

Р.А. БАБУДЖАН, А.Г. АНДРЕЕВ

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КОНТЕЙНЕРА, НАГРУЖЕННОГО РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

В данной работе предполагалось выяснить возможность потери устойчивости в типовой конструкции контейнера, проанализировав несколько конфигураций геометрических параметров. Для этого была создана математическая модель, которая совмещает в себе моментную и безмоментную теорию оболочек, а также теорию устойчивости. Были показаны методы параметризации и алгоритмизации решения напряженно-деформированного состояния с помощью пакета программного обеспечения MATLAB. Также в работе представлены значения критических нагрузок, приводящих объект в состояние потери устойчивости, соответствующие определенным параметрам контейнера. Также были представлены сравнения предела текучести материала конструкции со значениями максимальных напряжений в элементах контейнера, вызываемых вычисленными нагрузками. Эти значения позволили сделать вывод об опасных конфигурациях конструкции, при которых стала возможна потеря устойчивости. В работе приведена формализация решения напряженно-деформированного состояния конструкции, имеющая модульную структуру. Данный метод позволяет унифицировать и автоматизировать процесс решения задач подобного рода без использования частных теорий расчета конструкций. Алгоритм решения сходится с типовым алгоритмом нахождения опасных зон конструкции и, благодаря параметризации, может быть применен при решении задачи как в прямой, так и в обратной постановке. После анализа результатов был сделан вывод о состоятельности и актуальности анализа устойчивости конструкции. Результатом работы являются как численные значения критических нагрузок при определенных конфигурациях конструкции, так и общее, качественное представление о прочности типовой конструкции, ее опасных зонах и возможности ее упрочнения посредством добавления новых конструктивных элементов в зоны, наиболее подверженные необратимым деформациям. Результаты приведены в виде графиков, формул, рисунков и таблиц.

Ключевые слова: контейнеры, оболочки вращения, устойчивость, упругость, напряженно-деформированное состояние, перемещения, сопряжение элементов контейнера, моментная теория.

Р.А. БАБУДЖАН, А.Г. АНДРЕЕВ

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ КОНТЕЙНЕРА, ЩО НАВАНТАЖЕНИЙ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИМ ЗОВНІШНІМ ТИСКОМ

У даній роботі передбачалося з'ясувати можливість втрати стійкості в типовій конструкції контейнера, проаналізувавши кілька конфігурацій геометричних параметрів. Для цього була створена математична модель, яка поєднує в собі моментну і безмоментну теорію оболонок, а також теорію стійкості. Були показані методи параметризації та алгоритмізації рішення напружено-деформованого стану за допомогою пакета програмного забезпечення MATLAB. Також в роботі представлені значення критичних навантажень, що призводять об'єкт в стан втрати стійкості, що відповідають певним параметрам контейнера. Також були представлені порівняння межі текучості матеріалу конструкції зі значеннями максимальних напружень в елементах контейнера, що викликаються обчисленими навантаженнями. Ці значення дозволили зробити висновок про небезпечні зміни конструкції, при яких стала можлива втрата стійкості. У роботі приведена формалізація рішення напружено-деформованого стану конструкції, що має модульну структуру. Даний метод дозволяє уніфікувати і автоматизувати процес вирішення завдань подібного роду без використання особливих теорій розрахунку конструкцій. Алгоритм рішення збігається з типовим алгоритмом знаходження небезпечних зон конструкції і, завдяки параметризації, може бути застосований при вирішенні задачі як в прямій, так і в зворотній постановці. Після аналізу результатів було зроблено висновок про спроможність і актуальність аналізу стійкості конструкції. Результатом роботи є як чисельні значення критичних навантажень при певних конфігураціях конструкцій, так і загальне, якісне уявлення про міцність типової конструкції, її небезпечні зони і можливість її зміцнення за допомогою додавання нових конструкційних елементів в зони, найбільш схильні до незворотних деформацій. Результати наведені у вигляді графіків, формул, малюнків і таблиць.

Ключові слова: контейнери, оболонки обертання, стійкість, пружність, напружено-деформований стан, переміщення, сполучення елементів контейнера, моментна теорія.

