

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО ДИНАМІЧНИЙ ЕФЕКТ НЕСИМЕТРІЇ СИЛОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Описано динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної механічної системи з одним ступенем вільності при короткочасному силовому імпульсному навантаженні. Він полягає в тому, що максимальні переміщення системи у напрямі дії прикладеного імпульсу менші, ніж протилежні за напрямом максимальні переміщення розвантаженої системи, при її вільних коливаннях. Показано, що умови прояву ефекту пов'язані не тільки з власними параметрами коливальної системи, а й з тривалістю імпульса. Розглянуто дію двох варіантів силових імпульсів. Перший прямокутний, а другий – у вигляді однієї півхвилі синусоїди.

Ключові слова: динамічний ефект, коливальна система, несиметрична характеристика пружності, силовий імпульс.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ

О ДИНАМИЧЕСКОМ ЭФФЕКТЕ НЕСИМЕТРИИ СИЛОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКЕ

Описан динамический эффект несимметрии силовой характеристики колебательной механической системы с одной степенью свободы при кратковременном силовом импульсном нагружении. Он состоит в том, что максимальные перемещения системы в направлении действия приложенного импульса меньше, нежели противоположные по направлению максимальные перемещения разгруженной системы, при ее свободных колебаниях. Определены условия, когда имеет место указанное неравенство. Показано, что условия проявления эффекта связаны не только с собственными параметрами колебательной системы, но и с продолжительностью импульса. Рассмотрено действие двух вариантов силовых импульсов. Первый прямоугольный, а второй – в виде одной полу волны синусоиды. Установлено, что высота этих импульсов не входит в условия проявления эффекта. Приведены примеры расчетов. Численные результаты, полученные с применением построенных аналитических решений, подтверждены численным интегрированием дифференциального уравнения движения на компьютере.

Ключевые слова: динамический эффект, колебательная система, несимметричная характеристика упругости, силовый импульс.

V.P. OLSHANSKIY, S.V. OLSHANSKIY

ABOUT THE DYNAMIC EFFECT OF NON-SYMMETRY OF THE POWER CHARACTERISTIC OF AN OSCILLATING SYSTEM UNDER A PULSED

The motion of a nonlinear mechanical system with one degree of freedom under force impulse loading is considered. The elastic characteristic of the system is approximated by segments of two straight lines that have a common point in the equilibrium position with zero displacement. The dynamic effect of asymmetry of the power characteristic of an oscillating mechanical system is described. It consists in the fact that the maximum displacement of the system in the direction of the applied external pulse is less than the amplitude deviation of the unloaded system in the opposite direction with its free oscillations. Conditions are defined when this inequality holds. To this end, analytical solutions of the differential equations of motion were constructed in the regions of positive (with greater rigidity) and negative (with less rigidity) displacements, and then the solutions were padded. Compact formulas are derived for calculating the maxima of displacements and the time of their attainment. It is shown that the expressions for the maxima can also be derived from the energy relationships, without solving the differential equations of motion. The action of two variants of pulses of finite duration is considered. The first is rectangular, with a constant instantaneous applied force, which also instantly disappears after some time, and the second is sinusoidal - in the form of one half-wave of the sinusoid. It is established that the height of these pulses, that is, the maximum value of the applied force, does not enter into the conditions for the manifestation of the dynamic effect for the adopted kusano linear elasticity characteristic of the system. But the conditions for the manifestation of the dynamic effect are related to the proper parameters of the vibrational system (mass and rigidity), and also depend on the duration of the pulse in time. For relatively long duration of the action of pulses with respect to the period of free oscillations of the oscillator, this effect is not manifested. Numerical examples are given that confirm the adequacy of the derived calculation formulas and illustrate the possibilities of the theory presented. To compare the results, we numerically integrate the differential equation of motion on a computer. It is shown that the results obtained using analytical and numerical solutions of the Cauchy problem are in good agreement, and the dynamic effect of asymmetry of the power characteristic of the oscillating system is manifested for both forms of the pulses considered.

Keywords: The cauchy problem, the analytical and numerical solution, dynamic effect, oscillatory system, asymmetrical elasticity characteristic, power pulse.

