

*Д.М. КРАСІЙ, А.Г. АНДРЕЄВ*

### **ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ КОНТЕЙНЕРА, ЩО НАВАНТАЖЕНИЙ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИМ ЗОВНІШНІМ ТИСКОМ**

В роботі досліджується стійкість контейнера, що складається з чотирьох елементів: сферичної та циліндричної оболонок, круглої пластини та двох кільцевих ребер, котрі приварені на місці сполучення сферичної з циліндричною оболонкою і циліндричної оболонки з круглою пластинкою. Оболонки та пластинка тонкі: їхня товщина значно менша інших розмірів. Товщина всіх елементів контейнера однакова. Кільця жорсткі на згин але пружні на поворот відносно центру поперечного перерізу. Краї оболонок закріплені від зміщення в напрямі нормалі до поверхні оболонки, що викликає реакції, які швидко затухають при віддаленні від країв, тобто виникає крайовий ефект. Контейнер знаходиться під зовнішнім рівномірно розподіленим тиском. Для дослідження НДС припускається, що лівий та правий краї контейнера не впливають один на одного. Були знайдені критичні сили для кожного елемента контейнера. Значення тиску приймається як найменший з критичних тисків. Була вирішена задача теорії пружності: визначені граничні умови у місцях сполучень оболонок, за допомогою яких знаходяться невідомі константи для розв'язків диференціальних рівнянь прогинів серединної поверхні циліндричної оболонки, розв'язку рівняння сферичної оболонки та розв'язку рівняння Софі Жермен. Коли константи знайдені – виводяться графіки прогинів, моментів, сил та напружень, з яких видно, де у контейнера найбільш вразливі місця. Були отримані найбільші напруження на кожному з елементів, найбільше з яких порівнюється з границею текучості щоб перевірити, чи не починаються пластичні деформації. Для розв'язання диференціальних рівнянь та виводу графіків використовувався програмний комплекс MATLAB. Побудовані епюри прогинів та напружень. Отримані таблиці з максимальними критичними тисками, максимальними прогинами та максимальними напруженнями для кожного з елементів контейнеру. Виявлено, що найбільш вразливим елементом є циліндрична оболонка, бо її критичний тиск – найменший.

**Ключові слова:** стійкість, сполучення оболонок, НДС контейнеру, рівняння Софі Жермен, крайовий ефект.

*Д. М. КРАСИЙ, А. Г. АНДРЕЕВ*

### **ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНТЕЙНЕРА, КОТОРЫЙ НАГРУЖЕН РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ**

В работе исследуется устойчивость контейнера, который состоит из четырех элементов: сферической и цилиндрической оболочек, круглой пластинки и двух кольцевых ребер, которые приварены на месте сопряжения сферической с цилиндрической оболочкой и цилиндрической оболочки с круглой пластинкой. Оболочки и пластинки тонкие: их толщина гораздо меньше других размеров. Кольца жесткие на прогиб но упругие на поворот относительно центра поперечного сечения. Края оболочек зашпелены от смещения в направлении нормали к поверхности оболочек, что вызывает реакции, которые быстро затухают при отдалении от краев, то есть образуется краевой эффект. Контейнер находится под внешним равномерно распределенным давлением. Для исследования НДС предполагается, что левый и правый края контейнера не влияют друг на друга. Были найдены критические силы для каждого элемента контейнера. Значение давления принимается как наименьшая из критических давлений. Была решена задача теории упругости: определены граничные условия в местах сопряжений оболочек, с помощью которых находятся неизвестные константы для решений дифференциальных уравнений прогибов срединной поверхности цилиндрической оболочки, решения уравнения сферической оболочки и решения уравнения Софи Жермен. Когда константы найдены - выводятся графики прогибов и напряжений, из которых видно, где у контейнера наиболее уязвимые места. Были получены наибольшие напряжения на каждом из элементов, наибольшее из которых сравнивается с пределом текучести, чтоб проверить, не появились ли пластические деформации. Для решения уравнений и построения графиков использовался программный комплекс MATLAB. Построены эпюры прогибов и напряжений. Получены таблицы с максимальными критическими давлениями, максимальными прогибами и максимальными напряжениями для каждого из элементов контейнера. Выявлено, что наиболее уязвимым элементом является цилиндрическая оболочка, потому что ее критическое давление – наименьшее.

