_2$  замість  $x_0$  в (6), одержуємо  $b \approx 2,97273 \text{ м}^2/\text{с}^2$ . Тоді, згідно з (8),  $\xi \approx 1,00367$ ;  $\exp(-\xi) \approx 0,36653 < 1/e$ . Для цього  $\exp(-\xi)$  формула (15) дає  $W_1(-0,3665) \approx -0,9167$  і за формулою (9)  $a_3 \approx 0,00967 \text{ м}$ . Замінивши в (13),  $a_1$  на

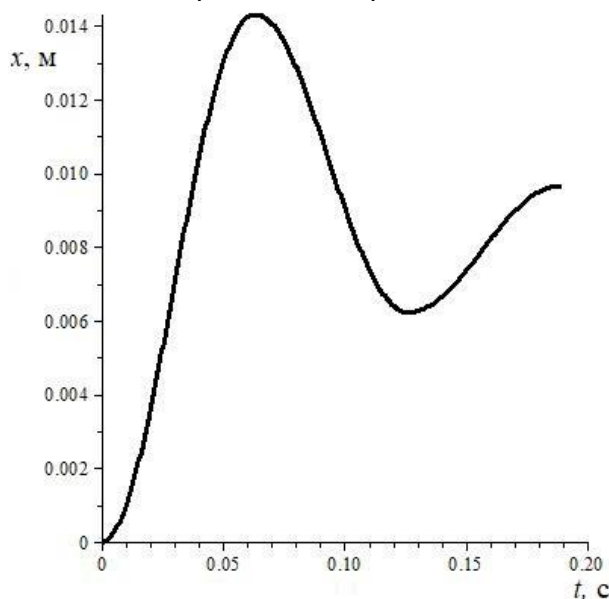
$a_3$ , одержуємо  $|d| \approx 1,21289 \text{ м}^2/\text{с}^2$ . Тоді  $\eta \approx 1,000138$ ;  $\exp(-\eta) \approx 0,36783$ ;  $W_1 \approx -0,98352$ ,  $a_4 \approx 0,00967 \text{ м}$ . Це означає, що осцилятор знаходиться в області застою, бо  $a_4$  таке як і  $a_3$ .

Більш точні значення  $a_i$  та час їх досягнення  $t_i$  вказано в табл. 1. Вони одержані чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері.

Таблиця 1 – Екстремальні переміщення та час їх досягнення

$i$	1	2	3
$100a_i, \text{ м}$	1,4308	0,6234	0,9668
$100t_i, \text{ с}$	6,3165	12,610	18,900

Одержаний комп'ютерним способом графік переміщень осцилятора показано на рис. 1.

Рис. 1 – Графік переміщень осцилятора при  $c = 5000 \text{ Н/м}$ 

Він складається з обмеженої кількості розмахів, бо осцилятор попавши в область застою повністю припиняє рух, що є наслідком дії сили сухого тертя у складі сили опору.

## 2. Осцилятор з квадратичним опором та позиційним і сухим тертям.

Проведемо узагальнення результатів попереднього параграфу, використавши нелінійну характеристику пружності, що враховує позиційне тертя [19].

Рух коливальної системи опишемо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + \mu|\dot{x}\dot{x} + F_T \text{sign}(\dot{x}) + (c + \Delta c \text{sign}(x) \cdot \text{sign}(\dot{x}))x = P_1 H(t), \quad (17)$$

в якому стала  $\Delta c$  характеризує позиційне тертя.

Його розв'язуємо при нульових початкових умовах (3).

На проміжку руху  $x \in [0; a_1]$ , де  $\dot{x} \geq 0$ , рівняння

(17) отримує вигляд:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2\mu}{m}y + \frac{2c_1}{m}x = \frac{2Q}{m}. \quad (18)$$

Воно лише множником  $c_1 = c + \Delta c$  відрізняється від (4), де  $\Delta c = 0$ .

Тому, не повторюючи надрукованих вище перетворень, скористаємося одержаними раніше результатами.

По аналогії з (9), для обчислення максимального переміщення осцилятора маємо формулу:

$$\max x(t) = a_1 = \frac{m}{2\mu} \left\{ 1 + \frac{2\mu Q}{mc_1} + W_1 \left[ - \left( 1 + \frac{2\mu Q}{mc_1} \right) \exp \left( -1 - \frac{2\mu Q}{mc_1} \right) \right] \right\}. \quad (19)$$

Коефіцієнт динамічності системи буде визначатись залежністю (11) якщо в ній замінити  $c$  на  $c_1$ .

