

***В.Б. УСПЕНСКИЙ, М.В. НЕКРАСОВА***

**РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР КОНФИГУРАЦИИ ГИРОСКОПИЧНЫХ ВИМІРЮВАЧІВ  
ДЛЯ БЕСПЛАТФОРМНЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ  
ВИСОКОДИНАМИЧНЫХ ОБЪЕКТОВ**

Розглядається проблема поширення області ефективного використання безплатформних інерціальних навігаційних систем на клас високодинамічних об'єктів. Для забезпечення ефективного керування рухом висуваються високі вимоги до точності визначення кутів орієнтації та координат об'єкту, задовольнити яким можливо тільки за умов використання в БІНС високотехнологічних прецизійних гіроскопів та акселерометрів. Також використання БІНС обмежується можливою динамікою об'єкту. Розв'язання цієї проблеми ґрунтується на можливості врахування умов майбутньої експлуатації БІНС за рахунок раціонального вибору розміщення або конфігурації осей чутливості гіроскопів. Такий вибір здатен знизити вимоги до вимірювального діапазону блоку вимірювачів при збереженні функціональності у складі безплатформної інерціальної навігаційної системи в цілому. Саме з цією метою в роботі пропонується спеціальним чином розмістити гіроскопи відносно приладової системи координат. Таке розміщення дозволяє використовувати гіроскопи із відносно невеликим робочим діапазоном для вимірювання значної кутової швидкості обертання об'єкту. Вибір такої конфігурації реалізується через розв'язання певної оптимізаційної задачі з обмеженнями. У загальному випадку така задача розв'язується чисельно, а в окремих випадках можливе аналітичне розв'язання. Додатковою перевагою описаної в роботі оптимальної конфігурації є підвищення точності БІНС за рахунок зменшення впливу похибки масштабного коефіцієнту гіроскопів. Отримане рішення використовується на практиці у ході проектування та створення спеціалізованої БІНС.

**Ключові слова:** високодинамічний об'єкт, БІНС, гіроскоп, конфігурація осей чутливості, оптимізація, вимірювальний діапазон, обертання, висока кутова динаміка, навігаційні параметри, керування рухом, кути орієнтації, похибка.

***В.Б. УСПЕНСКИЙ, М.В. НЕКРАСОВА***

**РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР КОНФИГУРАЦИИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ  
ДЛЯ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ  
ВИСОКОДИНАМИЧНЫХ ОБЪЕКТОВ**

Рассматривается проблема расширения области эффективного применения бесплатформенных инерциальных навигационных систем на класс высокодинамичных объектов. Для обеспечения эффективного управления движением выдвигаются высокие требования к точности определения углов ориентации и координат объекта, удовлетворить которым можно лишь при условиях использования в БИНС высокотехнологичных прецизионных гироскопов и акселерометров. Также использование БИНС ограничивается возможной динамикой объекта. Решение этой проблемы базируется на возможности учета условий будущей эксплуатации БИНС за счет рационального выбора размещения или конфигурации осей чувствительности гироскопов. Такой выбор дает возможность снизить требования к измерительному диапазону блока измерителей при сохранении функциональности в составе бесплатформенной инерциальной навигационной системы в целом. Именно с этой целью в работе предлагается специальным образом расположить гироскопы относительно приборной системы координат. Такое размещение позволяет использовать гироскопы с относительно небольшим рабочим диапазоном для измерения значительной угловой скорости вращения объекта. Выбор такой конфигурации реализуется путем решения определенной оптимизационной задачи с ограничениями. В общем случае такая задача решается численно, а в отдельных случаях возможно аналитическое решение. Дополнительным преимуществом описанной в работе оптимальной конфигурации является повышение точности БИНС за счет уменьшения влияния ошибки масштабного коэффициента гироскопов. Полученное решение применяется на практике в ходе проектирования и создания специализированной БИНС.

**Ключевые слова:** высокодинамичный объект, БИНС, гироскоп, конфигурация осей чувствительности, оптимизация, измерительный диапазон, вращение, высокая угловая динамика, навигационные параметры, управление движением, углы ориентации, погрешность.