**Ключевые слова:** устойчивость, сопряжения оболочек, НДС контейнера, уравнение Софи Жермен, краевой эффект.

*D.M. KRASII, A.G. ANDREEV*

### **SUSTAINABILITY RESEARCHING OF CONTAINER WHICH IS UNDER EVENLY DISTRIBUTED EXTERNAL LOAD**

In this work is being explored sustainability of container, which consist of four elements: spherical and cylindrical shells, round plate and two circumferential ribs, which is welded at the interface of spherical with cylindrical shells and cylindrical shell with round plate. Thickness of all construction's elements is equal. Shells and plates are thin: them thickness is much smaller than other sizes. Ribs are rigid on deflection but elastic on rotation is indicative of the center of the transverse. Shells' edges pinched from displacement in the direction normal to the surface of the shells, which means an edge effect is formed. Container is under external evenly distributed load. For Stress-strain state researching assumed that left and right container's edges do not affect each other. Were found

critical loads for each container's elements. Value of pressure is the lowest of critical pressure. Were solved task of elastic strength theory: were defined boundary conditions at the shell's sinter face, by which is being found unknown constants for the solutions of the differential equations of the deflections of the middle surface of the cylindrical shell, the solution of the equation of the spherical shell, and the solution of the Sophie Germain equation. When constants were found – deflection and strain graphs are displayed, where it is possible to find the most vulnerable container's places. Were found the highest strains on each container's elements and the highest of them is comparing with tensile, to check for plastic deformations. To solve equations and build graphs, the MATLAB software package was used. Deflection and strain distribution were plotted. The tables with maximum critical pressures, maximum deflections and maximum stresses for each of the container elements were obtained. The cylindrical shell is found to be the most vulnerable element, since its critical pressure is the lowest.

**Key words:** sustainability, shell's interface, SSS of container, Sophie Germain equation, edge effect.

**Вступ.** Вважається, що світовий океан вивчений лише на 2-5%, що вже говорить про космос. Для вивчення морського дна використовується різна апаратура, починаючи від буйків-вимірювачів і закінчуючи справжніми глибоководними роботами. Так як апаратура має кінцевий радіус дії, то необхідно її занурити під воду і, звісно, чим більше глибина - тим більше тиск, який буде на неї діяти. Тому для занурення використовують капсули-оболонки, НДС та стійкість яких необхідно досліджувати, щоб підібрати необхідні параметри конструкції і не втратити дороге обладнання.

**Мета роботи.** Метою цієї роботи є пошук критичного тиску для контейнера постійної товщини з заданими розмірами. Для отриманого тиску розраховується НДС контейнера, виводяться напруження на кожному з елементів та порівнюється з границею текучості. Важливо, щоб втрата стійкості відбувалася в межах границі текучості, а інакше застосовані методи будуть недейсні.

**Побудова математичної моделі.** На рис. 1 показаний схематичний вигляд контейнера, геометричні параметри контейнера наведені в табл. 1. Матеріал контейнера – Сталь 40Х, фізичні параметри матеріалу подані в табл. 2.

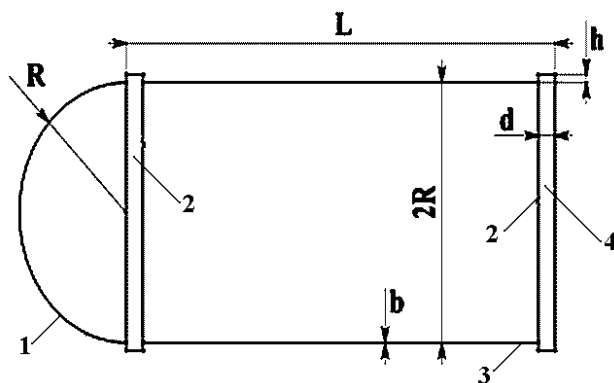


Рисунок 1 – Схематичний вигляд контейнера:  
1 – сферична оболонка; 2 – кільцеві ребра;  
3 – циліндрична оболонка; 4 – кругла пластинка

Таблиця 1 – Геометричні параметри контейнера

Параметр	Розмір, м
Висота кільця $h$	0,03
Товщина елементів конструкції $b$	0,008
Радіус елементів конструкції $R$	0,5
Довжина циліндричної оболонки $L$	2
Товщина кільця $d$	0,08

Таблиця 2 – Фізичні параметри матеріалу

Параметр	Значення
Модуль пружності $E$ , МПа	$2,1 \cdot 10^5$
Коефіцієнт Пуассона $\mu$	0,3
Межа текучості $\sigma_T$ , МПа	1000

Для дослідження контейнеру на стійкість необхідно розглянути сполучення циліндричної оболонки з пластиною, та сферичної з циліндричною оболонкою [1, с. 273] (рис. 2, 3).