У випадку ненульових початкових умов, коли:

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = 0,$$

максимальне переміщення становить:

$$\max x(t) = a_1 = \frac{m}{2\mu} \left\{ 1 + \frac{2\mu Q}{mc_1} + W_1 \left[ - \exp(-\xi) \right] \right\}, \quad (20)$$

$$\text{де } \xi = 1 + \frac{2\mu Q}{mc_1} + \ln \frac{mc_1}{2\mu^2|b|}; \quad |b| = \frac{1}{\mu} \left( Q + \frac{mc_1}{2\mu} - c_1 x_0 \right) \times \exp \left( \frac{2\mu}{m} x_0 \right).$$

На проміжку руху  $x \in [a_1; a_2]$ , де  $\dot{x} \leq 0$ , рівняння (17) має вигляд:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2\mu}{m}y + \frac{2c_2}{m}x = \frac{2S}{m}. \quad (21)$$

Тут  $c_2 = c - \Delta c$ .

При  $\Delta c = 0$  рівняння (21) переходить в (12).

По аналогії з (14), із (21) впливає наступна формула для обчислення мінімального переміщення осцилятора:

$$\min x(t) = a_2 = \frac{m}{2\mu} \left\{ \frac{2\mu S}{mc_2} - 1 - W_1 \left[ - \exp(-\eta) \right] \right\}, \quad (22)$$

$$\text{Тут: } \eta = 1 + \ln \frac{mc_2}{2|d|\mu^2} - \frac{2\mu S}{mc_2}; \quad d = \frac{1}{\mu} \left( S - \frac{mc_2}{2\mu} - a_1 c_2 \right) \times \exp\left(-\frac{2\mu}{m} a_1\right).$$

Отже, після обчислення  $a_1$ , по формулі (20) потім за допомогою (22) можна знайти  $a_2$ .

Формули (20), (22) придатні для подальшого обчислення й інших екстремальних переміщень осцилятора, які виражаються через першу гілку функції Ламберта від'ємного аргументу, що подана асимптотичними формулами (15), (16).

З метою апробації виведених формул розглянемо приклад. Для проведення розрахунків приймаємо:  $m=1$  кг;  $c=4800$  Н/м;  $\Delta c=200$  Н/м;  $\mu=20$  Н·с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;  $P_1=42$  Н;  $F_T=2$  Н. При таких числових даних:

$$Q=40 \text{ Н}; \quad c_1=5000 \text{ Н/м}; \quad \frac{2\mu Q}{mc_1}=0,32;$$

$$\left(1 + \frac{2\mu Q}{mc_1}\right) \exp\left(-1 - \frac{2\mu Q}{mc_1}\right) \approx 0,35262. \quad \text{За формулою}$$

(15) знаходимо  $W_1[-0,35262] \approx -0,73627$ . Тому, згідно з (20):  $a_1 \approx 0,01459$  м. Далі, користуючись формулою (22), при  $S=44$  Н;  $c_2=4600$  Н/м, одержуємо:  $|d| \approx 3,85260$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $\eta \approx 1,01784$ ;  $\exp(-\eta) \approx 0,36137$ ;  $W_1(-0,36137) \approx -0,82269$ ;  $a_2 \approx 0,005132$  м. Щоб знайти  $a_3$  використаємо формулу (20), замінивши в ній  $x_0$  на  $a_2$ . Маємо:  $|b| \approx 8,55456$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $\xi \approx 1,006117$ ;  $\exp(-\xi) \approx 0,36564$ ;  $W_1(-0,36564) \approx -0,89351$ ;  $a_2 \approx 0,01066$  м. Щоб обчислити  $a_4$  звернемось до формули (22). Підставивши туди замість  $a_1$  обчислене  $a_3$ , одержуємо:  $|d| \approx 3,918306$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $\eta \approx 1,0009317$ ;  $\exp(-\eta) \approx 0,36753$ ;  $W_1 \approx -0,95746$ ;  $a_4 \approx 0,008502$  м. Подальший розрахунок дає  $a_5 \approx 0,008502$  м, тобто  $a_4$  є останнім екстремальним переміщенням в області застою.

Більш точні значення  $a_i$  та час їх досягнення  $t_i$ , одержані чисельним інтегруванням на комп'ютері рівняння (17), записано в табл. 2

Таблиця 2 – Екстремальні переміщення та час їх досягнення

$i$	1	2	3	
$100a_i$ , м	1,4589	0,5136	1,0661	0,8501
$100t_i$ , с	4,4586	9,0975	13,543	18,181

Одержаний чисельним інтегруванням рівняння (17) графік переміщень подано на рис. 2.