R.A. BABUDZHAN, A.G. ANDREEV

SUSTAINABILITY ANALYSIS OF A CONTAINER LOADED WITH UNIFORMLY DISTRIBUTED EXTERNAL PRESSURE

This work has been shown to have the ability to handle the type of container design that has analyzed the geometry configuration parameters. For the whole bull, a mathematical model has been created, that combines moment and momentless theories of shells, as well as theoretical theory. In this work also are shown the methods of parametrization and the algorithms of the solution, which was created with the help of software MATLAB. The work also presents the values of critical loads that bring the object into a state of loss of stability, corresponding to certain parameters of the container. Comparison of the yield strength of the structural material with the values of the maximum stresses in the container elements caused by the calculated loads was also presented. These values led to the

conclusion about the dangerous configurations of the structure, in which the loss of stability became possible. The paper gives a formalization of the solution of the stress-strain state of the structure, which has a modular structure. This method allows to unify and automate the process of solving problems of this kind without using private theories of structural analysis. The solution algorithm converges with the standard algorithm for finding dangerous zones of the structure and, thanks to the parameterization, can be used to solve the problem both in direct and inverse formulations. After analyzing the results, a conclusion was drawn about the consistency and relevance of structural stability analysis. The result of the work is both the numerical values of critical loads at certain configurations of the structure, as well as a general, qualitative idea of the strength of the typical structure, its hazardous areas and the possibility of its hardening by adding new structural elements to the areas most prone to irreversible deformations. The results are presented in the form of graphs, formulas, figures and tables.

Key words: containers, rotation shells, stability, elasticity, stress-strain state, displacements, conjugation of shells, moment theory.

Вступлення. Устойчивость – свойство конструкции сохранять при действии внешних сил заданную форму равновесия. При современном применении стали и металлов высокой прочности в инженерных конструкциях упругая устойчивость стала проблемой огромного значения. Применение более современных материалов привело, естественно, к типам конструкций, содержащим гибкие сжатые части: тонкие пластинки и тонкие оболочки. Опыт многих лет исследований динамики и прочности конструкций подсказывает, что такие конструкции могут оказаться опасными не из-за высоких напряжений, превышающих предел прочности, но вследствие недостаточной упругой устойчивости гибких или тонкостенных элементов (1, с 8]).

Целью этого исследования является определение критических напряжений, зависимостей напряжений от нагрузки в каждом элементе конструкции, а также конструктивных особенностей элемента, которые могут привести к потере устойчивости.

Постановка задачи. В данной работе проводится исследование контейнера, нагруженного равномерно распределенным внешним давлением со строго определенным типом закреплений элементов конструкции, а также проводится поиск связей между определенными конструктивными особенностями объекта и потерей им устойчивого состояния. Для этого необходимо разбить задачу на такие этапы.

1. Определить напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции с возможностью параметризации геометрии и нагружения конструкции.

2. Определить критические нагрузки, вызывающие потерю устойчивости каждого элемента конструкции.

3. Выяснить особенности конфигурации конструкции, при которой напряжения, вызванные критическими нагрузками, будут меньше, чем предел текучести материала.

Схема конструкции представлена на рис.1. Материал: Сталь 58, предел текучести $\sigma_T = 2000$ МПа, модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Для численного моделирования был использован пакет прикладных программ MATLAB. Использование данного пакета позволило полностью автоматизировать все расчеты в конструкции, дало возможность параметризовать уравнения а также лишило необходимости ручного вывода аналитических выражений для усилий каждого элемента конструкции. При этом

было решено избежать численных методов решения систем нелинейных уравнений, а также численного дифференцирования уравнений по причине нелинейности искомых выражений, что могло бы привести к большим погрешностям в решении. Исходя из этого, все выражения для прогибов и усилий в элементах конструкции были получены в аналитическом виде, что закрывает вопрос о точности решения. Вопрос о точности теоретических выкладок, использованных в данной работе, был рассмотрен в соответствующей литературе ([2, с 173]).

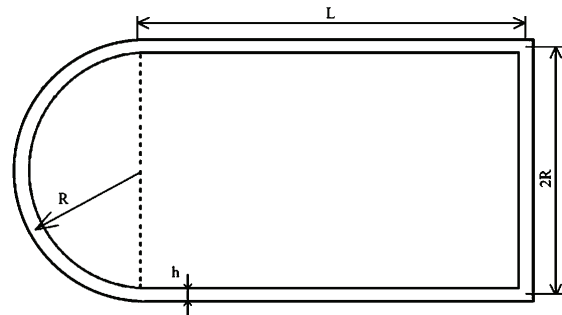


Рисунок 1 – Схема конструкции

Определение НДС. Алгоритм исследования НДС модели:

1. Построение математической модели конструкции.