***V. USPENSKIY, M. NEKRASOVA***

**RATIONAL CHOICE OF CONFIGURATION OF HYROSCOPIC MEASURERS FOR FREE-SHAPED  
INERTIAL NAVIGATION SYSTEMS OF HIGH DYNAMIC OBJECTS**

The problem of extending the field of effective use of strapdown inertial navigation systems to the class of highly dynamic objects is considered. To ensure effective motion control, high requirements are put forward for the accuracy of determining the orientation angles and coordinates of an object, which can only be satisfied if high-tech precision gyroscopes and accelerometers are used in SINS. Also, the use of SINS is limited by the possible dynamics of the object. The solution to this problem is based on the possibility of taking into account the conditions of the future operation of the SINS due to the rational choice of the placement or configuration of the gyroscopes' sensitivity axes. This choice makes it possible to reduce the requirements for the measuring range of the meter unit while maintaining functionality as part of the strapdown inertial navigation system as a whole. For this purpose, it is proposed to place

gyroscopes in a special way relative coordinate system of the instrument. This arrangement allows to use gyroscopes with a relatively small operating range to measure a significant object rotation speed. The choice of such a configuration is realized through the solution of an certain optimization problem with constraints. In the general case, the problem is solved numerically, and in some cases, an analytical solution is possible. An additional advantage of the optimal configuration is the increase in the accuracy of the SINS by reducing the effect of the error of the scale factor of gyroscopes. The resulting solution is applied in practice during the design and creation of a specialized SINS.

**Keywords:** high-dynamic object, SINS, gyroscope, configuration of sensitivity axes, optimization, measuring range, rotation, high angular dynamics, navigation parameters, motion control, orientation angles, error.

**Вступ.** Керування рухом, безумовно, було і залишається чинником, що визначає ефективність, надійність та безпеку експлуатації усілякого транспортного засобу (ТЗ). Для реалізації адекватного керування необхідна поточна інформація стосовно орієнтації ТЗ у просторі, його швидкості та координат, або місцезнаходження відносно інших об'єктів. Зазвичай така інформація виробляється бортовим навігаційним обладнанням, яке розрізняється можливостями, складом параметрів, що передаються користувачу; технічними та експлуатаційними характеристиками та, звісно, вартістю.

Серед навігаційних приладів особливе місце займають безплатформні інерціальні навігаційні системи (БІНС) [1], які складаються із блоку гіроскопічних вимірювачів параметрів обертання, блоку акселерометричних вимірювачів прискорення та обчислювача, в якому в режимі реального часу за спеціальними алгоритмами [2, 3] оброблюються оцифровані виміри гіроскопів (ГС) та акселерометрів (АК) та формуються вихідні параметри системи.

Ключовою характеристикою БІНС є точність кутів орієнтації та координат об'єкту, що виробляються системою. Для забезпечення ефективного керування рухом висуваються високі вимоги до такої точності, задовольнити яким можливо тільки за умов використання в БІНС високотехнологічних прецизійних ГС та АК, можливість придбання яких край обмежена. Тому, зазвичай, БІНС використовуються тільки на рухомих об'єктах, для яких функція навігації є критичною, тобто від якої залежить безпека та ефективність всього функціонування ТЗ. Саме такими є будь-які пілотовані літальні апарати (ЛА), підводні човни, ракетноносії, безпілотні засоби спеціального призначення. В останньому разі використання БІНС обмежується можливою динамікою об'єкту. Так, якщо об'єкт здійснює обертання із великою кутковою швидкістю, яка може виходити за вимірювальний діапазон гіроскопу, використання БІНС для обчислення навігаційних параметрів стає неможливим.

Таким чином, в статті розглядається проблема розширення галузі ефективного застосування гіроскопічних БІНС в умовах руху з високою кутковою динамікою. Базова гіпотеза для часткового розв'язання цієї проблеми ґрунтується на можливості врахувати умови майбутньої експлуатації БІНС за рахунок раціонального вибору розміщення, або конфігурації, осей чутливості ГС. Такий вибір здатен знизити вимоги до вимірювального діапазону блоку вимірювачів при збереженні функціональності у складі БІНС в цілому. Отримане рішення використовується далі у ході проектування та створення спеціалізованої БІНС.

**Аналіз останніх досліджень та літератури.** Розглянемо проблему раціонального вибору конфігурації вимірювачів в БІНС з точки зору її висвітлення у літературі.

Проблема раціонального вибору конфігурації осей чутливості для надлишкових систем вимірювачів добре відома ще з минулого сторіччя. Спочатку вона розглядалася для БІНС штучних супутників Землі [4, 5] та стосувалася мінімально-надлишкових систем, а зараз, переважно, для безпілотних ЛА [6, 7] в умовах суттєвої надлишковості ГС та АК, у якості яких використовуються мікроелектромеханічні системи.