Вступ. Інтенсивні короткочасні імпульсні або ударні навантаження можуть бути причиною передчасного руйнування елементів конструкцій. Тому висві-

тленню динаміки елементів конструкцій в умовах вказаних навантажень присвячено багато публікацій, серед яких виділимо [1-4]. В техніці поширені механічні

системи з несиметричною характеристикою пружності. Це системи, де поряд з основним несучим пружним елементом встановлюють додатковий пружний елемент підсилювач або обмежувач руху. Наприклад, у підвісках транспортних засобів такими додатковими елементами можуть бути підресорник або буфер. Про коливальні властивості систем з несиметричною характеристикою пружності йдеться в [5-8] та інших публікаціях. Тут розглядаємо найпростіший варіант силової характеристики, коли вона утворена відрізками двох прямих [6].

Метою статті є становлення умов, за яких проявляється динамічний ефект несиметрії силової характеристики, коли переміщення системи у напрямі дії імпульсного навантаження менші за протилежні за напрямом переміщення розвантаженої системи.

Основна частина роботи. Рух коливальної системи описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + [c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x)]x = P \cdot [H(t) - H(t - \tau)], \quad (1)$$

у якому $c_1 > c_2 > 0$ – характеристики пружності; m – маса системи; $x(t)$ – переміщення системи у часі t ; P – величина миттєво прикладеної сили; $H(t)$, $H(t - \tau)$ – одиничні функції Хевісайда; τ – тривалість імпульса; крапка над x означає похідну по t .

Вісь ox і сила P спрямовані вертикально вниз.

Рівняння (1) доповнюємо нульовими початковими умовами:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Для обчислення додатних переміщень ($x > 0$) використаємо відомі розв'язки задачі (1), (2), надруковані в [7]:

$$x(t) = \begin{cases} x_{CT} (1 - \cos \omega t) & t \leq \tau \\ 2x_{CT} \sin \frac{\omega \tau}{2} \sin \omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right) & \text{при } t \geq \tau. \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Тут } x_{CT} = \frac{P}{c_1 + c_2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}.$$

Тривалість імпульсу обмежуємо нерівністю $\omega \tau \leq 2\pi$.

Із (3) випливає, що розвантажений осцилятор повертається в положення $x = 0$ при $t = t_*$, причому:

$$t_* = \frac{\pi}{\omega} + \frac{\tau}{2}.$$

Його швидкість руху в цей момент часу становить:

$$v_0 = \dot{x}(t_*) = -2\omega x_{CT} \sin \frac{\omega \tau}{2}. \quad (4)$$

Від'ємні переміщення ($x \leq 0$), при $t > t_*$, описуємо виразом:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1 (t - t_*), \quad (5)$$

$$\text{у якому } \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{m}}.$$

Згідно з (3) максимальне переміщення a_0 системи вниз дорівнює:

$$a_0 = 2x_{CT} \sin \frac{\omega \tau}{2} \quad (6)$$

і досягається воно при:

$$t = t_0 = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\tau}{2}.$$

Ці залежності мають чинність при $\tau < \frac{\pi}{\omega}$. Якщо $\tau \geq \frac{\pi}{\omega}$, то $a_0 = 2x_{CT}$ і $t_0 = \frac{\pi}{\omega}$.

На підставі виразів (4) і (5) амплітудне відхилення a_1 системи вгору становить:

$$a_1 = -\frac{v_0}{\omega_1} = 2x_{CT} \frac{\omega}{\omega_1} \sin \frac{\omega \tau}{2}. \quad (7)$$

Воно досягається при:

$$t = t_1 = t_* + \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega_1} + \tau \right).$$

Враховуючи (6) і (7), для тривалостей імпульсу $\tau < \frac{\pi}{\omega}$, одержуємо співвідношення:

$$a_1 = \frac{\omega}{\omega_1} a_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}} a_0, \quad (8)$$

із якого видно, що $a_1 > a_0$, тобто проявляється вказаний ефект.