1.1. Разработка расчетной схемы:

- разделение конструкции на конструктивные элементы;

- классификация конструктивных элементов

1.2. Построение разрешающих уравнений:

- выбор систем координат в конструктивных элементах;

- запись основных уравнений и их общих решений для каждого конструктивного элемента;

- исследование узлов сопряжения и запись геометрических и статических условий сопряжения конструктивных элементов;

2. Реализация методики решения задачи в математической среде программирования.

3. Проведение расчетов, анализ результатов и вывод таблиц конфигураций.

Для расчета напряженно-деформированного состояния конструкции она была разделена на две составляющие (рис. 2). Левый и правый края рассчитывались независимо друг от друга, опираясь на гипотезы моментной теории пластин ([2, с 201]) и оболочек и

закона сохранения энергии тела. Требование разделить конструкцию обусловлено методологией решения задач теории пластин и оболочек, а именно для построения корректной математической модели. В теории пластин и оболочек рассматривается напряженно-деформированное состояние геометрических примитивов – пластин, оболочек вращения и прочее, а также варианты их защемления. Рассмотрение данной конструкции подразумевает рассмотрение конструкционного элемента в отдельности, а также каждого ее узла. Поскольку задача симметрична относительно оси цилиндрической части оболочки, ключевым является рассмотрение двух узлов – сопряжение цилиндрической оболочки с круглой пластиной и сопряжение сферической и цилиндрической оболочек.

Левый край представляет собой полусферу, жестко защемленную по ободу с цилиндром (см. рис. 2, а). Правый край представляет собой круглую пластину, жестко защемленную по краям с цилиндром (рис. 2, б).

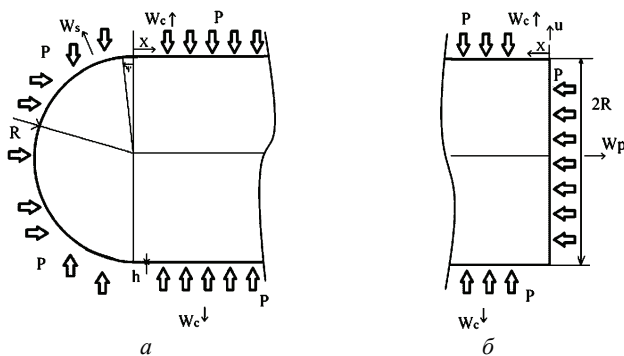


Рисунок 2 – Координатные оси и положительные направления прогибов

Выбор систем координат. Для левого края приняты следующие обозначения: w_s – прогиб в сферической оболочке, ψ – координата угла поворота, w_c – прогиб в цилиндрической оболочке, X – координата изменения прогиба цилиндра по направлению нулевой кривизны. Для правого края приняты следующие обозначения: w_p – прогиб в пластине, r – координата изменения прогиба в радиальном направлении, w_o – прогиб в цилиндрической оболочке, X – координата изменения прогиба цилиндра по направлению нулевой кривизны, u – растяжение пластины.

Запись основных уравнений прогибов и усилий. Для левого и правого участков уравнение краевого эффекта прогиба цилиндрической оболочки выглядит следующим образом ([2, с 209]):

$$d^4 \frac{w_k}{dx^4} + 4w_k = 0.$$

Полный прогиб цилиндра ищется по следующей формуле:

$$w = w_{\text{общее}} + \bar{w} + w_k,$$

где $w_{\text{общее}}$ – общее решение по безмоментной теории ([3, с 531]);

\bar{w} – частное решение;

w_{ks} – краевой эффект ([2, с 209]).

Прогиб цилиндрической оболочки (оба края) находится по следующей формуле:

$$w_c = e^{-\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + \frac{P}{4\beta^4 D} + \frac{PR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right);$$

$$w_o = e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + \frac{P}{4\beta^4 D} + \frac{PR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right);$$

где $\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}$; $D = E \frac{h^3}{12} (1-\nu^2)$.