Переважна більшість робіт у цьому напрямку пов'язана із розв'язанням задачі відмовостійкості БІНС [8, 9] та стосується вибору такої конфігурації надлишкової кількості гіроскопів та акселерометрів, яка б забезпечила виявлення, локалізацію та компенсацію тих чи інших відмов. Відповідно із загальною теорією діагностики в технічних системах [10] необхідною умовою розв'язання такої задачі є надлишковість компонент одного типу. Зазвичай, в цих умовах виникає задача раціонального розміщення осей чутливості вимірювачів, оскільки «надлишковість» завжди супроводжується «неоднозначністю вибору». Такий вибір для різного числа вимірювачів в [11-13] реалізується, виходячи з оптимізації матриці перетворення вимірів до приладової системи координат, із врахуванням спостережності відмов окремих датчиків та простоти конфігурації.

У даному дослідженні розглядається не абстрактна «універсальна» БІНС, а така, що призначена для об'єкта, що здійснює у процесі польоту перманентне швидке обертання навколо, скажімо, поздовжньої осі. Нагадаємо, що будь-який гіроскоп, як вимірювач, характеризується певним, так званим, робочим діапазоном для вхідної змінної, поза якого виміри не будуть вірними. Таким чином, якщо вісь чутливості ГС розмістити уздовж цієї осі, робочого діапазону ГС може бути недостатньо, щоб адекватно виміряти таку швидкість. Але трійку гіроскопів можна розмістити таким чином, що проекції поздовжньої швидкості обертання на їх осі чутливості були значно меншими, при цьому просторове розміщення осей дасть змогу вимірювати тривимірний вектор повної куткової швидкості.

**Мета статті.** Таким чином, на відміну від вище розглянутої відмовостійкості, у якості критерію вибору конфігурації ГС пропонується узгодження робочого діапазону ГС із максимально можливими характеристиками обертання об'єкта за умов досить адекват-

ного виміру повного вектору кутової швидкості. Розв'язання такої задачі відкриває можливість використання в БІНС гіроскопів із обмеженим робочим діапазоном для навігації та керуванні рухом об'єктів з високою кутовою динамікою.

**Постановка проблеми.** Розглядається ЛА, який в ході польоту може здійснювати обертання навколо свого центру мас. При цьому максимально можлива швидкість обертання суттєво різна у різних напрямках відносно системи координат (СК), пов'язаної із об'єктом. В цих умовах треба розробити обґрунтовану методику раціонального вибору конфігурації осей чутливості трьох ГС для спеціалізованої бортової БІНС. Прикладом такого ЛА може бути автоматично керований снаряд, який здійснює швидке обертання відносно поздовжньої осі.

Розв'язання цієї задачі шукатимемо серед конфігурацій довільного типу, тобто не обов'язково із взаємно ортогональним розташуванням осей трьох ГС.

Нехай приладова СК (ПСК), асоційована з БІНС, співпадає за напрямками осей із пов'язаною з об'єктом СК та має осі  $X, Y, Z$ . Задамо в ПСК розташування осей чутливості (ОЧ)  $\bar{v}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $i$ -го гіроскопу за допомогою двох кутів  $\alpha_i \in [0, 2\pi)$  та  $\gamma_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , як на рис. 1.

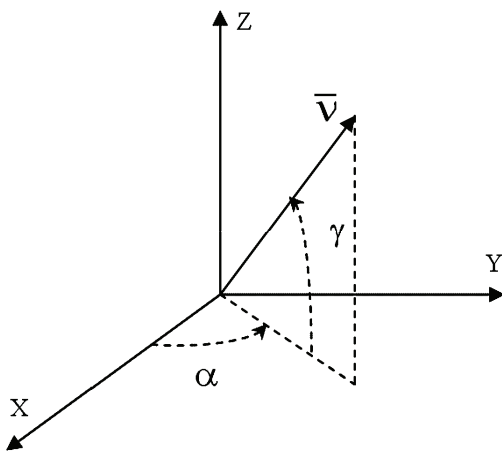


Рисунок 1 – Розташування осей чутливості гіроскопу відносно осей ПСК

Нехай допустима кутова швидкість обертання ЛА становить множину векторів  $\bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , що задається нерівностями із задалегідь відомими межами

$$\begin{aligned} \omega_x^- &\leq \omega_x \leq \omega_x^+; \\ \omega_y^- &\leq \omega_y \leq \omega_y^+; \\ \omega_z^- &\leq \omega_z \leq \omega_z^+. \end{aligned} \quad (1)$$

В цих умовах потрібно вибрати таку конфігурацію ОЧ трійки ГС, яка забезпечить найкраще вимірювання будь-якої допустимої швидкості.

Оскільки розташування ГС відносно ПСК може бути не єдиним, задачу вибору конфігурації доречно

сформулювати як оптимізаційну.