Передбачається, що кільце жорстке на стиснення у центрі поперечного перерізу але є можливість обертатися навколо нього.

На лівому боці сполучення виглядає аналогічно.

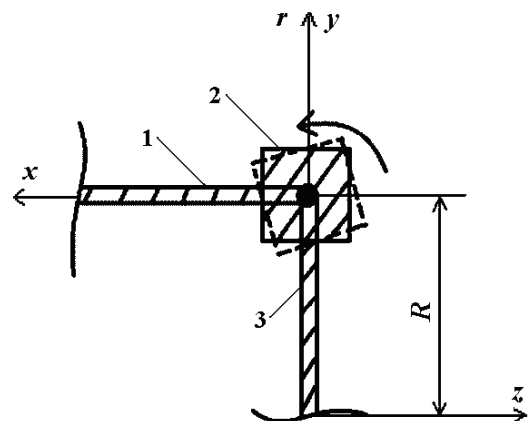


Рисунок 2 – Вигляд сполучення кільця з контейнером на правому боці: 1 – циліндрична оболонка; 2 – кільце; 3 – пластинка

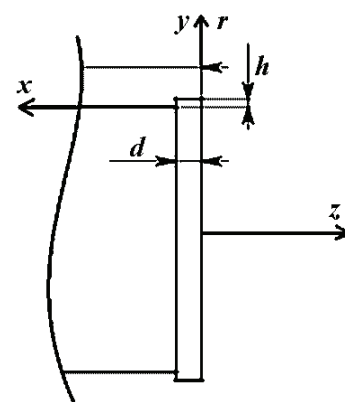


Рисунок 3 – Правий край контейнеру

**Розв'язок правого краю.** На правому краю треба розв'язати рівняння Софі Жермен [2, с.265] для пластинки та диференціальне рівняння вигнутої сере-

динної поверхні замкнутої кругової циліндричної оболонки [3, с. 190]:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = P/D; \quad (1)$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = P, \quad (2)$$

де  $P$  – тиск,  $D$  – циліндрична жорсткість,  $\nabla$  – оператор Лапласа,  $w$  – прогин оболонки та пластинки.

Розв'язки рівнянь (1) та (2):

$$w^p = C_1 + r^2 C_2 + \frac{Pr^4}{64D}; \quad (3)$$

$$w^o = e^{-\beta x} (C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) + \frac{P}{4\beta^4 D}. \quad (4)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} r = R : w_p = 0; \\ x = 0 : w_o = 0; \\ x = 0, r = R : M_x^o - M_r^p = M_x^k; \\ x = 0, r = R : \frac{dw^o}{dx} = \frac{dw^p}{dr}, \end{cases} \quad (5)$$

де  $w_o$ ,  $w_p$  – переміщення циліндричної оболонки та пластинки,  $M_x^o$ ,  $M_r^p$ ,  $M_x^k$  – моменти циліндричної оболонки, пластинки та кільця.

Кільце додає у третю граничну умову свій момент [4, с.8]:

$$M_x^k = k\theta^k. \quad (6)$$

**Розв'язок лівого краю.** Розрахункова схема лівого краю контейнеру показано на рис. 4.

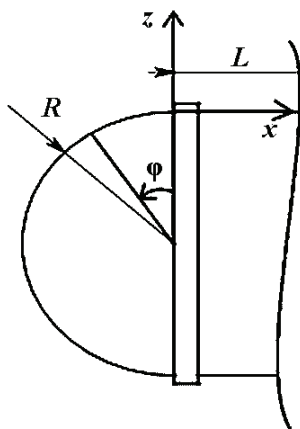


Рисунок 4 – Лівий край контейнеру

На лівому краю можна використати наближене диференціальне рівняння крайового ефекту, виражене через поперечну силу  $Q$  [3, 208]:

$$\frac{d^4 Q}{d\varphi^4} + 4\chi^4 Q = 0. \quad (7)$$

Розв'язок рівняння (6) взяти у такому вигляді:

$$Q^s = e^{-\chi\varphi} (C_3 \sin \chi\varphi + C_4 \cos \chi\varphi). \quad (8)$$