Дифференциальное уравнение Софи-Жермен для прогиба круглой пластины (см. [2, с 142]):

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw'}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{P}{D},$$

его решение:

$$w' = c_1 + c_2 r^2 + \frac{P r^4}{D 64}$$

([2, с. 173, аналитическое решение дифференциального уравнения из задачи «сплошная шарнирно опертая по контуру пластинка»).

Уравнение растяжения пластины:

$$u = c_5 (1-\nu) \frac{r}{E}$$

([2, с. 105 уравнение 7.33, измененное следующим образом. Убрано второе слагаемое из-за отсутствия отверстия в центре пластины, коэффициент. Параметр A выражен через неопределенную константу $C5$ и физические постоянные в уравнении нормальных напряжений осесимметричной задачи на растяжение).

Дифференциальное уравнение для сферической оболочки ([2, с 208]):

$$d^4 \frac{Q_1}{d\psi^4} + 4Q_1 = 0,$$

где Q_1 – перерезывающая сила в сфере.

Его решение для одного края полусферы [2, с 208]):

$$Q_1 = e^{-\chi x} (c_3 \sin \chi x + c_4 \cos \chi x).$$

Сумма безмоментного ([3, с 531]) и моментного ([2, с 208]) решений для сферы:

$$w_s = R \frac{dQ_1}{d\psi} + P \frac{R^2}{Eh} \frac{1-\nu}{2}.$$

Формулы моментов и усилий для правого края ([2, с 208, с 210]):

$$M_o = -D \frac{d^2 w_o}{dx^2}; \quad M_{pR} = -D \left(\frac{d^2 w_p}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_p}{dr} \right);$$

$$Q_{pR}^- = \frac{d^2 w_p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_p}{dr}; \quad Q_p = -D \frac{dQ_{pR}^-}{dr};$$

$$N_o = E \frac{h}{R} e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x).$$

Формулы моментов и усилий для левого края ([2, с 141, с 210]):

$$M_c = -D \frac{d^2 w_c}{dx^2}; \quad Q_c = -D \frac{d^3 w_c}{dx^3};$$

$$\Psi_s = -\frac{1}{Eh} \frac{d^2 Q_s}{d\psi^2}; \quad M_{s1} = -\frac{Ds}{R} \frac{d\Psi_s}{d\psi}; \quad M_{s2} = \nu M_{s1};$$

$$N_o = E \frac{h}{R} e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x); \quad Q_c = -D \frac{d^2 w_c}{dx^2},$$

где Ψ_s – изменение угла наклона касательной к меридиану

Запись условий сопряжения и поиск констант

На правом участке в разрешающих уравнениях имеется пять неизвестных констант. Следовательно, требуется пять условий сопряжения:

$$\begin{aligned} x=0, \quad r=R, \quad w_o &= u; \\ x=0, \quad r=R, \quad \frac{dw_o}{dx} &= -\frac{dw_p}{dr}; \\ x=0, \quad r=R, \quad M_{ox} &= -M_{pr}; \\ x=0, \quad r=R, \quad Q_{ox} &= \sigma_r h; \\ r=R, \quad w_p &= 0. \end{aligned}$$

На левом участке в разрешающих уравнениях имеется четыре неизвестные константы. Следовательно, требуется четыре условия сопряжения:

$$\begin{aligned} x=0, \quad \varphi &= 0, \quad w_c = w_s; \\ x=0, \quad \varphi &= 0, \quad \frac{dw_c}{dx} = -\frac{dw_s}{d\varphi}; \\ x=0, \quad \varphi &= 0, \quad M_{cx} = -M_{s1}; \\ x=0, \quad \varphi &= 0, \quad Q_{cx} = -Q_{s1}; \end{aligned}$$

Анализируя график прогибов (рис. 3) в разных краях конструкции, можно прийти к выводу об уместности разделения конструкции при таком отношении между значениями длины цилиндрической части и

радиусом полусферы контейнера: $Rhl = 0,11541$. При отношении больше данного наложение решений не наблюдается. Это обусловлено значением коэффициента затухания β ([3, с 516]). Ниже приведен график, иллюстрирующий данную зависимость:

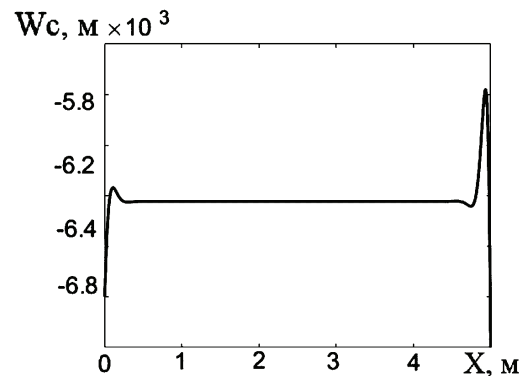


Рисунок 3 – График прогибов в цилиндре при $R = 1, h = 0,1, l = 5, \sigma_{\min} = [\sigma_{\text{стали}}]$

Проверка решения НДС. Как видно из рис. 4, эпюры перемещений в каждом узле сопряжения сходятся. Также при выходе на безмоментную составляющую оболочек вращения можно наблюдать отрицательные прогибы, что свидетельствует о отрицательном направлении нагрузки. Отрицательное направление нагрузки в системах координат, связанных с оболочками подразумевает под собой внешнее нагружение конструкции, которое и требовалось рассмотреть.

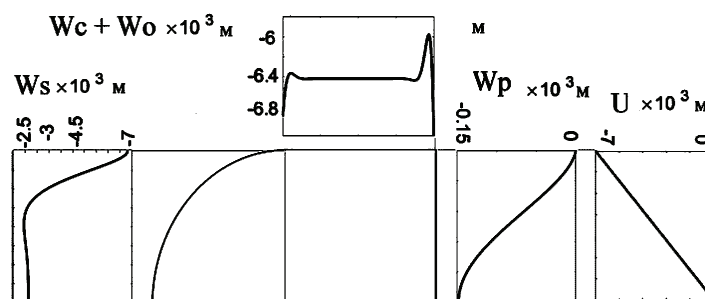


Рисунок 4 – Эпюры прогибов в цилиндре при $R = 1, h = 0,1, l = 5, \sigma_{\min} = [\sigma_{\text{стали}}]$

Реализация решения на базе MATLAB. Как было сказано ранее, на этапе вычислений было решено не использовать табличное представление функций прогибов. Используя символьный аппарат MATLAB([4]), изначально были записаны символьные выражения для всех ключевых уравнений конструкции. После этого были найдены символьные выражения для производных от соответствующих равенств и, как следствие, выражения для усилий каждого элемента конструкции. Затем, воспользовавшись сущностью «равенство» (Determinineequality, eq, ==) и функцией символьная замена (symbolicsubstitution, subs(s,old,new)), были определены выражения для граничных условий. Решение системы уравнений относительно констант C1-C9 функцией solve(eqn,var) ([5]),

дало параметризованные выражения для прогибов и усилий в конструкции, где параметрами выступали: нагрузка, геометрические параметры, параметры материала.

Вычисление критических нагрузок в элементах. Изучив особенности данной конструкции, можно сделать вывод о трех возможных неустойчивых состояния в конструкции: выпучивание полусферы оболочки под действием внешнего давления([1], с. 496), выпучивание цилиндрической оболочки под действием одновременного внешнего поперечного давления и продольных сил([1], с. 480; [7], с. 1031), а также выпучивание круглой пластины под действием сжимающей силы ([1], с. 375; [7], с. 1071). Значения критических нагрузок определяются по формулам:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad N_p = \frac{14,68h^2}{R^2}; \quad Q_s = \frac{2Eh^2}{R^2(3-\mu^2)^2};$$

$$Q_c = \frac{Eh}{R} \left(1 + 0,5 \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right) \times \left[\frac{1}{n^2 \left(\frac{R}{\pi} \right)^2 + 1} + \frac{h^2}{12R^2(1-\mu^2)} \times \left(n^2 + \left(\frac{\pi R}{L} \right)^2 \right)^2 \right];$$

$$N_c = -Q_c R,$$

где N_p – сила, сжимающая пластину, Q_s – сила, сжимающая сферу, Q_c – сила, сжимающая цилиндр в радиальном направлении, N_c – сила, сжимающая цилиндр в осевом направлении.