В цих умовах приймемо, що необхідно визначити значення кутів  $\alpha_i, \gamma_i, i = \overline{1, 3}$  для оптимального розташування ГС. У якості критерію оптимальності використовуємо довжину робочого діапазону гіроскопів, який є достатнім для вимірювання довільного вектору  $\bar{\omega}$  з урахуванням (1), а під його оптимізацією розуміється мінімізація довжини діапазону.

Відмітимо, що додатковою необхідною умовою розташування ОЧ гіроскопів є їхня просторова (3D) конфігурація, тобто таке розміщення, що дозволить відновлювати вектор кутової швидкості зі всієї допустимої множини у проєкціях на осі ПСК за вимірами трьох ГС.

Таким чином, задача вибору конфігурації ГС спеціалізованої БІНС сформульовано як задачу пошуку екстремуму деякої функції на множині кутів  $\alpha_i, \gamma_i, i = \overline{1, 3}$  за умов певних обмежень.

**Матеріали досліджень.** Ідеальні, тобто без похибок та шуму, виміри гіроскопів  $\Omega_i, i = \overline{1, 3}$ , ОЧ яких розташовані, як на рис. 1, мають вигляд

$$\Omega_i = \omega_x \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i + \omega_y \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i + \omega_z \cdot \sin \gamma_i, \quad (2)$$

де  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – фактичні значення проєкцій в ПСК вектора кутової швидкості об'єкту, або у векторній формі

$$\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cdot \cos \gamma_1 & \sin \alpha_1 \cdot \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 \cdot \cos \gamma_2 & \sin \alpha_2 \cdot \cos \gamma_2 & \sin \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 \cdot \cos \gamma_3 & \sin \alpha_3 \cdot \cos \gamma_3 & \sin \gamma_3 \end{pmatrix} \cdot \bar{\omega}. \quad (3)$$

Звідси істотним чином витікає алгоритм відновлення вектору кутової швидкості в ПСК

$$\hat{\omega} = \frac{W^*}{\Delta} \bar{\Omega},$$

в якому  $W^*$  – матриця алгебраїчних доповнень матриці системи (3),  $\Delta$  – визначник матриці системи (3), причому його значення залежить від кутів установки ОЧ наступним чином:

$$\begin{aligned} \Delta = & \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \cdot \sin \gamma_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_3 \cdot \\ & \cdot \sin \gamma_2 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \sin \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \cdot \cos \gamma_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (4)$$

**Результати досліджень.** Зробимо оцінку робочого діапазону гіроскопів, необхідного для адекватного вимірювання кутової швидкості  $\bar{\omega}$ . Для цього треба знайти мінімум та максимум в (2) для  $\Omega_i$  відносно  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , які задовольняють нерівностям (1). Лінійна залежність  $\Omega_i$  від  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  дає рішення на межі області визначення змінних. Тобто верхня та нижня межа необхідного вимірювального (робочого) діапазону гіроскопів визначаються наступними співвідношеннями

$$\Omega_i^{\max} = (\tilde{\omega}_x \cdot \cos \alpha_i + \tilde{\omega}_y \cdot \sin \alpha_i) \cos \gamma_i + \tilde{\omega}_z \cdot \sin \gamma_i, \quad (5)$$

де  $\tilde{\omega}_x = \begin{cases} \omega_x^+, & \text{якщо } \cos \alpha_i \geq 0, \\ \omega_x^-, & \text{інакше;} \end{cases}$

$$\tilde{\omega}_y = \begin{cases} \omega_y^+, & \text{якщо } \sin \alpha_i \geq 0, \\ \omega_y^-, & \text{інакше;} \end{cases}$$

$$\tilde{\omega}_z = \begin{cases} \omega_z^+, & \text{якщо } \sin \gamma_i \geq 0, \\ \omega_z^- & \text{інакше.} \end{cases}$$

$$\Omega_i^{\min} = (\tilde{\omega}_x \cdot \cos \alpha_i + \tilde{\omega}_y \cdot \sin \alpha_i) \cos \gamma_i + \tilde{\omega}_z \cdot \sin \gamma_i, \quad (6)$$

$$\text{де } \tilde{\omega}_x = \begin{cases} \omega_x^-, & \text{якщо } \cos \alpha_i \geq 0, \\ \omega_x^+ & \text{інакше;} \end{cases}$$

$$\tilde{\omega}_y = \begin{cases} \omega_y^-, & \text{якщо } \sin \alpha_i \geq 0, \\ \omega_y^+ & \text{інакше;} \end{cases}$$

$$\tilde{\omega}_z = \begin{cases} \omega_z^-, & \text{якщо } \sin \gamma_i \geq 0, \\ \omega_z^+ & \text{інакше.} \end{cases}$$