Залежність (8) можна одержати і не розв'язуючи диференціальних рівнянь руху. Для цього варто прирівняти потенціальні енергії системи у крайньому нижньому і крайньому верхньому положеннях. Це призводить до рівняння:

$$\frac{1}{2} (c_1 + c_2) a_0^2 = \frac{1}{2} (c_1 - c_2) a_1^2,$$

з якого випливає формула (8).

Динамічний ефект буде проявлятися і для тривалостей імпульсу $\tau > \frac{\pi}{\omega}$. Щоб знайти граничну тривалість імпульсу $t = t_*$, при якій ефект зникає, використаємо залежність:

$$2x_{CT} \frac{\omega}{\omega_1} \sin \frac{\omega \tau_*}{2} = 2x_{CT}.$$

Звідки отримуємо:

$$\tau_* = \frac{2}{\omega} \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}} \right).$$

Отже, динамічний ефект несиметрії силової характеристики проявляється лише для тих тривалостей імпульса, що попадають в проміжок $\tau \in (0; \tau_*)$. Значення τ_* не залежить від величини сили P (висоти прямокутного імпульсу), що є наслідком кусково лінійної характеристики пружності.

Розглянемо *приклад*. Для проведення розрахунків приймаємо: $m = 1$ кг; $c_1 = 150$ Н/м; $c_2 = 75$ Н/м; $P = 3$ Н і різні значення τ . Вказаним числовим даним відповідає: $\omega = 15$ с⁻¹; $\omega_1 \approx 8,66025$ с⁻¹; $x_{CT} \approx 0,013333$ м; $\tau_* \approx 0,33682$ с. Одержані числовим інтегруванням на комп'ютері рівняння (1), для трьох значень τ , графіки $x(t)$ нанесені на рис. 1.

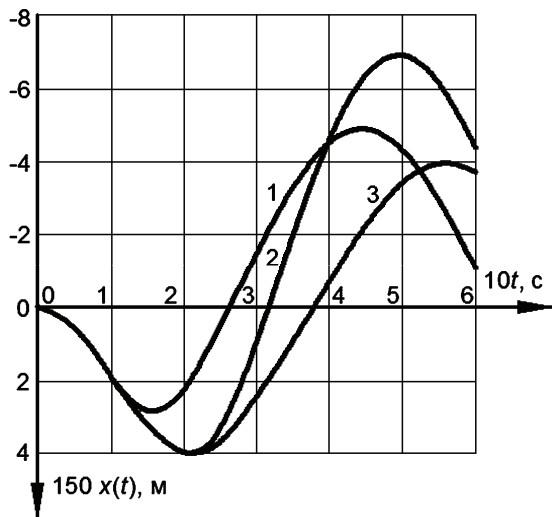


Рисунок 1 – Графіки переміщень осцилятора:
1 – $\tau = 0,10472$ с; 2 – $\tau = 0,20944$ с; 3 – $\tau = 0,33682$ с

Їх можна також побудувати за допомогою аналітичних розв'язків (3) і (5). На графіках, позначених цифрами 1 і 2, амплітудні переміщення системи вгору більші, ніж амплітудні переміщення системи вниз, куди був спрямований силовий імпульс. На графіку, позначеному цифрою 3, амплітудні переміщення вниз і вгору однакові.

На рис. 2 подано графіки $x(t)$, одержані числовим інтегруванням рівняння (1) для двох інших значень τ .

На рис. 2 видно, що динамічний ефект несиметрії силової характеристики проявляється при $\tau = 0,3$ с, а при $\tau = 0,38$ с він відсутній. У другому випадку $a_1 < a_0$. Комп'ютерне інтегрування підтвердило висновки із аналітичного розв'язку задачі руху.

Щоб переконатися, що динамічний ефект несиметрії може проявлятися і для інших форм силових імпульсів, розглянемо рух системи, що описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + [c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x)]x = P \sin(\lambda t) \cdot \left[H(t) - H\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right], \quad (9)$$

при початкових умовах (2).