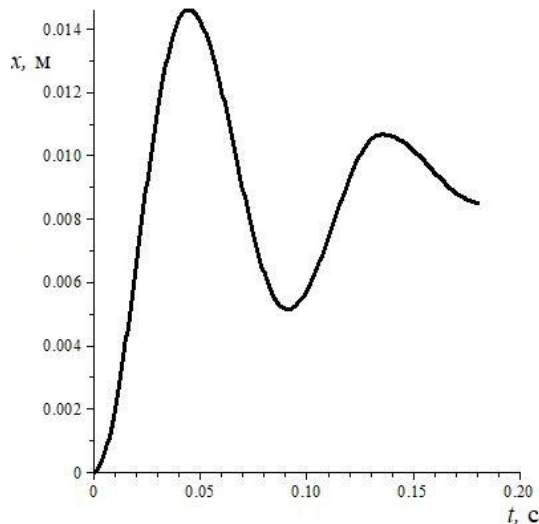


Рис. 2 – Графік переміщень осцилятора при  $c=4800$  Н/м;  $\Delta c=200$  Н/м

Розрахунки підтвердили вірогідність введених розрахункових формул для обчислення екстремальних переміщень осцилятора і при спільній дії трьох сил опору.

**Висновки.** В умовах розглянутого опору процес коливань миттєво навантаженого осцилятора має обмежену кількість циклів.

Використання функції Ламберта дає можливість визначати розмахи коливань без чисельного інтегрування нелінійного диференціального рівняння руху. Збіжність числових результатів, одержаних двома способами, підтвердила адекватність виведених розрахункових формул.

#### Список літератури

1. Головка Г. К. Динамика неоднородных оболочек / Г. К. Головка, П. З. Луговой, В. Ф. Мейш. – Киев : Изд-во полиграфический центр «Киевский университет», 2012. – 541 с.
2. Луговой П. З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П. З. Луговой, В. Ф. Мейш, Э. Ф. Штангель. – Киев : Изд-во полиграфический центр «Киевский университет», 2005. – 536 с.
3. Старовойтов Э. И. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – Гомель : БелГУТ, 2003. – 367 с.
4. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н. В. Сметанкина. – Харьков : Миськдрук, 2011. – 376 с.
5. Smetankina N. V. Theoretical and experimental investigation of vibration of multilayer plates under the action of impulse and impact loads / N. V. Smetankina, S. Yu. Sotrikhin, A. N. Shupikov // International Journal of Solids and Structures. – 1995. – Vol. 32, Issues 8-9. – P. 1247-1258. doi.org/10.1016/0020-7683(94)00132-G
6. Shupikov A. N. Vibrations of multilayer plates under the effect of impulse loads. Three-dimensional theory / A. N. Shupikov, S. V. Ugrimov // International Journal of Solids and Structures. – 1999. – Vol. 36, Issues 22. – P. 3391-3402. doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00156-5
7. Воронай А. В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин / А. В. Воронай. – Харьков : Лидер, 2018. – 214 с.
8. Янютин Е. Г. Задачи импульсного деформирования

элементов конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский, А. В. Воронай, А. С. Шарпата. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.

9. Янютин Е. Г. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. В 2-х частях / Е. Г. Янютин, А. В. Воронай, С. И. Поваляев, И. В. Янчевский. – Харьков : ХНАДУ, 2010. – 212 с.

10. Янютин Е. Г. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины / Е. Г. Янютин, А. В. Воронай // Прикладная механика. – 2003. – Т.3, № 10. – С. 97-102.

11. Yanutin E. G. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads / E. G. Yanutin., A. V. Voropay // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41, Issues 18-19. – P. 4919-4926. doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00156-5

12. Ольшанський В. П. Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХП». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2017. – № 6 (1228). – С. 86–94.

13. Ольшанський В. П. Коливання квадратично нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка і міцність машин. – 2017. – № 39 (1261). – С. 62-67.

14. Танченко А. Ю. Дослідження субгармонічних режимів коливань на прикладі системи з двома ступенями свободи при імпульсному навантаженні / А. Ю. Танченко // Вісник НТУ «ХП». Серія : Динаміка і міцність машин. – 2018. – № 38 (2018). – С. 49–56. doi.org/10.20998/2078-9130.2018.38.152481

15. Corless R. M. On the Lambert W function / R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare et al. // Adv. Comput. Math. – 1996. – Vol. 5., Issue 1. – P. 329–359.