**Формулювання оптимізаційної задачі.** Задачу вибору кутів орієнтації ОЧ сформулюємо, як задачу знаходження екстремуму,

$$\min_{\alpha_i, \gamma_i, i=1,3} \max \{ \Omega_1^*(\alpha_1, \gamma_1); \Omega_2^*(\alpha_2, \gamma_2); \Omega_3^*(\alpha_3, \gamma_3) \} \quad (7)$$

з обмеженням у вигляді нерівності

$$|\Delta(\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2, \alpha_3, \gamma_3)| \geq \Delta^*, \quad (8)$$

де  $\Omega_i^* = \max(|\Omega_i^{\min}|, |\Omega_i^{\max}|)$  – максимальне за абсолютною величиною значення меж робочого діапазону. Якщо множина векторів допустимої кутової швидкості  $\tilde{\omega}$  симетрична відносно початку системи координат, то буде спрощення до вигляду  $\Omega_i^* = \Omega_i^{\max}$ ;  $\Delta(\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2, \alpha_3, \gamma_3)$  – залежність від кутів установки ОЧ визначника матриці перетворення від ПСК до вимірювальних осей (формула (4));  $\Delta^* > 0$  – задане граничне значення визначника. Виконання нерівності (8) гарантує невиродженість матриці перетворення та, відповідно, реалізацію вимірювальною системою якості 3D структури.

### Обговорення задачі та її розв'язання.

1) Сформульована оптимізаційна задача забезпечує мінімізацію розміру робочого діапазону гіроскопів при збереженні їх 3D конфігурації, що дозволяє використовувати гіроскопи з невеликим робочим діапазоном, але високої чутливості, для вимірювання достатньо великих швидкостей обертання. Крім того, безперечно позитивним є той факт, що кожен гіроскоп в оптимальній конфігурації вимірюватиме значно меншу швидкість, чим у разі стандартного розташування вздовж осей ПСК. Це приводить до того, що похибка масштабного коефіцієнту перетворення сигналу в ГС матиме пропорційно менший вплив на сукупну похибку вимірювання. Звідси можна казати про підвищення точності БНС у цілому за названих умов.

2) Обмеження знизу величини визначника матриці перетворення забезпечує можливість адекватного відновлення швидкості в осях ПСК за вимірами гіроскопів.

3) Задачу вибору конфігурації можна переформулювати наступним чином: треба максимізувати визначник матриці перетворення при обмеженій зверху довжині робочого діапазону гіроскопів  $\Omega^{**}$ . У цьому разі задача (7) та обмеження (8) міняються місцями, тобто

$$\max_{\alpha_i, \gamma_i} |\Delta(\alpha_1, \gamma_1, \alpha_2, \gamma_2, \alpha_3, \gamma_3)|$$

при обмеженні

$$\max \{ \Omega_1^*(\alpha_1, \gamma_1); \Omega_2^*(\alpha_2, \gamma_2); \Omega_3^*(\alpha_3, \gamma_3) \} \leq \Omega^{**}.$$

4) У загальному випадку розв'язання задачі (7), (8) можливе тільки за допомогою чисельних методів. Завдяки складній залежності цільової функції від кутів установки ОЧ ймовірна наявність безлічі локальних екстремумів. Тому у якості методу відшукування початкового наближення доречно використовувати генетичний алгоритм. Але в окремих випадках можливий і аналітичний розв'язок такої оптимізаційної задачі.

5) Слід зауважити, що в результаті розв'язання задачі ми отримаємо досить вільну схему розташування ОЧ ГС. Між тим відомо, що кожен примірник системи після виготовлення потребує особистого налаштування, або юстирування, метою якого є точне визначення фактичного напрямку ОЧ відносно ПСК. Юстирування при довільному розташуванні ОЧ ГС може скласти певну проблему, тому що, зазвичай, ОЧ майже співпадають із осями ПСК та, відповідно, з осями обертання експериментального поворотного стенду, на якому в ході калібрування проводиться те саме юстирування. В цих умовах є потреба використовувати нестандартну експериментальну методику калібрування, зорієнтовану саме на довільне розташування ОЧ. Така методика для загального випадку була розроблена раніше та висвітлена в [14].

**Приклад аналітичного розв'язку.** Нехай область допустимого обертання об'єкту визначається нерівностями  $|\omega_x| \leq \sigma, |\omega_y| \leq \sigma, |\omega_z| \leq k \cdot \sigma, k \gg 1$ . Тобто у ході польоту ЛА може обертатися навколо свого центру мас з кутовою швидкістю, яка характеризується вектором, що належить паралелепіпеду (рис. 2). Та нехай  $\Delta^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$  – задана межа для визначника матриці перетворення.