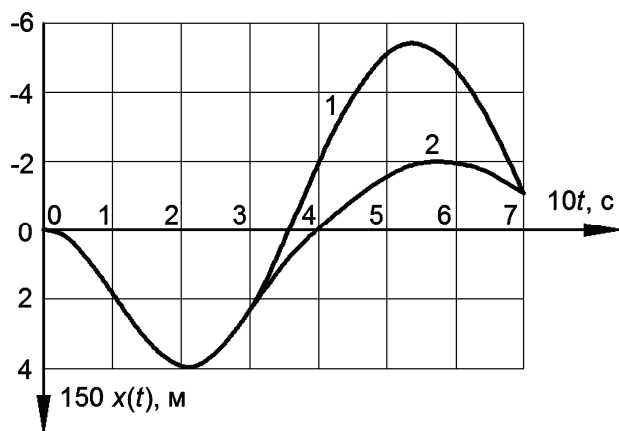


Рисунок 2 – Графіки коливань: 1 – $\tau = 0,3$ с; 2 – $\tau = 0,38$ с

У рівнянні (9) параметр $\lambda \geq \omega$. Він характеризує тривалість імпульсу у вигляді однієї півхвилі синусої-

ди.

В області додатних $x(t)$ переміщення описується виразом:

$$x(t) = \frac{P\lambda}{m\omega(\lambda^2 - \omega^2)} \begin{cases} \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\lambda} \sin(\lambda t) & t \leq \frac{\pi}{\lambda} \\ \sin(\omega t) + \sin\omega\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) & t \geq \frac{\pi}{\lambda} \end{cases} \quad (10)$$

Він має чинність, коли $\lambda > \omega$. Якщо $\lambda = \omega$, то розкривши невизначеність в (10), отримуємо:

$$x(t) = \frac{x_{CT}}{2} \begin{cases} \sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t) & \text{при } t \leq \pi/\omega \\ -\pi \cos(\omega t) & \text{при } t \geq \pi/\omega \end{cases}$$

Похідна від (10) при $t \geq \frac{\pi}{\lambda}$ дорівнює:

$$\dot{x}(t) = \frac{P\lambda}{m(\lambda^2 - \omega^2)} \left[\cos\omega t + \cos\omega\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right].$$

Осцилятор зупиняється, коли:

$$\cos\omega t + \cos\omega\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо час зупинки:

$$t = t_3 = \frac{1}{\omega} \left(\pi - \arctg \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi\omega}{\lambda}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\lambda}\right)} \right). \quad (11)$$

Максимальне відхилення системи вниз в цей момент часу становить:

$$a_0 = \frac{P\lambda}{m\omega(\lambda^2 - \omega^2)} \left[\sin(\omega t_3) + \sin\omega\left(t_3 - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right]. \quad (12)$$

Відповідне йому амплітудне відхилення вгору a_1 легко знайти по формулі (8). Воно буде більше, ніж a_0 і досягається при

$$t = t_1 = t_3 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega_1} \right),$$

де t_3 подається виразом (11).

У випадку, коли $\lambda = \omega$, амплітудне відхилення вниз досягається при $\omega t_3 = \pi$ і дорівнює $a_0 = \pi x_{CT}/2$. Для нього по формулі (8) теж маємо $a_1 > a_0$.

Отже, при $\lambda \geq \omega$, динамічний ефект несиметрії силової характеристики проявляється і при дії синусоїдального імпульсу.

Приклад. Обчислимо амплітуди a_0 і a_1 при $\lambda = \frac{4}{3}\omega$, зберігаючи попередні значення m, c_1, c_2 і P .

Для прийнятих числових даних $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$. Розвантажений осцилятор, згідно з (11), зробить першу зупинку при $t_3 \approx 0,18326$ с. При цьому він відхилиться вниз від положення $x = 0$ на $a_0 = 0,01749$ м, обчислене по формулі (12). Відхилення вгору становитиме $a_1 = 0,03030$ м при $t_1 = 0,46936$ с. Воно значно більше за a_0 .

З метою порівняння результатів, проведено числове інтегрування рівняння (9) при початкових умовах (2). Одержаний графік $x(t)$ при $\lambda = 20 \text{ с}^{-1}$ позначено цифрою 1 на рис. 3.