16. Fariel Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy / S. Fariel // IMA Journal of Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 72. – P. 785–800. doi.org/10.1093/imat/hxm039

17. Cveticanin L. Oscillator with strong quadratic damping force / L. Cveticanin // Publication of the Mathematical Institute. – 2009. – Vol. 85, Issue 99. – P. 119-130. doi.org/10.2298/PIM0999119C

18. Cveticanin L. Strong nonlinear oscillators. Analytical solution. 2 nd edition / L. Cveticanin. – Springer : Cham, 2018. – 317 p. doi.org/10.1007/978-3-319-58826-1

19. Ольшанський В. П. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів / В. П. Ольшанський, М. В. Сліпченко, О. І. Сполник, В. В. Бурлака. – Харків : Місдрук, 2020. – 268 с.

20. Ольшанський В. П. Функція Ламберта в задачах балістики матеріальної точки / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський. – Харьков : Савчук А. О., 2013. – 204 с.

21. Ольшанський В. П. Про апроксимацію функції Ламберта / В. П. Ольшанський // Вісник НТУ «ХП». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2020. – № 1 (1355). – С. 64–68. doi.org/10.20998/2222-0631.2020.1.09

22. Дягель Р. В. О нелинейной вязкоупругой модели коллинеарного удара Ханта-Кросли / Р. В. Дягель, В. В. Лапишин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 5. – С. 164–173.

23. Боровин Г. К. Обобщенная модель удара Герца-Ханта-Кросли / Г. К. Боровин, В. В. Лапишин // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2018. – № 6. – С. 18–30. doi.org/10.18698/1812-3368-2018-6-18-30

24. Боровин Г. К. Нелинейная вязкоупругая модель коллинеарного удара / Г. К. Боровин, Р. В. Дягель, В. В. Лапишин // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. – Москва : ИПМ, 2008. – № 53. – 18 с.

#### References (transliterated)

1. Golovko G.K., Lugovoj P.Z., Mejsh V.F. *Dinamika neodnorodnyh obolochek* [Dynamics of inhomogeneous shells]. Kiev, Izd-vo poligraficheskij centr «Kievskij universitet», 2012. 541 p.

2. Lugovoj P.Z., Mejsh V.F., Shtangel Je.F. *Nestacionarnaja dinamika neodnorodnyh obolocheknyh konstrukcij* [Non-stationary dynamics of inhomogeneous shell structures]. Kiev, Izd-vo

poligraficheskij centr «Kievskij universitet», 2005. 536 p.

3. Starovojtov E. I., Jarovaja A. V., Leonenko D. V. *Lokalnye i impulsnye nagruženija trehslojnyh elementov konstrukcij* [Local and impulse loading of three-layer structural elements]. Gomel, BelGUT, 2003. 367 p.

4. Smetankina N. V. *Nestacionarnoe deformirovanie, termouprugost i optimizacija mnogoslojnyh plastin i cilindricheskikh obolochek* [Non-stationary deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells]. Kharkov, Miskdruk Publ., 2011. 376 p.

5. Smetankina N. V., Sotrikhin S. Yu., Shupikov A. N. Theoretical and experimental investigation of vibration of multilayer plates under the action of impulse and impact loads. *International Journal of Solids and Structures*. 1995, Vol. 32, Issue 8-9, pp. 1247-1258. doi.org/10.1016/0020-7683(94)00132-G

6. Shupikov A. N., Ugrimov S. V. Vibrations of multilayer plates under the effect of impulse loads. Three-dimensional theory. *International Journal of Solids and Structures*. 1999, Vol. 36, Issues 22, pp. 3391-3402. doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00156-5

7. Voropaj A. V. *Integralnye uravnenija Volterra v nekorrektnykh zadachah nestacionarnogo deformirovanija plastin* [Volterra integral equations in ill-posed problems of unsteady deformation of plates]. Kharkov, Lider Publ., 2018. 214 p.

8. Janjutin E. G., Janchevskij I. V., Voropaj A. V., Sharapata A. S. *Zadachi impulsno deformirovanija elementov konstrukcij* [Problems of impulse deformation of structural elements]. Kharkov, KhNADU Publ., 2004. 392 p.

9. Janjutin E. G., Voropaj A. V., Povaljaev S. I., Janchevskij I. V. *Identifikacija nagruzok pri impulsnom deformirovanii tel. V 2-h chastjah* [Identification of loads during impulse deformation of bodies. In 2 parts]. Kharkov, KhNADU Publ., 2010. 212 p.

10. Janjutin E. G., Voropaj A. V. Identifikacija impulsno nagruženija uprugoj prjamougolnoj plastiny [Identification of impulse loading of an elastic rectangular plate]. *Prikladnaja mehanika* [Applied mechanics]. 2003, Vol.3, No 10, pp. 97-102.