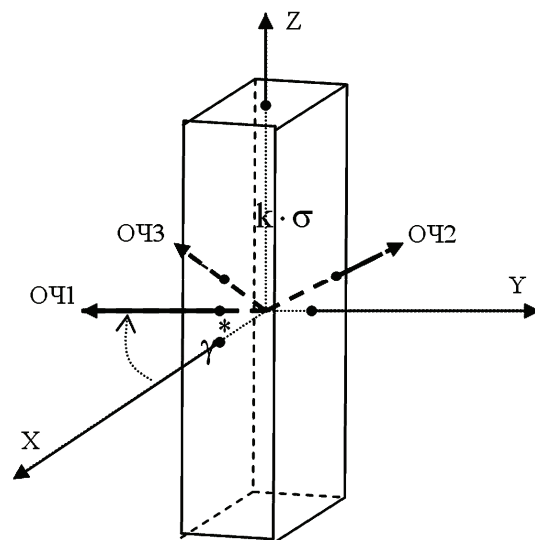


Рисунок 2 – Область допустимої варіації вектору кутової швидкості (паралелепіпед) та оптимальне розташування осей чутливості ОЧ

В цьому випадку задача (7), (8) приймає вигляд

$$\min_{\alpha_i, \gamma_i, i=1,3} \max \left\{ \begin{array}{l} |\cos \alpha_1| + |\sin \alpha_1| \cos \gamma_1 + k \cdot |\sin \gamma_1|; \\ |\cos \alpha_2| + |\sin \alpha_2| \cos \gamma_2 + k \cdot |\sin \gamma_2|; \\ |\cos \alpha_3| + |\sin \alpha_3| \cos \gamma_3 + k \cdot |\sin \gamma_3| \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$|\cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \cdot \sin \gamma_3 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) - \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_3 \cdot \sin \gamma_2 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \sin \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \cdot \cos \gamma_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2)| \geq \Delta^* \quad (10)$$

Така задача є ще занадто складною для аналітичного розв'язання. Спростимо її за рахунок нав'язування деякого зв'язку між змінними.

Будемо вважати, що

$$\alpha_1 = \alpha \leq \frac{2}{3}\pi, \alpha_2 = \alpha + \frac{2}{3}\pi, \alpha_3 = \alpha + \frac{4}{3}\pi,$$

а також  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma > 0$ . В цьому випадку (9), (10) приймають вигляд

$$\min_{\alpha, \gamma} \max \left\{ \begin{array}{l} |\cos \alpha| + |\sin \alpha| \cos \gamma + k \cdot \sin \gamma; \\ |\cos(\alpha + \frac{2}{3}\pi)| + |\sin(\alpha + \frac{2}{3}\pi)| \cos \gamma + k \cdot \sin \gamma; \\ |\cos(\alpha + \frac{4}{3}\pi)| + |\sin(\alpha + \frac{4}{3}\pi)| \cos \gamma + k \cdot \sin \gamma; \\ \cos^2 \gamma \cdot \sin \gamma \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Delta^* = \frac{1}{3}. \end{array} \right\}$$

З останньої нерівності витікає, що  $0,4 < \sin \gamma < 0,7$ .

Оскільки  $k \gg 1$ , складові, що містять  $\cos \gamma$ , не мають суттєвого впливу на величину цільової функції. Тому у якості рішення можна прийняти кут  $\gamma^* = \arcsin 0,4 \approx 0,4$  рад., кут  $\alpha$  – довільний.

Таким чином, в умовах, що розглядаються, робочий діапазон гіроскопа можна зменшити у 2,5 рази порівняно з традиційним розташуванням ОЧ вздовж осей ПСК. Ще більш суттєвого зменшення діапазону можливо домогтися, якщо послабити вимогу для визначника матриці, зменшивши параметр  $\Delta^*$ .

Щоб завершити приклад, розглянемо задачу для фіксованого значення кута  $\alpha$ , скажімо, при  $\alpha = 0$ . Тоді цільова функція прийме вигляд

$$\min_{\gamma} \max \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma + k \cdot \sin \gamma; \\ \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cos \gamma + k \cdot \sin \gamma; \\ \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cos \gamma + k \cdot \sin \gamma. \end{array} \right\} =$$

$$= \min_{0,4 < \sin \gamma < 0,7} \left\{ \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cos \gamma + k \cdot \sin \gamma \right\}.$$

Єдиний «істинний» максимум цільової функції (без врахування обмежень на область визначення змінної) досягається у точці  $\gamma^{**} = \arctg \frac{k}{1,87}$  та при

$k > 1,83$  отримуємо  $\sin \gamma^{**} > 0,7$ . Звідси виходить, що при  $k > 1,83$  мінімум функції в області допустимої

варіації швидкості досягається на межі, тобто при  $\gamma^* \approx 0,4$ , що підтверджує отриманий вище результат. Осі чутливості ГС в цих умовах будуть рівномірно розташовані на поверхні конуса з вершиною в початку ПСК та кутом при вершині  $(\pi - 2 \cdot \gamma^*)$  (див. рис.2).