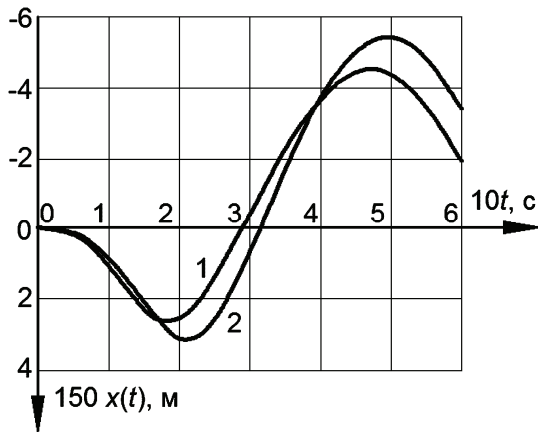


Рисунок 3 – Графік $x(t)$: 1 – $\lambda = 20 \text{ c}^{-1}$; 2 – $\lambda = 15 \text{ c}^{-1}$

Там же цифрою 2 позначено графік $x(t)$, який дає інтегрування при $\lambda = \omega = 15 \text{ c}^{-1}$. У другому випадку маємо більші значення амплітуд переміщень. Результати розрахунку a_0 і a_1 з використанням аналітичних розв'язків цілком узгоджуються з результатами комп'ютерного інтегрування рівняння руху.

Висновки. Дослідження підтвердило, що при короткочасному імпульсному навантаженні системи з несиметричною характеристикою пружності максимальні переміщення системи у напрямі дії імпульсу можуть бути менші за максимальні переміщення у протилежному напрямі. У випадку кусково лінійної силової характеристики цей ефект пов'язаний з тривалістю дії (шириною) імпульсу і не пов'язаний з формою і висотою імпульсу.

Список літератури

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
2. Филиппов А.П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А.П. Филиппов, С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин. – К.: Наукова думка, 1978. – 183 с.
3. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования

элементов конструкций / Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воронай, А.С. Шарапата. – Х.: ХНАДУ, 2004. – 392 с.

4. Ольшанский В.П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Х.: Миськдрук, 2012. – 320 с.

5. Прочность, устойчивость, колебания : справочник в 3-х тт. Т. 3 / Под ред. И.А. Биргера, Я.В. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.

6. Вибрации в технике : справочник в 6-и томах Т. 2. Колебания нелинейных механических систем. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.

7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

8. Аврамов К.В. Модели нелинейной механики в прикладных задачах энергетического машиностроения / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин, Ю.А. Ищук и др. – Х.: НТУ «ХПИ», 2006. – 142 с.

References (transliterated)

1. Filippov A.P. Oscillations of deformable systems. Moscow: Mechanical Engineering, 1970. 734 p.

2. Filippov A.P., Kohmanuk S.S., Yanutin E. G. Deformation of structural elements under impact and impulse loads. Kyiv: Naukova Dumka, 1978. 183 p.

3. Yanyutin E.G., Yanchevskii I.V., Voropai A.V., Shara-pata A.S. Problems of impulse deformation of structural elements. Kharkiv: HNADU, 2004. 392 p.

4. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V., Tishchenko L.M. Oscillations of rods and plates during a mechanical shock. Kharkiv: Miskdruk, 2012. 320 p.

5. Strength, stability, oscillations : a handbook in 3 vol. Vol. 3. Ed. I.A. Birger, Y.V. Panovko. Moscow: Machine Building, 1968. 568 p.

6. Vibrations in technology : a handbook in 6 volumes. Vol. 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems. Moscow: Mechanical Engineering, 1972. 351 p.

7. Panovko Ya.G. Fundamentals of the Applied Theory of Oscillations and Shocks. Leningrad: Mechanical Engineering, 1976. 320 p.

8. Avramov K.V., Mikhlin Yu.V., Ischuk Yu.A. and others. Models of nonlinear mechanics in applied problems of power engineering. Kharkiv: NTU «KhPI», 2006. 142 p.

Надійшла (received) 17.04.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com