За допомогою цього розв'язку можна отримати моментну частину прогину та нормальних сил. Щоб отримати повне рівняння необхідно додати безмоментну частину для прогину та нормальних сил [5, с. 532]:

$$w^{\delta m} = \frac{(1-\mu)PR^2}{2Eh}; \quad N_1^{\delta m} = N_2^{\delta m} = \frac{PR}{2}. \quad (9)$$

Рівняння для циліндру залишається незмінним, тому розв'язок береться у вигляді:

$$w^c = e^{-\beta x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + \frac{P}{4\beta^4 D}. \quad (10)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} \varphi = 0, x = 0 : w^s = 0; \\ x = 0, \varphi = 0 : k \frac{dw^s}{d\varphi} = M^s - M^c; \\ x = 0, \varphi = 0 : w^c = 0; \\ x = 0, \varphi = 0 : \frac{dw^c}{dx} = \frac{dw^s}{dr}, \end{cases} \quad (11)$$

де  $\chi = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)r_o^2}{h^2}}$  – зміна кривизни [3, с. 207];

$M^c = -D \frac{d^2 w}{dx^2}$  – момент циліндричної оболонки [3, с. 209];

$k = \frac{EI}{r_k^2}$ ;  $\theta = -\frac{dw}{dx}$  – кут повороту кільця;

$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{\sqrt{rh}}}$  – [5, с. 516];

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – циліндрична жорсткість [5, с. 516];

$M^p = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$  – момент пластини [3, с. 140]

$M^s = \frac{D}{EhR} Q^{(3)}$  – момент сферичної оболонки [3, с. 200].

При одночасній дії на контейнер осевого та поперечного тиску не виходить вивести просте рівняння для критичного тиску. В даному випадку для циліндричної оболонки підійде вираз [6, с. 1028]:

$$P_{kp} = \frac{Eh}{R(1-\mu^2)} 0.379 \cdot 10^{-4} = 0,13 \text{ МПа}. \quad (12)$$

Рівняння критичного тиску для сферичної оболонки має вигляд [7, с. 500]:

$$P_{kp} = \frac{2Eh^2}{R^2 \sqrt{3(1-\mu^2)}} = 30,9 \text{ МПа}. \quad (13)$$

Рівняння критичного тиску для кільця [7, с.229]:

$$P_{kp} = \frac{3EI}{r_k^3} = 5,15 \text{ МПа}. \quad (14)$$

З цих трьох тисків необхідно взяти найменший (табл. 3).

Таблиця 3 – Фізичні параметри матеріалу

Елемент конструкції	Тиск, МПа
Циліндрична оболонка	0,13
Сферична оболонка	30,9
Кругла пластинка	5,15

Найменший критичний тиск – 0,13 МПа.

Отриманий тиск необхідно підставити у системи рівнянь та знайти невідомі константи.

Для правого боку:

$$\begin{cases} C_1 = -1,634e^{-2} \\ C_2 = 1,209e^{-1} \\ C_3 = 5,06856e^{-4} \\ C_4 = 2,085057e^{-5} \end{cases} \quad (15)$$

Для лівого боку:

$$\begin{cases} C_1 = 1.69e^{-5} \\ C_2 = 2,09e^{-6} \\ C_3 = -1044 \\ C_4 = 1255 \end{cases} \quad (16)$$

Графіки прогинів показані на рис. 5, 6.