**Висновки.** Розроблена та обґрунтована методика оптимального вибору конфігурації трійки одноосних вимірювачів кутової швидкості для умов не симетрії множини допустимих куткових швидкостей об'єкту. Методика у загальному випадку зводить вибір до задачі на пошук екстремуму в умовах обмежень у вигляді нерівності. Оптимізація конфігурації осей чутливості гіроскопів у загальному випадку може приводити до неортогональних схем розташування, для яких вказана раніше розроблена методика юстирування. Оптимальний вибір дозволяє, по-перше, використовувати гіроскопи з невеликим робочим діапазоном в спеціалізованих БНС для високодинамічних об'єктів; по-друге, зменшити похибку гіроскопічних вимірів від похибки масштабного коефіцієнту. Наведено приклад аналітичного розв'язання задачі та показана її вища ефективність у порівнянні із стандартною схемою. Таким чином, розроблена методика створює можливість для використання гіроскопічних БНС на об'єктах із швидким обертанням.

Викладені у статті результати у складі комплексної доповіді попередньо були обговорені на міжнародній конференції з інтегрованих навігаційних систем.

#### Список літератури

1. Матвеев В.В., Распопов В.Я. Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем : учебн. пособ. Санкт-Петербург: ОАО Концерн ЦНИИ «Электроприбор», 2009. 278 с.
2. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / Под ред. Б.С. Аleshina, К.К. Веремеенко, А.И. Черноморского. Москва: Физматлит, 2006. 424 с.
3. Успенский В.Б., Татарина О.А. Математические основы инерциальной навигации : учебн. пособ. Харьков: Изд-во "Підручник НТУ «ХПИ»", 2017. 192 с.
4. Водичева, Л.В. Повышение надежности и точности бесплатформенного инерциального измерительного блока при избыточном количестве измерений. Гироскопия и навигация. 1997. № 1. С. 55-67.
5. Плаксий Ю.А., Некрасова М.В. Концепция решения задачи определения ориентации в минимально-избыточной БНС. Сб. научн. тр. ХГПУ. Харьков: ХГПУ, 1999. Вып.7, ч. 1. С. 145-149.
6. Кулик А.С., Фирсов С.Н., До Куок Туан, Златкин О.Ю. Диагностирование бесплатформенной инерциальной системы беспилотного летательного аппарата с глубиной до места отказа. Радиотехника и компьютерные системы. 2008. № 1 (28). С. 75-81.
7. Паршин А.П., Немшилов Ю.А. Разработка измерительного блока системы ориентации БПЛА с неортогональным расположением чувствительных элементов. Современная техника и технологии. 2016. № 3. Режим доступа: <http://technology.snauka.ru/2016/03/9697>.
8. Водичева Л.В., Бельский Л.Н., Парышева Ю.В., Лыцов А.А. Инерциальные измерительные блоки перспективных изделий ракетно-космической техники: обеспечение отказоустойчивости. Вестник Самарского университета.

Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17, № 1. С. 28-44.

9. Kolyadin S., Bochkova E., Zhikhareva A., Uspensky V. Developing a fault-tolerant high precision strapdown ins using redundant medium-accuracy gyroscopes. 21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014.

10. Кулик А.С. Сигнально-параметрическое диагностирование систем управления. Харьков: Гос. аэрокосм. ун-т «ХАИ»; Бизнес-Информ, 2000. 260 с.

11. Yang C-K., Shim D-S. Best Sensor Configuration and Accommodation Rule Based on Navigation Performance for INS with Seven Inertial Sensors. *Sensors*. 2009. V. 9, iss. 11. P. 8456-8472. DOI: 10.3390/s91108456.

12. Lee W., Park C.G. Double Fault Detection of Cone-Shaped Redundant IMUs Using Wavelet Transformation and EPSA. *Sensors*. 2014. V. 14, iss. 2. P. 3428-3444. DOI: 10.3390/s140203428.

13. Кобылкин, Ю.И., Сосновский М.Ю. Об ориентации осей чувствительности датчиков избыточных бесплатформенных инерциальных систем. Научный вестник МГТУ ГА. 2013. № 198. С. 97-102.

14. Breslavsky D., Uspensky V., Kozlyuk A., Tatarinova O., Kuznyetsov Y. Estimation of heat field and temperature models of errors in fiber-optic gyroscopes used in aerospace systems. *Eastern European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. № 1. P. 44-53.