11. Yanutin E. G., Voropaj A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. *International Journal of Solids and Structures*. 2004, Vol. 41, Issues 18-19, pp. 4919-4926. doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00156-5

12. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya kubichno nelinejnogo oscylyatora, sprychyneni impulsnym navantazhenniam [Cubic oscillations of a nonlinear oscillator caused by a pulse load]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychnye modelyuvannya v tehnici ta tehnologiyah* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2017, No 6 (1228), pp. 86-94.

13. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. Kolyvannya kvadratychno nelinejnogo oscylyatora, sprychyneni impulsnym navantazhenniam [Oscillations of a quadratically nonlinear oscillator caused by a pulse load]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist mashyn* [Bulletin of NTU "Khpi". Series: Dynamics and strength of machines]. 2017, No 39 (1261), pp. 62–67.

14. Tanchenko A. Yu. Doslidzhennia subharmonychnykh rezhymiv kolyvan na przykladi systemy z dvoma stupeniami svobody pry impulsnomu navantazheni [Investigation of subharmonic modes of oscillations on the example of a system with two degrees of freedom under pulse loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Dynamika i mitsnist mashyn* [Bulletin of NTU "Khpi". Series: Dynamics and strength of machines]. 2018, No 38 (2018), pp. 49-56. doi.org/10.20998/2078-9130.2018.38.152481

15. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare E.G. et al. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.* 1996, Vol. 5, Issue 1, pp. 329–359.

16. Fariel Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2007, Vol. 72, pp. 785–800. doi.org/10.1093/imat/hxm039

17. Cveticanin L. Oscillator with strong quadratic damping force. *Publication of the Mathematical Institute*. 2009, Vol. 85, Issue 99, pp. 119-130. doi.org/10.2298/PIM0999119C

18. Cveticanin L. *Strong nonlinear oscillators. Analytical solution. 2 nd edition*. Springer, Cham, 2018. 317 p. doi.org/10.1007/978-3-319-58826-1

19. Olshanskiy V. P., Slipchenko M.V., Spolnik O.I., Burlaka V.V. *Nelinijni kolyvannya dysypatyvnyh oscylyatoriv*

[Nonlinear oscillations of dissipative oscillators]. Kharkiv, Miskdruk Publ., 2020. 268 p.

20. Olshanskij V. P., Olshanskij S. V. *Funkcija Lamberta v zadachah ballistiki materialnoj točki* [Lambert function in material point ballistics problems]. Kharkov, Savchuk A.O. Publ., 2013, 204 p.

21. Olshanskij V. P. Pro aproksimaciju funkcii Lamberta [About approximation of the Lambert function]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya: *Matematychni modelyuvannya v tehnicji ta tehnologiyah* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2020, No 1 (1355), pp. 64-68. doi.org/10.20998/2222-0631.2020.1.09

22. Djagel R. V., Lapshin V. V. O nelinejnoj vjzakuprugoj modeli kollinearnogo udara Hanta-Krosli [On the nonlinear viscoelastic model of the Hunt-Crosley collinear impact]. *Izvestija*

*RAN. Mehanika tverdogo tela* [RAS proceedings. Rigid body mechanics]. 2011, No 5, pp. 164-173.

23. Borovin G. K., Lapshin V. V. Obobshhennaja model udara Gerca-Hanta-Krossli [Generalized Hertz-Hunt-Crosley impact model]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Serija: Estestvennye nauki* [Bulletin of MGTU named after N.E. Bauman. Series: Natural sciences]. 2018, No 6, pp. 18-30. doi.org/10.18698/1812/-3368-2018-6-18-30

24. Borovin G. K., Djagel R. V., Lapshin V. V. Nelinejnaja vjzakuprugaja model kollinearnogo udara [Nonlinear viscoelastic collinear impact model]. *Preprint IPM im. M. V. Keldysha* [Preprint IAM named after M. V. Keldysh]. Moscow, IPM. 2008, No 53, 18 p.

*Надійшла (received) 24.05.2021*

#### *Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанський Василь Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, професор кафедри фізики і теоретичної механіки; тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com; ORCID: 0000-0003-1407-4476

**Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанський Станіслав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich)** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, доцент кафедри фізики і теоретичної механіки; тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7376-7550

**Сліпченко Максим Володимирович (Сліпченко Максим Владимирович, Slipchenko Maksym Volodymyrovych)** – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка; виконуючий обов'язки завідувача кафедри фізики і теоретичної механіки; тел. (066) 712-09-89. E-mail: Slipchenko1982@gmail.com; ORCID:0000-0002-9728-661X