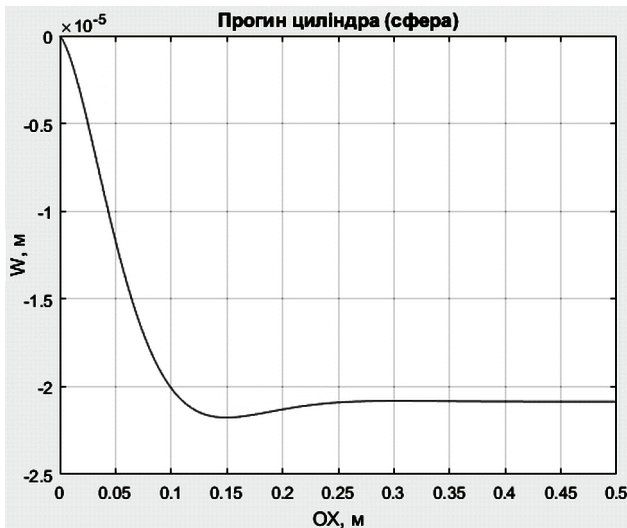


Рисунок 5 – Прогин циліндричної оболонки, що сполучена зі сферичною

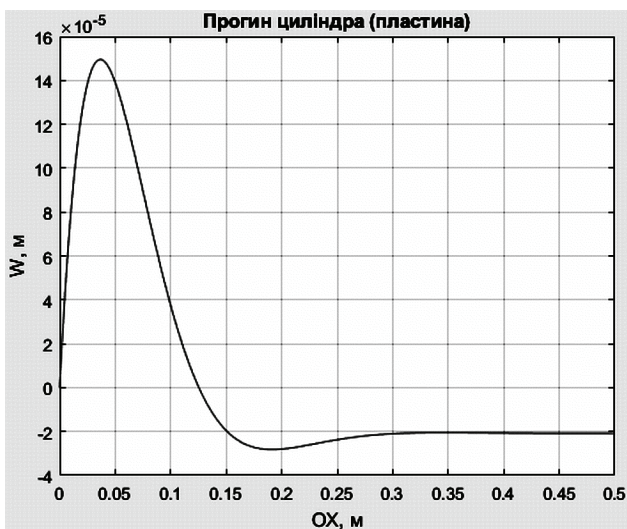


Рисунок 6 – Прогин циліндричної оболонки, що сполучена з пластинкою

З графіків видно, що прогин швидко згасає та на відстані менше ніж радіус оболонки, він стає постійним. Аналогічно можна сказати й про зусилля, наприклад, моменти.

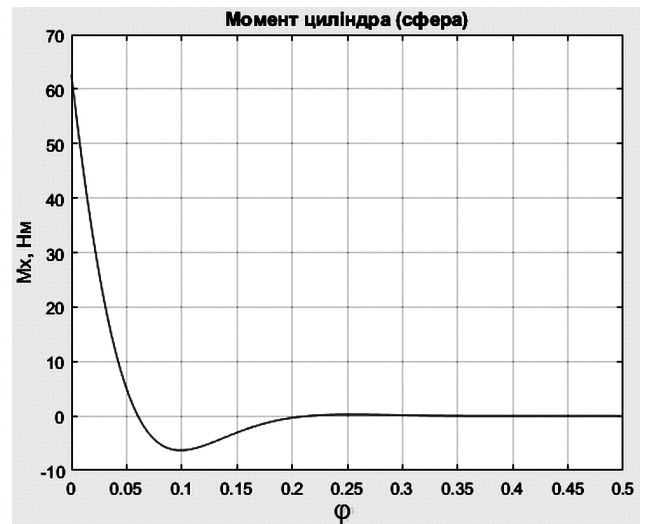


Рисунок 7 – Момент циліндричної оболонки

Тепер необхідно знайти напруження в елементах конструкції, та порівняти їх за границею текучості матеріалу.

Максимальні напруження у сфері [8, с. 213]:

$$\sigma_{\varphi}^{\max} = \frac{N_{\varphi}^{\max}}{h} \pm \frac{6M_{\varphi}^{\max}}{h^2} \quad (17)$$

Максимальні напруження у циліндрі [8, с. 213]:

$$\sigma_x^{\max} = \frac{6M_x^{\max}}{h^2} \quad (18)$$

Максимальні напруження у пластинці [5, с. 59]:

$$\sigma_r^{\max} = \frac{6M_r^{\max}}{h^2} \quad (19)$$

Напруження максимальне у сполученні циліндричної оболонки з пластинкою. Воно дорівнює:

$$\sigma^{\max} = 368 \text{ МПа} < \sigma_{\text{тек}}; \quad (20)$$

Схематичне зображення епюр та таблиці зі значеннями у деяких місцях показані на рис. 8, 9, та в табл. 3, 4.

Таблиця 3 – Значення прогинів

Точка прогину (рис. 8)	Значення прогину, м × 10 <sup>5</sup>
1	0,72
2	0,65
3	14,95
4	1600