Вычисление напряжений. Найдя выражения для усилий всех элементов конструкции, можно записать выражения напряжений ([6] с. 197, с. 230):

$$\sigma_s = \frac{N_s}{h} \pm 6 \frac{M_{1s}}{h^2}; \quad \sigma_{c1} = 6 \frac{M_{1c}}{h^2}; \quad \sigma_{c2} = 6 \frac{M_{2c}}{h^2};$$

$$\sigma_{pd} = 6 \frac{M_p}{h^2}; \quad \sigma_{pc} = C_s,$$

где σ_s – напряжения в сфере, σ_{c1} и σ_{c2} – напряжения на правом и левом концах цилиндра, σ_{pd} – напряжение в пластине, вызванное ее сжатием, σ_{pc} – напряжение в пластине, вызванное ее изгибом.

Сравнение напряжений при критических нагрузках с пределом текучести материала. Для получения численных значений напряжений во всех элементах конструкции были рассмотрены конфигурации, представленные в табл. 1.

Таблица 1 – Конфигурации конструкции соответствующие минимальные критические нагрузки

№	h_s , м	R_s , м	L_s , м	P , кН
I	0,1	1	2	$1689,3 \cdot 10^6$
II	0,01	1	20	$1,689 \cdot 10^3$
III	0,01	0,1	2	$1,689 \cdot 10^4$

Напряжения, соответствующие различным конфигурациям, представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Напряжения (ГПа) в элементах

№	σ_s	σ_{c1}	σ_{c2}	σ_{pd}	σ_{pc}
I	14,723	18,298	124,45	120,06	22,454
II	0,4276	0,1547	12,617	12,53	0,2605
III	0,133	0,1535	1,2578	1,2536	0,2057

Выводы. Как видно из результатов исследования, потеря устойчивости конструкции возможна при

стечении ряда обстоятельств, а именно при сравнительно малой толщине стенок контейнера и малом радиусе днища. Это подтверждается гипотезами, заложенными в теории устойчивости.

Во всех рассмотренных конфигурациях минимальная сила, требуемая для потери устойчивости, соответствовала критической нагрузке в пластине при ее радиальном сжатии. Однако максимальные напряжения в конструкции возникают именно в месте защемления цилиндрической оболочки и пластины. Это свидетельствует о том, что этот участок защемления – самое опасное место конструкции. С целью упрочнения подобных конструкций может быть рассмотрена установка жестких колец на гранях цилиндрической оболочки, противодействующих сжатию в радиальном направлении.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 570 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. пособие для студентов вузов. 2-е изд., перераб. Москва: Высшая школа, 1982. 264 с.
3. Тимошенко С.П., Вoinовский-Кригер Пластинки и оболочки. Москва: Наука, 1966. 625 с.
4. Perform symbolic math computations. URL: mathworks.com/products/symbolic.html
5. MathWorks MATLAB help. function solve(). URL: https://www.mathworks.com/help/symbolic/solve.html
6. Пономарев С.Д. (ред.) и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Том 2. Москва: Машгиз, 1958. 975 с.
7. Пономарев С.Д. (ред.) и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Том 3. Москва: Машгиз, 1959. 1119 с.

References (transliterated)

1. Timoshenko S.P. Stability of elastic systems. Moscow: State publishing house of technical and theoretical literature. 1955. 570 p.
2. Samul V.I. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity: Textbook. manual for university students. 2nd ed., Revised. Moscow: Higher. School, 1982. 264 p.
3. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger Plates and shells. Moscow: Science, 1966. 625 p.
4. Perform symbolic math computations. URL: mathworks.com/products/symbolic.html
5. MathWorks MATLAB help. function solve (). URL: https://www.mathworks.com/help/symbolic/solve.html
6. Ponomarev S.D. (Ed.) and others. Strength calculations in mechanical engineering. Vol. 2. Moscow: Mashgiz, 1958. 975 p.
7. Ponomarev S.D. (Ed.) and others. Strength calculations in mechanical engineering. Vol. 3: Moscow: Mashgiz, 1959. 1119 p.

Поступила (received) 25.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Бабуджан Руслан Андреевич (Бабуджан Руслан Андрійович, Babudjan Ruslan Andreevich) – студент, кафедра «Динамика и прочность машин», НТУ «ХПИ», тел.: 0997938503; e-mail: ruslanbabudjan100799@gmail.com

Андреев Арнольд Георгиевич (Андреев Арнольд Георгійович, Andreev Arnold' d Georgievich) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин» НТУ «ХПИ», тел.: (057) 707-68-79; e-mail: andreev707@ukr.net.