#### References (transliterated)

1. Matveev V.V., Raspopov V.Ja. Osnovy postroeniya besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem : uchebnoe posobie. Sankt-Peterburg: OAO Konzern CNII "Jelektropribor", 2009. 278 p.

2. Orientacija i navigacija podviznyh ob'ektov: sovremennye informacionnye tehnologii / Pod red. B.S. Aljoshina, K.K. Veremeenko, A.I. Chernomorskogo. Moscow: Fizmatlit, 2006. 424 p.

3. Uspensky, V.B., Tatarinova O.A. Matematicheskie osnovy inercial'noj navigacii : uchebn. posob. Kharkiv: Izd-vo Pidruchnik NTU "HPI", 2017. 192 p.

4. Vodicheva L.V. Povyshenie nadezhnosti i tochnosti besplatformennogo inercial'nogo izmeritel'nogo bloka pri izbytochnom kolichestve izmerenij. Girokopija i navigacija. 1997. № 1. P. 55-67.

5. Plaksij Ju.A., Nekrasova M.V. koncepcija reshenija zadachi opredelenija orientacii v minimal'no-izbytochnoj BINS. Sb. nauchn. tr. KhDPU. Kharkiv: KhDPU, 1999. Vol.7, ch. 1. P. 145-149.

6. Kulik A.S., Firsov S.N., Do Kuok Tuan, Zlatkin O.Ju. Diagnostirovanie besplatformennoj inercial'noj sistemy bespilotnogo letatel'nogo apparata s glubinoj do mesta otkaza. *Radioelektronni i komp'juterni sistemi*. 2008. № 1 (28). P. 75-81.

7. Parshin A.P., Nemshilov Ju.A. Razrabotka izmeritel'nogo bloka sistemy orientacii BPLA s neortogonal'nym raspolozheniem chuvstvitel'nyh jelementov. *Sovremennaja tehnika i tehnologii*. 2016. № 3. Available at: <http://technology.snauka.ru/2016/03/9697>.

8. Vodicheva L.V., Bel'skij L.N., Parysheva Ju.V., Lyscov A.A. Inercial'nye izmeritel'nye bloki perspektivnyh izdelij raketno-kosmicheskoy tehniki: obespechenie otkazoustojchivosti. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ajerokosmicheskaja tehnika, tehnologii i mashinostroenie*. 2018. Vol. 17, № 1. P. 28-44.

9. Kolyadin S., Bochkova E., Zhikhareva A., Uspensky V. Developing a fault-tolerant high precision strapdown ins using redundant medium-accuracy gyroscopes. 21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014.

10. Kulik A.S. Signal'no-parametricheskoe diagnostirovanie sistem upravlenija. Kharkiv: Gos. ajerokosm. un-t «KhAI»; Biznes-Inform, 2000. 260 p.

11. Yang C-K., Shim D-S. Best Sensor Configuration and Accommodation Rule Based on Navigation Performance for INS with Seven Inertial Sensors. *Sensors*. 2009. V. 9, iss. 11. P. 8456-8472. DOI: 10.3390/s91108456.

12. Lee W., Park C.G. Double Fault Detection of Cone-Shaped Redundant IMUs Using Wavelet Transformation and EPSA. *Sensors*. 2014. V. 14, iss. 2. P. 3428-3444. DOI: 10.3390/s140203428.

13. Kobylykin, Ju.I., Sosnovskij M.Ju. Ob orientacii oseej chuvstvitel'nosti datchikov izbytochnykh besplatformennyh inercial'nyh sistem. *Nauchnyj vestnik MGTU GA*. 2013. № 198. P. 97-102.

14. Breslavsky D., Uspensky V., Kozlyuk A., Tatarinova O., Kuznyetsov Y. Estimation of heat field and temperature models of errors in fiber-optic gyroscopes used in aerospace systems. *Eastern European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. № 1. P. 44-53.

Надійшла (received) 06.10.2020

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Успенський Валерій Борисович (Успенский Валерий Борисович, Uspensky Valerij Borisovich)** – доктор технічних наук, доцент каф. «Комп'ютерне моделювання процесів і систем», НТУ «ХПІ». Тел.: (050) 965-43-74. E-mail: uspensky61@gmail.com

**Некрасова Марія Володимирівна (Некрасова Мария Владимировна, Nekrasova Mariia Vladimirovna)** – кандидат технічних наук, доцент каф. «Комп'ютерне моделювання процесів і систем», НТУ «ХПІ». Тел.: (057) 707-64-54. E-mail: masha12dec@gmail.com