Таблиця 4 – Значення максимальних напружень

Точка напруження (рис. 9)	Значення напруження, МПа
1	15,4
2	12,2
3	368
4	368

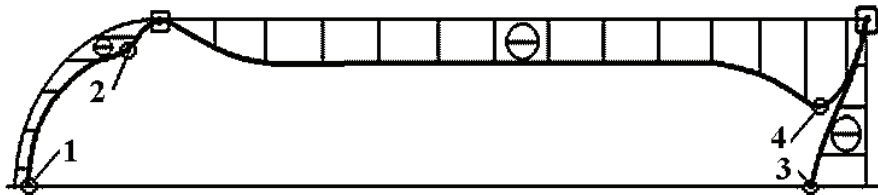


Рисунок 8 – Схема деформації контейнеру

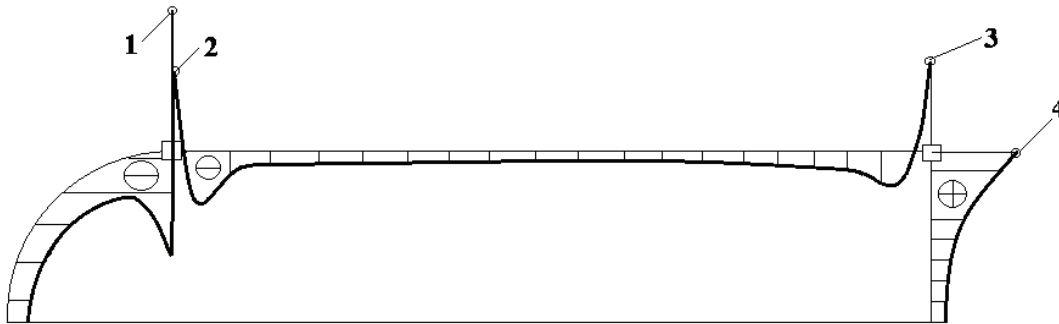


Рисунок 9 – Розподіл напружень в контейнері

**Висновки.** В роботі досліджено НДС контейнера, що навантажений рівномірним тиском. Виявлено, що при заданих розмірах, при досягненні критичного тиску контейнер втрапить стійкість, при цьому знаходяться у пружному стані.

В рамках дослідження побудовані графіки зусиль та переміщень елементів контейнера. Побудовані епюри та таблиці з напруженнями та прогинами у деяких точках. Побудована таблиця критичних тисків для кожного елемента. З таблиць видно, що найбільш вразливими елементами є циліндрична оболонка та пластинка.

#### Список літератури

1. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения / под ред. Л.И. Лурье. Москва: Наука, 1968. 456 с.
2. Амензаде Ю.А. Теория упругости. Учебник для университетов, издание третье. Москва: Высшая школа, 1976. 272 с.
3. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности, издание второе, переработанное. Москва: Высшая школа. 1982. 264 с.
4. Биргер И.А. Прочность устойчивость колебания, Том 2. Москва: Машиностроение, 1968. 464 с.
5. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки, издание второе. Москва: Наука, 1966. 625 с.
6. Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении, Том 3. Москва: Машгиз, 1959. 1119 с.

7. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем, издание второе. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 570 с.

8. Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении, Том 2. Москва: Машгиз, 1958. 975 с.

#### Bibliography(transliterated)

1. Chernina V.S. Statika tonkostennykh obolochek vrashcheniya, pod redaktsiyey L. I. Lur'ye. Moscow: Nauka, 1968. 456 p.
2. Amenzade YU.A. Teoriya uprugosti. Uchebnik dlya universitetov, izdaniye tret'ye. Moscow: Vysshaya shkola, 1976. 272 p.
3. Samul' V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti, izdaniye vtoroye, pererabotannoye. Moscow: Vysshaya shkola. 1982. 264 p.
4. Birger I.A. Prochnost' ustojchivost' kolebaniya, Tom 2. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 464 p.
5. Timoshenko S.P. Plastinki i obolochki, izdaniye vtoroye. Moscow: Nauka, 1966. 625 p.
6. Ponomarev S.D. Raschety na prochnost' v mashinostroyenii, Tom 3. Moscow: Mashgiz, 1959. 1119 p.
7. Timoshenko S.P. Ustoychivost' uprugikh sistem, izdaniye vtoroye. Moscow: Gosudarstvennoye izdatel'stvo tekhniko- teoreticheskoy literatury, 1955. 570 p.
8. Ponomarev S.D. Raschety na prochnost' v mashinostroyenii, Tom 2. Moscow: Mashgiz, 1958. 975 p.

Надійшла (received) 21.10.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Красій Данило Максимович (Красий Данило Максимович, Danylo Krasii)** – студент, кафедра Динаміки та міцності машин НТУ «ХПІ», тел.:(093)-493-10-29, e-mail: krasiydm@gmail.com

**Андрєєв Арнольд Георгійович (Андреев Арнольд Георгиевич, Andreev Arnol'd Georgievich)** – кандидат технічних наук, доцент кафедри «Динаміки та міцності машин» НТУ «ХПІ», тел.:(057) 707-68-79; e-mail: andreev707@ukr.net.